Devoir maison n$^{\text{o}}$ 12

À rendre le lundi 3 février 2025

Exercice 1 : Fonctions log-convexes

Dans cet exercice, I et J désignent des intervalles non vides et non réduits à un point.

On pourra utiliser librement le résultat suivant vu en cours : si f et g sont deux fonctions convexes sur I et si α et β sont des réels positifs, alors $\alpha f + \beta g$ est convexe sur I.

On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est logarithmiquement convexe (ou log-convexe) sur I si la fonction $\ln \circ f$ est convexe sur I.

À part dans la dernière question, aucune des fonctions convexes de ce problème n'est dérivable a priori.

1) **Question préliminaire.** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions convexes sur I et J respectivement telles que $f(I) \subset J$ et g est croissante sur J. Montrer que $g \circ f$ est convexe sur I.

2) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$. Montrer que, si f est log-convexe sur I, alors f est convexe sur I. La réciproque est-elle vraie ?

3) **Une première caractérisation.** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$. L'objectif de cette question est de montrer que f est log-convexe si et seulement si, pour tout $\alpha > 0$, f^α est convexe.

   a) Montrer le sens direct.

   Réciproquement supposons que, pour tout $\alpha > 0$, f^α est convexe. On se donne $(x, y) \in I^2$ et $t \in \,]0\,;1[$. On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions

   $$u : \alpha \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha \ln(f((1-t)x+ty))} \qquad \text{et} \qquad v : \alpha \longmapsto (1-t)\mathrm{e}^{\alpha \ln(f(x))} + t\mathrm{e}^{\alpha \ln(f(y))}.$$

   b) Montrer que $u'(0) \leqslant v'(0)$ en utilisant des taux d'accroissements.

   c) En déduire que f est log-convexe sur I.

4) **Une deuxième caractérisation.** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$. L'objectif de cette question est de montrer que f est log-convexe sur I si et seulement si, pour tout $a > 0$, $x \longmapsto a^x f(x)$ est convexe sur I.

   a) Montrer le sens direct.

   Réciproquement supposons que, pour tout $a > 0$, $x \longmapsto a^x f(x)$ est convexe sur I. On se donne $(x, y) \in I^2$ et $t \in \,]0\,;1[$.

   b) Montrer que, pour tout $a > 0$,

   $$f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)a^{t(x-y)} f(x) + t a^{(1-t)(y-x)} f(y).$$

   c) Montrer que la fonction $z \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto (1-t)z^{t(x-y)} f(x) + t z^{(1-t)(y-x)} f(y)$ admet un minimum global atteint en $z_{x,y} = \left(\dfrac{f(x)}{f(y)}\right)^{\frac{1}{y-x}}$.

   d) En déduire que f est log-convexe sur I.

5) **Applications.** Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ deux fonctions log-convexes sur I.

   a) Montrer que $f \times g$ est log-convexe sur I.

   b) En utilisant la deuxième caractérisation, montrer que $f + g$ est log-convexe sur I.

6) **Une troisième caractérisation.** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction deux fois dérivable sur I. Montrer que f est log-convexe sur I si et seulement si $(f')^2 \leqslant f f''$.

Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions f **dérivables** sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x)f(y) \neq -1 \qquad \text{et} \qquad f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}. \qquad (*)$$

1) Déterminer toutes les fonctions constantes f vérifiant $(*)$.

2) Montrer qu'une fonction vérifiant $(*)$ et prenant la valeur 1 ou la valeur -1 en un certain point est constante.

On suppose dans la suite de l'exercice que f est une fonction dérivable non constante qui vérifie $(*)$.

3) a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| < 1$.

   b) Calculer $f(0)$.

4) a) Notons $c = f'(0)$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = c\left(1 - f(x)^2\right).$$

   On dérivera la fonction $y \longmapsto f(x+y)$ à x fixé.

   b) En déduire que $c \neq 0$.

5) a) Justifier que f admet des limites en $+\infty$ et $-\infty$ que l'on précisera selon le signe de c.

   b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1\,;1[$.

   c) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-1\,;1[$ et calculer sa dérivée.

6) a) Déterminer, pour tout $y \in \,]-1\,;1[$, une expression de $f^{-1}(y)$ en fonction de y et c.

   b) Montrer enfin que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{th}(cx)$.

7) Déterminer alors l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles vérifiant $(*)$.
   On pourra utiliser sans justification le fait que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)$ *et* $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y)$.