Devoir maison n° 15

À rendre le lundi 24 mars 2025

Exercice 1 : Fonctions absolument monotones

Si vous manquez de temps, traitez en particulier la partie C qui porte sur les nouveautés du programme.

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et non réduit à un point. On dit qu'une fonction f définie sur I et à valeurs réelles est absolument monotone (AM en abrégé) si f est de classe C^∞ sur I et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in I, \qquad f^{(n)}(x) \geqslant 0.$$

Partie A : Des exemples de fonctions absolument monotones

1) Montrer que les fonctions $\exp$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ sont AM sur des intervalles à préciser.

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $f_\alpha : x \longmapsto x^\alpha$ est AM sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\alpha \in \mathbb{N}$.

3) a) Soit $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\tan^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tan^{(k)}(x) \tan^{(n-k)}(x).$$

   b) En déduire que $\tan$ est AM sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Partie B : Premières propriétés des fonctions absolument monotones

1) Soient f et g deux fonctions AM. Montrer que $f+g$ et fg sont AM.

2) Montrer que toute application AM est positive et croissante.

3) a) Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. Supposons que f est AM sur $I =]a\,;b[$. Justifier que f admet une limite finie ℓ en a.

   b) Que dire de ce résultat en b ?

   c) Supposons que $a \in \mathbb{R}$. On peut alors prolonger f par continuité en a en posant $f(a) = \ell$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^n sur $[a\,;b[$.

   d) En déduire que f est AM sur tout $[a\,;b[$.

Partie C : Développement en série entière des fonctions absolument monotones

Soit $R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Soit f une fonction AM sur l'intervalle $[0\,;R[$. Le but de cette partie est de montrer que, pour tout $x \in [0\,;R[$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x).$$

1) **Question préliminaire.** Soient a et b deux réels tels que $0 \leqslant a < b \leqslant R$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k.$$

   a) A l'aide d'une formule de Taylor, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n \leqslant S_n \leqslant f(b).$$

b) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et croissante. En déduire qu'elle converge.

c) En déduire la valeur de

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n.$$

2) Soit $x \in [0\,;R[$. On se donne $b \in]x\,;R[$.

a) A l'aide de la question C1a, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt\right| \leqslant \frac{(n+1)f(b)}{b-x}\int_0^x \left(\frac{x-t}{b-t}\right)^n dt.$$

b) Montrer que, pour tout $t \in [0\,;x]$, $0 \leqslant \dfrac{x-t}{b-t} \leqslant \dfrac{x}{b}$.

c) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

3) On suppose désormais que f est AM sur $]-R\,;R[$. Nous allons montrer que le résultat de la question précédente est encore[1] valable sur $]-R\,;0[$. On se donne donc $x \in]-R\,;0[$.

a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \leqslant \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0).$$

b) En utilisant la question C1c, montrer alors que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

Exercice 2 : De l'analyse asymptotique en vrac

1) a) Déterminer le développement limité de $x \longmapsto \left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^x$ en 0^+ à l'ordre 5.

b) En déduire que, au voisinage de 0^+,

$$x^x - (\sin(x))^x = \frac{x^3}{6} + \frac{x^4\ln(x)}{6} + \frac{x^5}{180} + \mathrm{o}\left(x^5\right)$$

c) Peut-on prolonger $f : x \longmapsto x^x - \sin(x)^x$ par continuité en 0 ? Si oui, justifier qu'elle est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$ sans faire aucun calcul supplémentaire.

d) A quels ordres, la fonction f admet-elle un développement limité en 0^+ ?

2) Montrer que la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{\sqrt{4x^2-4x+3}}{(1+\mathrm{e}^{-1/x})^2}$$

admet une asymptote en $+\infty$ et on précisera la position relative de la courbe de f et de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

1. On sait déjà qu'il l'est sur $[0\,;R[$. On dira alors que f est développable en série entière sur $]-R\,;R[$.