# Devoir maison n° 19

**À rendre le lundi 26 mai 2025**

## Exercice 1 : Bingo

Fixons $N$ et $r$ deux entiers tels que $N \geqslant 3$ et $2 \leqslant r \leqslant N-1$.

On s'intéresse dans cet exercice à un bingo dans lequel on effectue des tirages successifs avec remise d'une boule dans une urne qui en contient $N$, numérotées de $1$ à $N$. L'un des participants a acheté un carton ayant des cases numérotées de $1$ à $r$. À chaque fois que l'un des numéros écrits sur son carton est tiré au sort, il coche la case correspondante. Si le numéro tiré ne figure pas sur son carton ou si la case a déjà été cochée, il ne fait rien. La boule tirée est remise dans l'urne et on passe au tirage suivant.

On admet que cette expérience peut alors être modélisée par une espace probabilité fini [1] $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à expliciter. On introduit :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $Z_n$ qui compte le nombre de cases de son carton qui sont cochées à l'issue du $n^{\text{ième}}$ tirage.
- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $A_k$ : « on tire une boule dont le numéro est écrit sur le carton lors du $k^{\text{ième}}$ tirage ».
- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $B_k$ : « on coche une nouvelle case sur le carton à l'issue du $k^{\text{ième}}$ tirage ».

1) Déterminer la loi de $X_n$, la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où un numéro écrit sur le carton a été tiré au sort lors des $n$ premiers tirages. Donner, sans démonstration, son espérance et sa variance.
2) Déterminer la loi de $Z_1$ puis donner $\mathbb{E}(Z_1)$ sans démonstration.
3) a) Exprimer $[Z_2 = 0]$ et $[Z_2 = 2]$ en fonction des événements des familles $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(B_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.
   b) Déterminer alors la loi de $Z_2$.
   c) Calculer $\mathbb{E}(Z_2)$.
4) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.
   a) Préciser $Z_n(\Omega)$ dans le cas où $2 \leqslant n \leqslant r$ et dans le cas où $n \geqslant r$.
   b) Calculer $\mathbb{P}(Z_n = 0)$.
   c) Lorsque $n \leqslant r$, prouver que $\mathbb{P}(Z_n = n) = \dfrac{r!}{N^n (r-n)!}$.
5) On suppose dans cette question que $n \in [\![2, r]\!]$. Justifier soigneusement que, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\mathbb{P}(Z_n = k) = \frac{r+1-k}{N}\mathbb{P}(Z_{n-1} = k-1) + \frac{k+N-r}{N}\mathbb{P}(Z_{n-1} = k).$$

Dans la suite on considère désormais que $Z_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ (quitte à ajouter des $k \in \mathbb{N}$ tels que $\mathbb{P}(Z_n = k) = 0$). On admet que la relation de la question 5 reste vraie quels que soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

6) a) Montrer par le calcul [2] que

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \qquad \mathbb{E}(Z_n) = \frac{N-1}{N}\mathbb{E}(Z_{n-1}) + \frac{r}{N}.$$

   b) En déduire [3] une expression de $\mathbb{E}(Z_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   c) En déduire que $(\mathbb{E}(Z_n))_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel que l'on précisera. Commenter.

1. Pour cela, on se limite à un (grand) nombre de tirages.
2. Je ne veux voir pas de raisonnement par récurrence.
3. La suite $(\mathbb{E}(Z_n))_{n\geqslant 1}$ est une suite usuelle du cours n'est-ce pas ?

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Une urne contient $n$ boules numérotées de $1$ à $n$. On prélève au hasard ces $n$ boules une par une et sans remise (afin de vider l'urne). A la suite de cette expérience, on note, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $u_i$ le numéro de la boule obtenue au cours du $i^{\text{ème}}$ tirage. Pour tout $i \in [\![2\,;n]\!]$, on dit qu'il y a un record au $i^{\text{ème}}$ tirage si

$$u_i > \max\{u_1, \ldots, u_{i-1}\},$$

autrement dit, si la boule obtenue au $i^{\text{ème}}$ tirage porte un numéro strictement supérieurs aux numéros des boules tirées précédemment. D'autre part, on convient qu'il y a systématiquement un record à l'instant $1$.

1) Déterminer un espace probabilité $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ qui modélise cette expérience. Préciser $\operatorname{card}(\Omega)$.

Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, on introduit l'événement $R_i$ : « il y a un record au $i^{\text{ème}}$ tirage ». On a donc $\mathbb{P}(R_1) = 1$.

2) Que vaut $\mathbb{P}(R_n)$.

3) Soit $i \in [\![2\,;n]\!]$.
   a) Justifier que $\operatorname{card}(R_i) = \dbinom{n}{i} \times (i-1)! \times (n-i)!$.
   b) En déduire $\mathbb{P}(R_i)$.

4) a) Soient $k \in [\![2\,;n]\!]$. Soient $i_1, \ldots, i_k$ des entiers de $[\![2\,;n]\!]$ tels que $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$. Justifier que $\operatorname{card}(R_{i_1} \cap R_{i_2} \cap \cdots \cap R_{i_k})$ est

$$\binom{n}{i_k}(n-i_k)! \times \binom{i_k - 1}{i_{k-1}}(i_k - i_{k-1} - 1)! \times \binom{i_{k-1}-1}{i_{k-2}}(i_{k-1} - i_{k-2} - 1)! \\ \times \cdots \times \binom{i_2 - 1}{i_1}(i_2 - i_1 - 1)! \times (i_1 - 1)!$$

   b) En déduire que $R_1, \ldots, R_n$ sont mutuellement indépendants.

Dans la suite, nous allons nous intéresser à la variable aléatoire $X_n$ qui compte le nombre de records.

5) Calculer $\mathbb{P}(X_n = 1)$ et $\mathbb{P}(X_n = n)$.

6) Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, notons $A_k$ : « la boule numérotée $n$ sort au $i^{\text{ème}}$ tirage ».
   a) Soit $k \in [\![2\,;n]\!]$. Justifier que $\operatorname{card}([X_n = 2] \cap A_k) = \dbinom{n-1}{k-1}(n-k)!$.
   b) En déduire que

$$\mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

7) a) Exprimer $X_n$ en fonction des variables aléatoires $\mathbb{1}_{R_1}, \ldots, \mathbb{1}_{R_n}$.
   b) En déduire $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.

8) Dans cette question, nous allons faire varier $n$. On se donne $\varepsilon > 0$.
   a) Donner des équivalents simples de $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
   b) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad \left|\frac{\mathbb{E}(X_n)}{\ln(n)} - 1\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

   c) Justifier que, pour tout $n \geqslant n_0$

$$\left[\left|\frac{X_n}{\ln(n)} - 1\right| > \varepsilon\right] \subset \left[\left|\frac{X_n}{\ln(n)} - \frac{\mathbb{E}(X_n)}{\ln(n)}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right].$$

d) En déduire que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{\ln(n)} - 1\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

*On dit que* $\dfrac{X_n}{\ln(n)}$ *converge en probabilité vers* $1$ *lorsque* $n$ *tend vers* $+\infty$*.*

## Exercice 3 : Inégalité maximale de Kolmogorov

Soient $n \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles centrées indépendantes. Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, on pose :

$$\sigma_k = \sigma(X_k), \qquad S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i \qquad \text{et} \qquad A_k = \left[\, |S_k| \geqslant x \,\right] \cap \left( \bigcap_{i=1}^{k-1} \left[\, |S_i| < x \,\right] \right).$$

Enfin, on pose

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}.$$

1) Montrer que

$$\forall k \in [\![1\,;n]\!], \qquad \mathbb{P}(|S_k| \geqslant x) \leqslant \frac{\sigma^2}{x^2}.$$

2) Exprimer l'événement $\left[\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant x\right]$ en fonction de $A_1, \dots, A_n$.

3) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{A_k} S_n^2\right) \leqslant \sigma^2.$$

4) Montrer que,

$$\forall k \in [\![1\,;n]\!], \qquad \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{A_k} S_k^2\right) \leqslant \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{A_k} S_n^2\right).$$

5) En déduire l'inégalité maximale de Kolmogorov :

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant x\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{x^2}.$$