Devoir maison n° 1

À rendre le lundi 9 septembre 2024

*Ce devoir est **individuel** et **obligatoire**. Si vous n'arrivez pas à traiter une question, demandez de l'aide à vos camarades ou à moi même et, si vous n'y arrivez vraiment pas, je préfère que vous ne traitiez pas la question plutôt que de la recopier sur quelqu'un d'autre.*

Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge à gauche, écrivez à l'encre bleue ou noire et encadrez ou soulignez les résultats principaux.

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. Tout résultat doit être justifié. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez.

Exercice 1 : Colles quantifiées

On note E l'ensemble des élèves de la classe de MPSI 2 du lycée Condorcet et C l'ensemble des colleurs de Mathématiques. Pour tous $e \in E, c \in C$ et $n \in [\![1\,;30]\!]$, l'assertion $A(e,c,n)$ signifie que l'élève e passe en colle avec le colleur c en semaine n.

Par exemple, l'assertion « chaque semaine, aucun élève n'a colle avec deux colleurs (de Maths) différents » s'écrit, en langage quantifié, de la façon suivante :

$$\forall e \in E, \quad \forall n \in [\![1\,;32]\!], \quad \exists! c \in C, A(e,c,n)$$

et l'assertion « il existe des élèves qui n'ont pas colle avec M. Gorny la première semaine » s'écrit :

$$\exists e \in E, \quad \mathrm{non}\,(A(e, \textit{Gorny}, 1))$$

Quantifier les assertions suivantes :

1) La première semaine, tous les élèves n'ont pas colle de maths.
2) Personne n'a colle deux semaines de suite avec le même colleur.
3) Il y aura une semaine sans colle.
4) Ceux qui ont M. Gorny en première semaine l'auront en semaine 8 et pas avant.
5) Un élève n'a jamais colle, ou un colleur n'a jamais d'élèves en face de lui.

Exercice 2 : Équation de Pell-Fermat

1) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple d'entiers naturels (a_n, b_n) tel que $a_n > 0$ et $(3+2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(3-2\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$ (où a_n et b_n désignent les mêmes entiers qu'à la question précédente).
3) Montrer qu'il existe une infinité de couple d'entiers naturels (x, y) tels que $x^2 - 2y^2 = 1$.

Exercice 3 : Une petite équation fonctionnelle

En raisonnant par analyse synthèse, déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y) - f(x-y) = xy.$$