Devoir maison n° 14

À rendre le jeudi 13 mars 2025

Étude d'une fonction définie par une intégrale

On introduit la fonction

$$G : x \longmapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{t - \ln(t)}.$$

1) a) En utilisant un argument de convexité/concavité, justifier que la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t-\ln(t)}$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

   b) Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) En déduire que la fonction G est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) a) Justifier que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer sa dérivée en fonction de f.

   b) Montrer que $G'(x)$ est du signe de $\ln\left(\frac{2}{x}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

   c) Justifier que $\ln(x)G'(x) \underset{0^+}{\sim} -1$ et en déduire la limite de G' en 0^+.

4) a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leqslant G(x) \leqslant x$.

   b) En déduire que l'on peut prolonger G en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. On précisera sa valeur en 0.

   c) Montrer que, ainsi prolongée, G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et que $G'(0) = 0$.

5) On introduit la fonction $h : t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{t} f(t)$.

   a) Déterminer une primitive de $t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   b) En déduire que, pour tout $x \in [1\,;+\infty[$,

$$0 \leqslant \int_x^{2x} h(t)\,dt \leqslant \frac{\ln(2)}{2}\big(\ln(2) + 2\ln(x)\big) f(x).$$

   c) Vérifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f(t) - \dfrac{1}{t} = h(t)$ et en déduire que $G(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ln(2)$.

6) a) Dresser le tableau de variations complet de G sur $\mathbb{R}_+$.
   On ne cherchera pas à calculer d'autres valeurs prises par la fonction G autre que $G(0)$.

   b) Tracer l'allure de la courbe représentative de G sur $\mathbb{R}_+$.
   On placera la tangente en 0, les éventuelles tangentes horizontales et les éventuelles asymptotes.