Devoir maison n° 11

À rendre le lundi 27 janvier 2025

Exercice 1 : Étude d'une fonction implicite

Soit f une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ prenant au moins une valeur strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ (c'est-à-dire il existe un réel strictement positif a_0 tel que $b_0 = f(a_0) > 0$).

Partie A : Construction de la fonction implicite

1) Justifier que f admet une limite $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ en 0^+ et une limite $\beta \in \,]-\infty\,;\alpha] \cup \{-\infty\}$ en $+\infty$.

2) Montrer que, pour tour $t \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un unique point $u_t \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(u_t) = tu_t$.

3) Interpréter graphiquement le point $u(t)$. Que représente le point $u(1)$ pour f ?

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, notons plutôt $u(t)$ au lieu de u_t. Cela définit donc une fonction u de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. L'objectif de ce problème est d'étudier la fonction u.

4) **Quelques exemples.** Soient a, b, c et α des réels. Pour chacun des exemples suivants, justifier que f vérifie les trois conditions de l'énoncé, expliciter la fonction u.

   a) $f : x \longmapsto \dfrac{c}{x^\gamma}$ lorsque $c > 0$ et $\gamma \geqslant 0$.

   b) $f : x \longmapsto b - ax$ lorsque $a > 0$ et $b > 0$.

   c) $f : x \longmapsto c - bx - ax^2$ lorsque $a > 0$, $b \geqslant 0$ et $c > 0$.

Partie B : Variations, continuité, limites, dérivabilité

On revient au cas général. Commençons par étudier les variations de u.

1) Soient s et t dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $s < t$.

   a) Vérifier que $f(u(t)) - su(t) > 0$.

   b) En déduire que $u(t) < u(s)$. Conclure quant au sens de variations de u

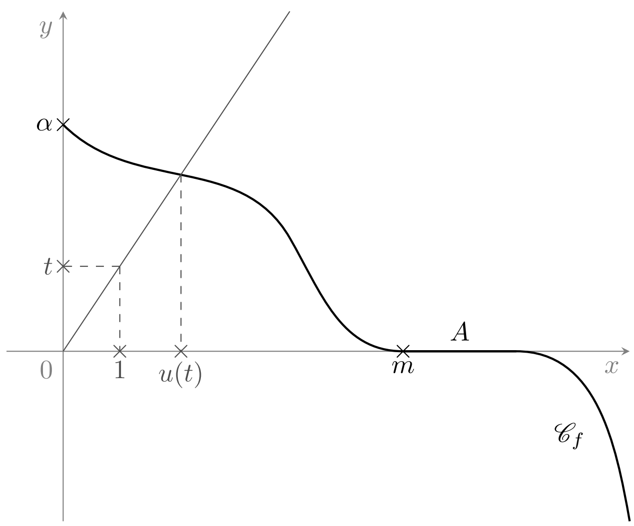
On désire à présent étudier la continuité de u sur $\mathbb{R}_+^*$ et ses limites en 0^+ et en $+\infty$. On rappelle que f est continue et qu'elle est décroissante (mais pas strictement décroissante a priori).

2) Supposons que f prend une valeur négative (au sens large) sur $\mathbb{R}_+^*$. Notons

$$A = \{x \in \mathbb{R}_+^* \mid f(x) = 0\}.$$

   a) Montrer que A admet une borne inférieure m et que $m > 0$.

   b) Justifier que $f(m) = 0$.



c) Justifier que f est négative sur $[m\,;+\infty[$ et strictement positive sur $]0\,;m[$.

d) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $u(t) \in \,]0\,;m[$.

Dans le cas où f ne prend que des valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}_+^*$, on pose $m = +\infty$. Ainsi, que f prenne ou non des valeurs négatives sur $\mathbb{R}_+^*$, f est strictement positive sur $]0\,;m[$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $u(t) \in \,]0\,;m[$.

3) a) Montrer alors que $h : x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est une bijection de $]0\,;m[$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que $h^{-1} = u$. En déduire que u est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser ses limites en 0^+ et en $+\infty$.

4) Supposons dans cette question uniquement que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que u est alors dérivable sur $]0\,;m[$ et que

$$\forall t \in \,]0\,;m[\,, \qquad u'(t) = \frac{u(t)}{f'(u(t)) - t}.$$

5) Supposons dans cette question que f s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$ (donc m est un réel strictement positif).

a) Montrer que u est prolongeable par continuité en 0 (on précisera le prolongement en question).

b) Montrer que, si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $f'(m) \neq 0$, alors u de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et préciser $u'(0)$.

Partie C : Un exemple pas si facile

Supposons dans cette partie que

$$f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \begin{cases} x\,\tan\left(\dfrac{\pi(1-x)}{2}\right) & \text{si} \quad x \in \,]0\,;1] \\ 0 & \text{si} \quad x \in \,]1\,;+\infty[\end{cases}$$

1) Justifier que $\varphi : t \longmapsto \dfrac{\sin(t) - t}{1 - \cos(t)}$ est bien définie sur $]0\,;\pi]$ et déterminer son signe.

2) a) Justifier que f est bien définie sur $]0\,;1]$ et dérivable sur $]0\,;1[$.

b) Calculer f' sur $]0\,;1[$ puis vérifier que, pour tout $x \in \,]0\,;1[$, $f'(x) = \varphi(\pi x)$.

3) En déduire que f vérifie les hypothèses du début de l'énoncé. Préciser m dans cet exemple.

4) Expliciter u.

5) Retrouver, pour cet exemple, le résultat de la question B5.

Exercice 2 : Une suite récurrence en totale autonomie

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = 1 + \mathrm{e}^{-u_n}.$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, si $n_k = \lfloor k\ln(10) \rfloor + 1$, alors u_{n_k} est une approximation de sa limite à 10^{-k} près.