Devoir maison n° 10

À rendre le lundi 13 janvier 2025

Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge à gauche, écrivez à l'encre bleue ou noire et encadrez ou soulignez les résultats principaux.

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. Tout résultat doit être justifié. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez.

Exercice : Produit semi-direct

Partie A : Le produit semi-direct est une loi de groupe

On se donne deux groupes $(N, *)$ et $(H, \top)$. Notons e_N le neutre de N et e_H le neutre de H.

1) On note $\mathrm{Aut}(N)$ l'ensemble des automorphismes de N (c'est-à-dire des morphismes bijectifs de N dans lui-même). Montrer que $(\mathrm{Aut}(N), \circ)$ est un groupe.
   On montrera que c'est un sous-groupe d'un groupe bien connu.

On considère φ un morphisme[1] de H dans $\mathrm{Aut}(N)$.

2) a) Qu'est ce que $\varphi(e_H)(n)$ et $\varphi(h)(e_N)$ pour tous $h \in H$ et $n \in N$?
   b) Soit $h \in H$. Quel est l'automorphisme réciproque de $\varphi(h)$?
   c) Soient $h \in H$ et $n \in N$. Quel est le lien entre $\varphi(h)(n^{-1})$ et $(\varphi(h)(n))^{-1}$? Quelle est la nature de ces deux objets ? A-t-on $\varphi(h^{-1})(n^{-1}) = \varphi(h)(n)$?

On munit $N \times H$ de la loi de composition interne $\rtimes_\varphi$ définie par :

$$\forall((n_1, h_1), (n_2, h_2)) \in (N \times H)^2, \qquad (n_1, h_2) \rtimes_\varphi (n_2, h_2) = \big(n_1 * \varphi(h_1)(n_2), h_1 \top h_2\big).$$

3) Montrer que $N \times H$ est un groupe pour la loi $\rtimes_\varphi$. On précisera l'élément neutre et le symétrique de chaque élément.
   En l'absence d'ambiguïté, on pourra noter simplement $\rtimes$ au lieu de $\rtimes_\varphi$.

4) Pourquoi est-ce une généralisation de la notion de produit direct de groupes ?

Partie B : Un critère d'isomorphisme

On suppose dans cette partie que N et N sont des sous-groupes d'un groupe G dont on note $*$ la loi et e le neutre (et donc $\top = *$ et $e_N = e_H = e$). On pourra aussi écrire $g_1 g_2$ au lieu de $g_1 * g_2$ pour tout $(g_1, g_2) \in G^2$. Supposons de plus que :

- N est distingué dans G, c'est-à-dire, pour tous $g \in G$ et $n \in N$, $gng^{-1} \in N$.
- $N \cap H = \{e_G\}$
- $G = NH$, c'est-à-dire $G = \{nh \,|\, (n, h) \in N \times H\}$.

1) a) Montrer que, pour tout $h \in H$, $i_h : n \longmapsto hnh^{-1}$ est un automorphisme de N.
   b) Montrer que $i : h \longmapsto i_h$ est un morphisme de H dans $\mathrm{Aut}(N)$.

2) Montrer $(N \times H, \rtimes_i)$ et $(G, *)$ sont isomorphes (via l'isomorphisme $\psi : (n, h) \longmapsto n * h$).

1. Cela veut dire que, pour tout $h \in H$, $\varphi(h)$ est un automorphisme de N. Ainsi, pour tout $n \in N$, $\varphi(h)(n)$ est l'image de l'élément n par l'automorphisme de $\varphi(h)$.

Partie C : Exemple du groupe diédral

Soit $p \in \mathbb{N}\backslash\{0;1;2\}$. On rappelle que $\mathbb{U}_p$ désigne le groupe des racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité et que, en notant $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{p}}$, $\mathbb{U}_p = \{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{p-1}\}$.

1) On introduit les applications $R : z \longmapsto \omega z$ et $S : z \longmapsto \overline{z}$ qui vont de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
   a) Décrire géométriquement S et R^k pour tout $k \in [\![0\,;p-1]\!]$.
   b) Vérifier que $S \circ R^k = R^{p-k} \circ S$ pour tout $k \in [\![0\,;p-1]\!]$.
   c) En déduire que, pour tout $k \in [\![0\,;p-1]\!]$, $(R^k \circ S)^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$.
   d) Montrer que $D_{2p} = \{\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}, R, R^2, \ldots, R^{p-1}, S, R\circ S, R^2 \circ S, \ldots, R^{p-1}\circ S\}$ est un groupe non abélien.

   Le groupe D_{2p} est appelé le groupe diédral d'ordre $2p$. Il s'agit (on l'admet) du groupe des rotations $(\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}, R, R^2, \ldots, R^{p-1})$ et des symétries axiales $(S, R\circ S, \ldots, R^{p-1}\circ S)$ qui préservent le polygone à p côtés formé par les points d'affixes dans $\mathbb{U}_p$.

   e) Décrire géométrique D_6 (avec des dessins) et dresser la table de loi de D_6.

2) Montrer que

$$\sigma : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{U}_p & \longrightarrow & \mathbb{U}_p \\ \omega^k & \longmapsto & \omega^{-k} \end{array} \right.$$

   est bien une application de $\mathbb{U}_p$ dans lui-même et qu'il s'agit d'un automorphisme de groupes.

3) Considérons f l'application de $\mathbb{U}_2$ dans $\mathrm{Aut}(U_p)$ définie par $f(1) = \mathrm{Id}_{U_p}$ et $f(-1) = \sigma$. Vérifier que f est un morphisme de groupe.

On note G_{2p} le produit semi-direct $(\mathbb{U}_p \times \mathbb{U}_2, \rtimes_f)$.

4) a) Notons $e = (1,1)$, $r = (\omega, 1)$ et $s = (1,-1)$. Ce sont des éléments de G_{2p}. Montrer[1] que $r^p = e$, $s^2 = e$, $rsr = s$.
   b) En déduire que $sr^k = r^{p-k}s$ pour tous, $k \in [\![0\,;p-1]\!]$.
   c) Montrer que, pour tous, $(k,\ell) \in [\![0\,;p-1]\!]^2$ et $(i,j) \in [\![0\,;1]\!]^2$, si $r^k s^i = r^\ell s^j$, alors $k = \ell$ et $i = j$.

On en déduit que $e, r, r^2, \ldots, r^{p-1}, s, rs, r^2s, \ldots, r^{p-1}s$ sont des éléments distincts de G_{2n} et donc, par égalité des cardinaux,

$$G_{2p} = \{e, r, r^2, \ldots, r^{p-1}, s, rs, r^2s, \ldots, r^{p-1}s\}.$$

Considérons l'application g qui va de D_{2p} dans G_{2p} tel que, pour tout $(k,j) \in [\![0\,;p-1]\!] \times \{0;1\}$, $g(R^k \circ S^j) = r^k s^j$. Il découle des questions 4c et 1b (on ne demande pas de détailler ce point) que g est un isomorphisme de groupes. Ainsi G_{2p} et D_{2p} sont isomorphes

5) Est-ce que G_{2p} et D_{2p} sont isomorphes à $\mathbb{U}_{2p}$?

1. Ici les produits s'entendent au sens de la loi semi-directe, c'est-à-dire r^p désigne $\underbrace{r \rtimes_f \cdots \rtimes_f r}_{p \text{ fois}}$, s^2 désigne $s \rtimes_f s$, etc.