Devoir maison n^{o} 16

À rendre le lundi 31 mars 2025

Problème 1 : Développement en série entière de la fonction Arcsinus

On rappelle que la fonction Arcsin est continue sur $[-1\,;1]$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;1[$ avec

$$\forall x \in \,]-1\,;1[\,, \qquad \operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

L'objectif de cet exercice est de montrer que

$$\forall x \in [-1\,;1]\,, \qquad \operatorname{Arcsin}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)4^n}.$$

1) a) Vérifier que

$$\forall x \in \,]-1\,;1[\,, \qquad (1-x^2)\operatorname{Arcsin}''(x) = x\operatorname{Arcsin}'(x).$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En dérivant n fois les deux membres de l'égalité ci-dessus, montrer que

$$\forall x \in \,]-1\,;1[\,, \qquad (1-x^2)\operatorname{Arcsin}^{(n+2)}(x) = (2n+1)x\operatorname{Arcsin}^{(n+1)}(x) + n^2\operatorname{Arcsin}^{(n)}(x).$$

On remarque (on ne demande pas de le détailler) que cette formule est encore vraie si $n = 0$.

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Arcsin}^{(n+2)}(0) = n^2 \operatorname{Arcsin}^{(n)}(0)$.

d) Montrer enfin que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{Arcsin}^{(2n)}(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Arcsin}^{(2n+1)}(0) = \left(\frac{(2n)!}{2^n n!}\right)^2.$$

2) Retrouver le développement limité de Arcsin en 0 à tout ordre.

3) Montrer que, pour tout $x \in [-1\,;1]$, la série $\sum \binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)4^n}$ converge.

On montre de même (on ne demande pas de le faire) que, pour tout $x \in \,]-1\,;1[$, les séries $\sum \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n}$ et $\sum \binom{2n}{n} 2n \frac{x^{2n-1}}{4^n}$ convergent. On introduit alors les fonctions

$$g : x \in [-1\,;1] \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)4^n},$$

$$\varphi : x \in \,]-1\,;1[\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n} \qquad \text{et} \qquad \psi : x \in \,]-1\,;1[\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} 2n \frac{x^{2n-1}}{4^n}.$$

4) Soit $x \in \,]-1\,;1[$. Soit $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $|h| \leqslant \frac{1-|x|}{2}$.

a) Vérifier que $a_x = \frac{1+|x|}{2} \in \,]0\,;1[$ et que, pour tout $t \in [x\,;x+h]$, $|t|^{2n-1} \leqslant a_x^{2n-1}$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \frac{(x+h)^{2n+1} - x^{2n+1}}{h} - (2n+1)x^{2n} \right| \leqslant \frac{|h|}{2} 2n(2n+1) a_x^{2n-1}.$$

c) En déduire que

$$\left| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - \varphi(x) \right| \leqslant \frac{|h|}{2} \psi(a_x).$$

d) Montrer alors que g est dérivable sur $]-1\,;1[$ et que $g' = \varphi$.

On montre de façon analogue (on ne demande pas de le faire) que φ est de classe C^1 sur $]-1\,;1[$ et que $\varphi' = \psi$. Ainsi g est de classe C^2 sur $]-1\,;1[$ et $g'' = \psi$.

5) Soit $x \in\,]-1\,;1[$.

a) A l'aide d'un changement d'indice, montrer que

$$(1-x^2)\psi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\binom{2k+2}{k+1} \frac{2(k+1)x^{2k+1}}{4^{k+1}} - \binom{2k}{k} \frac{2kx^{2k+1}}{4^k} \right).$$

b) En déduire que $(1-x^2)g''(x) = xg'(x)$.
On rappelle que $g' = \varphi$ et $g'' = \psi$.

6) a) En déduire que la fonction $h : x \longmapsto g'(x)\sqrt{1-x^2}$ est constante sur $]-1\,;1[$.

b) Montrer enfin que $g = \operatorname{Arcsin}$ sur $]-1\,;1[$.

7) Dans cette question, nous allons montrer que $g = \operatorname{Arcsin}$ sur $[-1\,;1]$ tout entier.

a) Soient $x \in\,]0\,;1[$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)4^k} \leqslant \operatorname{Arcsin}(x) \quad \text{et} \quad \operatorname{Arcsin}(x) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k} \frac{1}{(2k+1)4^k} = g(1).$$

b) En déduire que $\operatorname{Arcsin}(1) = g(1)$.

c) En déduire que $\operatorname{Arcsin}(-1) = g(-1)$.
Pour cette question, on répondra en une ligne maximum et on ne dira pas que c'est analogue à la question précédente.

8) Soit $x \in\,]-1\,;1[$. Pour tous $k \in \mathbb{N}$, introduisons $u_k(x) = \binom{2k}{k} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)4^k}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)4^k}$$

.

a) Vérifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1}(x) = \dfrac{(2k+1)^2x^2}{(2k+2)(2k+3)} u_k(x)$.

b) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|u_k(x)| \leqslant |x|^{2k+1}$.

c) Montrer enfin que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |\operatorname{Arcsin}(x) - g_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+3}}{1-x^2}.$$

d) Supposons que $x \neq 0$. Donnons-nous $\varepsilon > 0$. Déduire de la question précédente un entier n tel que $g_n(x)$ soit une approximation de $\operatorname{Arcsin}(x)$ à ε près.