Devoir maison n° 17

À rendre le lundi 28 avril 2025

Exercice 1 : Endomorphismes vérifiant $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$

Les cinq parties de cet exercice sont indépendantes. On n'utilisera pas d'arguments de dimension (d'ailleurs les espaces vectoriels des parties C et D ne sont pas de dimension finie a priori) à part dans la partie E.

Partie A : Étude d'un premier cas particulier

Introduisons

$$f : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \longmapsto (x + y + t, z + 2t, 2x + 2y + 2z + 6t, -x - y - z - 3t).$$

1) a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.
   b) Vérifier que f^2 est l'endomorphisme nul.
2) a) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.
   b) Sans résoudre de système, montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1, 0, 2, -1), (0, 1, 2, -1))$.
   c) Vérifier que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$.
3) Posons $G = \mathrm{Vect}((0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$.
   a) Montrer que $G \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^4$.
   b) Préciser u la projection sur G parallèlement à $\mathrm{Im}(f)$ et w la projection sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à G.
   c) Montrer que $v : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \longmapsto (0, 0, y - 2x, x)$ est une application linéaire surjective de $\mathbb{R}^4$ dans G. Est-elle injective ?
   d) Vérifier que $u = v \circ f$ et $w = f \circ v$ et en déduire que $v \circ f + f \circ v = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}$.

Partie B : Étude d'un deuxième cas particulier

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X] \longmapsto P^{(n)}$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ vérifiant $f^2 = 0$.
2) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
3) Justifier brièvement que $G = \mathrm{Vect}(X^n, \ldots, X^{2n-1})$ est un supplémentaire de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$.
4) Introduisons
$$v : P = \sum_{k=0}^{2n-1} a_k X^k \in \mathbb{R}_{2n-1}[X] \longmapsto \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k\, k!}{(k+n)!} X^{k+n}.$$
Il s'agit d'une application linéaire surjective de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans G (*on ne demande pas de le justifier*).
Vérifier que $v \circ f + f \circ v = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_{2n-1}[X]}$

Partie C : Étude du cas général

Soient E un espace-vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$. On suppose que $\mathrm{Im}(f)$ admet un supplémentaire[1] G dans E.

⚠ *Dans cette partie, f, u et v ne sont PAS les endomorphismes de la partie A ou de la partie B et G n'est PAS le sous espace vectoriel de la partie A ou de la partie B.*

1) Soit $a \in E$. Montrer qu'il existe $s \in G$ tel que $f(a) = f(s)$.
2) En déduire que, pour tout $x \in E$, il existe un couple $(y, s) \in G^2$ tel que $x = y + f(s)$.
3) Supposons qu'il existe $(y, s, y', s') \in G^4$ tels que $y + f(s) = y' + f(s')$. Montrer que $y = y'$ et $s = s'$.

Il s'ensuit que, pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(y, s) \in G^2$ tel que $x = y+f(s)$. Ce couple dépend de x donc notons-le plutôt $(u(x), v(x))$. Cela définit alors deux applications $u : x \in E \longmapsto u(x)$ et $v : x \in E \longmapsto v(x)$ qui vérifient $\mathrm{Id}_E = u + f \circ v$.

4) Montrer que u et v sont des applications linéaires de E dans G.

   On pourra s'inspirer de la preuve qu'une projection vectorielle est linéaire.
5) a) Montrer que $f^2 = 0$.
   b) Justifier que, si $z \in G$, alors $v(z) = 0$ et $v(f(z)) = z$.
   Pour cela, on reviendra à la définition de $v(z)$ et de $v(f(z))$.
   c) En déduire que v est surjective, que $v^2 = 0$ et que $v \circ f \circ u = u$.
   d) En déduire que $v \circ f = u$ et conclure que $v \circ f + f \circ v = \mathrm{Id}_E$.

Partie D : Étude de la réciproque

On suppose que f et v sont deux endomorphismes de E vérifiant $f \circ v + v \circ f = \mathrm{Id}_E$.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)$ et que $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(v)$.
2) Montrer que, si $f^2 = 0$, alors $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.
3) Montrer que, si $v^2 = f^2 = 0$, alors $\mathrm{Im}(v)$ est un supplémentaire de $\mathrm{Im}(f)$ (*ou de* $\mathrm{Ker}(f)$*, c'est la même chose alors*) dans E.

Partie E : Le cas général où E est de dimension finie

Dans le chapitre 33, le théorème du rang nous permettra d'en déduire facilement que, lorsque E est de dimension finie, sa dimension est paire (c'est-à-dire que toutes les bases de E sont finies et de même cardinal pair). Étudions la réciproque : supposons que E soit de dimension finie paire, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_{2p})$ de E.

1) Justifier qu'il existe un unique endomorphisme f tel que, pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, $f(e_i) = 0$ et $f(e_{p+i}) = e_i$. Expliciter f à l'aide de la base $\mathscr{B}$.
2) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.
3) Proposer un supplémentaire G simple de $\mathrm{Im}(f)$.
4) Expliciter les applications u et v à l'aide de la base $\mathscr{B}$.
5) Retrouver le fait que $v \circ f + f \circ v = \mathrm{Id}_E$.

---

1. Dans cette partie, à chaque question, on utilisera donc judicieusement les trois informations que l'on a à notre disposition :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f), \qquad \mathrm{Im}(f) \oplus G = E, \qquad \mathrm{Ker}(f) \oplus G = E.$$

Pensez à utiliser les différents critères sur les supplémentaires vus en cours.