Devoir maison n° 13

À rendre le lundi 3 mars 2025

Problème 1 : Polynômes de Tchebychev

On définit une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes par la relation suivante :

$$T_0 = 1, \qquad T_1 = X \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme T_n est appelé le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Tchebychev (de première espèce).

Partie A : Premières propriétés des polynômes de Tchebychev

1) Déterminer T_2, T_3, T_4 et T_5 sous forme développée.

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad T_n(\cos(x)) = \cos(nx).$$

4) Fixons $n \in \mathbb{N}$ dans la suite de cette partie. $n \in \mathbb{N}$. Montrer que T_n est l'unique[1] polynôme vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad T_n(\cos(x)) = \cos(nx).$$

5) Calculer $T_n(-1)$, $T_n(0)$ et $T_n(1)$.

6) En dérivant la relation de la question A4, montrer que $T_n'(1) = n^2$.

Partie B : Coefficients des polynôme de Tchebychev

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, notons a_i le coefficient de degré $n - i$ de T_n.

1) a) En utilisant la question A4 montrer[2] que $(-1)^n T_n(-X) = T_n(X)$.

   b) En déduire que les coefficients de degré de parité contraire à celle de n sont nuls.

2) a) En dérivant deux fois la relation de la question A4, montrer que

$$(1 - X^2)T_n'' - XT_n' + n^2 T_n = 0.$$

   b) En utilisant la formule de Leibniz et la question précédente, établir que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad (1 - X^2)T_n^{(p+2)} - (2p+1)XT_n^{(p+1)} + (n^2 - p^2)T_n^{(p)} = 0.$$

   c) Déduire de la question précédente que, pour tout $k \in \llbracket 1\,;\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rrbracket$,

$$a_{2k} = -\frac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{4k(n-k)} a_{2(k-1)}$$

   d) Conclure que, pour tout $p \in \llbracket 0\,;\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rrbracket$,

$$a_{2p} = \frac{n}{2}(-1)^p 2^{n-2p} \frac{(n-p-1)!}{p!(n-2p)!}.$$

---

1. On a vu dans le chapitre 7 que le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (1-X^2)^k X^{n-2k}$ vérifie aussi cette condition. Par unicité, il s'agit donc de T_n. Nous n'utiliserons cette formule à **aucun moment** de ce devoir.
2. Ainsi l'application polynomiale associée à T_n a la même parité que n.

On en déduit que

$$T_n = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n}{2}(-1)^p 2^{n-2p} \frac{(n-p-1)!}{p!(n-2p)!} X^{n-2p}.$$

Partie C : Factorisation des polynômes de Tchebychev

1) Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes T_2, T_3, T_4 et T_5 calculés à la question A1.

2) Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.

   a) Justifier que $x \longmapsto \cos(nx)$ s'annule exactement n fois exactement dans $]0\,;\pi[$. On explicitera les n valeurs en questions et on les notera $t_1, \dots, t_n$ de sorte que $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$.

   b) En déduire la factorisation de T_n dans $\mathbb{R}[X]$.

Partie D : Calcul de $\zeta(2)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \text{et} \qquad U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

On admet (nous l'avons déjà montré plusieurs fois cette année) que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel $\zeta(2)$. Dans cette partie, nous allons expliciter la valeur de $\zeta(2)$ à l'aide des polynômes de Tchebychev.

1) Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant des fractions rationnelles, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\cos(t_k)} = n^2.$$

2) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)} = 2n^2 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)} = 2n^2 - n.$$

3) a) Montrer que, pour tout $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$.

   b) En déduire que $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{8}$.

4) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n} = \frac{1}{4}S_n + U_n$.

   b) En déduire que la valeur de $\zeta(2)$.

Problème 2 : Quelques résultats sur les matrice orthogonales

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $M^T M = M M^T = \mathrm{I}_n$. Autrement dit M est orthogonale si et seulement si M est inversible et $M^{-1} = M^T$.

Comme nous l'avons vu (en l'admettant temporairement) en cours : il suffit de vérifier que $M^T M = \mathrm{I}_n$ **ou** $M M^T = \mathrm{I}_n$ pour conclure que M est orthogonale.

On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie A : Le cas particulier de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on se donne $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $a^2+b^2 = a^2+c^2 = d^2+c^2 = d^2+b^2 = 1$ et que $ac+bd = 0$.

2) Montrer qu'il existe $\theta \in [0\,;2\pi[$ et $\varepsilon \in \{-1;1\}$ tels que $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\varepsilon\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

3) Réciproquement, donnons-nous $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \{-1;1\}$. Vérifier que $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\varepsilon\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon\cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.

On connaît donc totalement les matrices de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.

Partie B : Généralités sur les matrices orthogonales

1) a) Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
   b) L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est-il un espace vectoriel ?

2) Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on appelle norme de X le réel positif $\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.
   a) Quel lien y a-t-il entre $\|X\|$ et la matrice $X^T X$?
   b) Montrer que, pour tous $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $\|AX\| = \|X\|$.
   Autrement dit, multiplier un vecteur colonne par une matrice orthogonale préserve sa norme. On appelle aussi $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des isométries pour cette raison (cf. programme de deuxième année).

3) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
   a) Montrer que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2 = 1$.
   b) En déduire que, pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $|a_{i,j}| \leqslant 1$.
   c) Justifier que les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont entiers sont exactement les matrices telles que, sur chaque ligne et sur chaque colonne, se trouve un et un seul coefficient non nul qui vaut 1 ou -1.

Partie C : Une méthode pour construire une matrice orthogonale

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
   Cette question n'est pas à rédiger sur la copie que vous me rendrez. Mais faites-la tout de même pour vous entraîner !
   a) En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, montrer que la matrice $\mathrm{I}_3 + A$ est inversible et calculer son inverse.
   b) Calculer $M = (\mathrm{I}_3 - A)(\mathrm{I}_3 + A)^{-1}$.
   c) Vérifier, sans inverser M avec le pivot de Gauss, que $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$.

Nous allons généraliser ce résultat. Dans la suite A désigne une matrice quelconque de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

2) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $(\mathrm{I}_n + A)X = 0_{n,1}$.
   a) Montrer que $\|AX\|^2 = -\|X\|^2$.
   b) En déduire que le système linéaire homogène dont A est la matrice associée admet une unique solution.
   On admet (on verra cela dans le chapitre 34) que cela entraîne que $\mathrm{I}_n + A$ est inversible.
   c) En déduire que $\mathrm{I}_n - A$ est inversible.

3) Posons $M = (\mathrm{I}_n - A)(\mathrm{I}_n + A)^{-1}$.
   a) Justifier que $\mathrm{I}_n - A$ et $\mathrm{I}_n + A$ commutent et en déduit que $\mathrm{I}_n + A$ et $(\mathrm{I}_n - A)^{-1}$ commutent.
   b) Conclure que $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.