Chapitre 5

Trigonométrie

L'objectif de ce chapitre est de définir le notions de sinus et cosinus d'un réel. Nous allons d'abord en étudier les propriétés géométriques avant de les voir comme des fonctions et de les étudier.

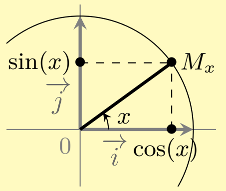
On se place dans ce chapitre dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On se contentera parfois de définitions intuitives, ou de considérations géométriques pour démontrer certains résultats.

Certaines définitions rigoureuses sont hors de notre portée (par exemple : qu'est-ce qu'un angle ? qu'est-ce parcourir une longueur le long d'un cercle ?)

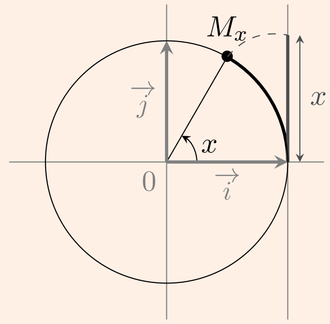
I Sinus et cosinus d'un réel

1) Définition

On parle de distance au sens algébrique du terme : si $x < 0$, on parcourt le cercle dans le sens anti-trigonométrique (i.e le sens des aiguilles d'une montre) sur une distance $-x$.



Définition (cercle trigonométrique). *Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1. À tout réel x, on associe un point M_x du cercle trigonométrique en parcourant le cercle sur une distance x dans le sens trigonométrique (i.e le sens inverse des aiguilles d'une montre) à partir du point de coordonnées $(1, 0)$. Le réel x est alors appelé mesure (en radian) de l'angle orienté $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM_x})$.*



Définition (cosinus et sinus). *Soit $x \in \mathbb{R}$.*

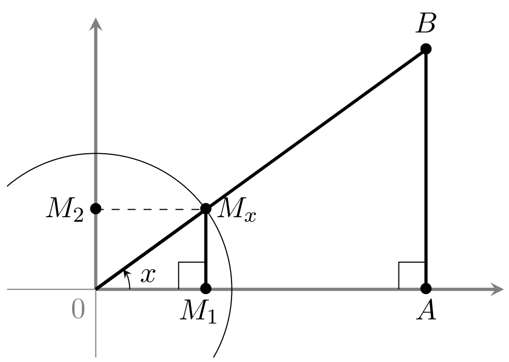
- *L'abscisse du point M_x est appelée cosinus de x et notée $\cos(x)$.*
- *L'ordonnée du point M_x est appelée sinus de x et notée $\sin(x)$.*

Remarque : Cette définition généralise celle vue au collège. Plus précisément, si $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et si on se donne un triangle rectangle dont l'un des angles est égal à x, alors on a encore

$$\cos(x) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}.$$

On peut travailler sans perte de généralité avec un triangle rectangle dont l'angle valant x est en O, un triangle rectangle quelconque (avec un angle valant x) se ramène à ce cas de figure par translation, rotation ou symétrie, ce qui ne change pas les longueurs.

Soit en effet OAB un triangle rectangle en A et d'angle $\widehat{AOB}$ égal à x :



Les droites (AB) et (M_1M_x) étant parallèles (car toutes les deux perpendiculaires à l'axe des abscisses) et les points O, M_1, A et O, M_2, B alignés dans cet ordre, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{OM_1}{OA} = \frac{OM_x}{OB}$$

et puisque $OM_1 = \cos(x)$ et $OM_x = 1$, on obtient $\cos(x) = \dfrac{OA}{OB}$ ce qui est le résultat voulu. C'est le même raisonnement pour le sinus.

2) Premières propriétés

Proposition (identité fondamentale). *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.*

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate du fait que, si un point du plan de coordonnées (a, b) est sur le cercle centré en l'origine et de rayon 1, alors $a^2 + b^2 = 1$.□

On admet que $\pi \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Définition. *On note π la moitié du périmètre du cercle trigonométrique.*

Convertissons radians en degrés :

$$\pi/6 = 30^\circ$$
$$\pi/4 = 45^\circ$$
$$\pi/3 = 60^\circ$$
$$\pi/2 = 90^\circ$$
$$\pi = 180^\circ$$
$$2\pi = 360^\circ$$

Plus généralement un angle $x \in [0\,;2\pi]$ en radian est égal à $\dfrac{180x}{\pi}$ degrés.

Proposition (valeurs remarquables).

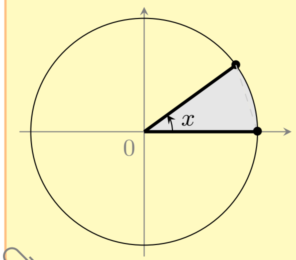
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

DÉMONSTRATION.

- Si $x = 0$, alors le point M_x est celui de coordonnées $(1, 0)$ si bien que $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$.
- Si $x = \pi$, alors le point M_x est celui de coordonnées $(-1, 0)$ puisque, par définition de π, on a parcouru la moitié du cercle. Ainsi $\cos(\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = 0$.
- Si $x = \frac{\pi}{2}$, alors le point M_x est celui de coordonnées $(0, 1)$ puisque, par définition de π, on a parcouru un quart du cercle. Ainsi $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Les autres valeurs remarquables seront démontrées dans le paragraphe I.4 avec les formules de trigonométrie que nous allons établir. □

L'aire est proportionnelle à l'angle (penser à une part de tarte), et un angle de 2π donne une aire de πr^2.



On admet le résultat suivant (on reparlera d'aire dans les chapitres 10 et 24).

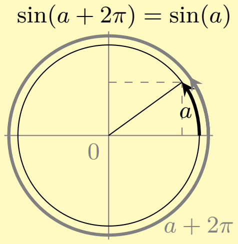
Proposition. *Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Le périmètre d'un cercle de rayon r est égal à $2\pi r$ et l'aire d'un disque de rayon r est égal à πr^2.*

Une simple règle de proportionnalité donne le résultat suivant :

Proposition. *Soient $x \in [0\,;2\pi]$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.*

- *La longueur d'un arc de cercle de rayon r délimité par un angle égal à x vaut xr.*
- *L'aire d'une portion de disque de rayon r d'angle x est $\dfrac{xr^2}{2}$.*

Tour complet
$$\cos(a + 2\pi) = \cos(a)$$
$$\sin(a + 2\pi) = \sin(a)$$



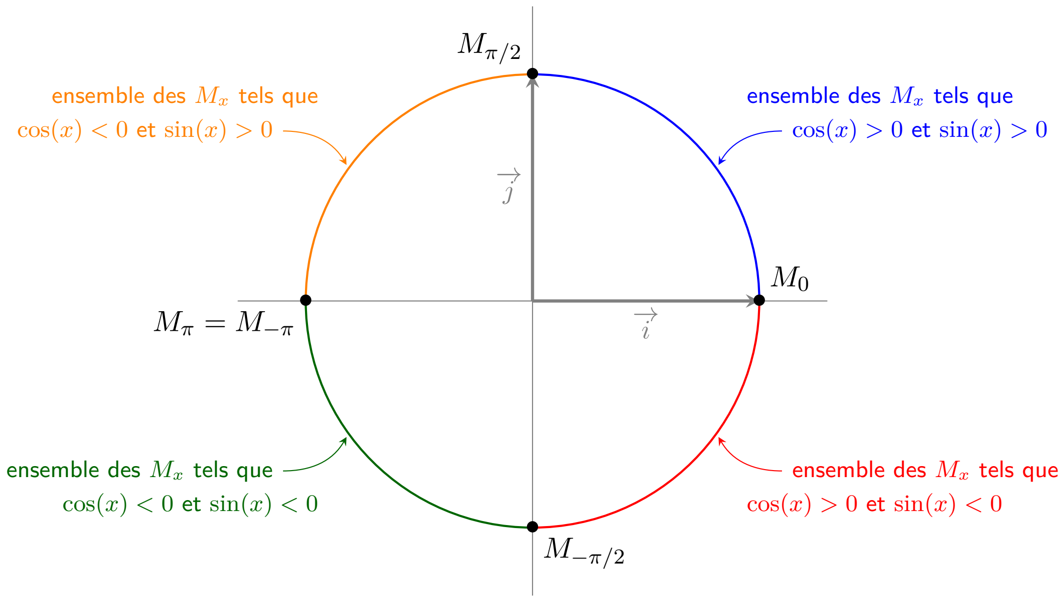
Puisque la longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π, lorsqu'on ajoute ou enlève 2π (ou $2n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}$), on fait un tour complet (ou plusieurs) donc le point correspondant sur le cercle est le même :

Proposition. *Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$,*

$$\cos(a + 2n\pi) = \cos(a) \qquad \text{et} \qquad \sin(a + 2n\pi) = \sin(a).$$

Exemple : *On a* $\cos\left(\dfrac{13\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + 4\pi\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$.

3) Signe d'un sinus, d'un cosinus



On en déduit le signe du cosinus et du sinus d'un angle de $[-\pi\,;\pi]$:

Proposition (signe du cosinus et du sinus d'un angle de $[-\pi\,;\pi]$).

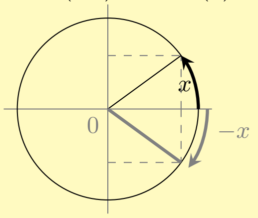
- *Si* $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(x) > 0$.
- *Si* $x \in [-\pi\,;\pi] \setminus \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x) < 0$.
- *Si* $x \in \{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\}$, $\cos(x) = 0$.
- *Si* $x \in]0\,;\pi[$, $\sin(x) > 0$.
- *Si* $x \in]-\pi\,;0[$, $\sin(x) < 0$.
- *Si* $x \in \{-\pi;0;\pi\}$, $\sin(x) = 0$.

On obtient ensuite le sinus et le cosinus d'un angle quelconque en utilisant la 2π-périodicité. On en reparle dans le paragraphe II.1.a.

4) Formules de trigonométrie

Proposition. *Pour tout* $a \in \mathbb{R}$, *on a* $\cos(-a) = \cos(a)$ *et* $\sin(-a) = -\sin(a)$.

Angles opposés
$\cos(-a) = \cos(a)$
$\sin(-a) = -\sin(a)$



Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le point M_{-x} est obtenu en parcourant le cercle en sens inverse par rapport au sens choisi pour M_x. En particulier, M_{-x} est le symétrique de M_x par rapport à l'axe des abscisses : il en découle que ces deux points ont même abscisse mais des ordonnées opposées. $\square$

Proposition (formules d'addition). *Pour tout* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),\\
\cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b),\\
\sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b),\\
\sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b).
\end{aligned}$$

Il suffit de retenir les formules de $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$. Moyen mnémotechnique :

cocosisi sicocosi

Les deux autres en découlent en se rappelant que $\cos(-b) = \cos(b)$ et $\sin(-b) = -\sin(b)$.

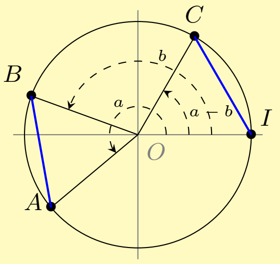
Démonstration. Soient a et b deux réels.

- Commençons par montrer la deuxième formule de la liste : Déjà, si $a-b$ est un multiple de 2π, alors

$$\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) = \cos^2(a) + \sin^2(a) = 1 = \cos(0) = \cos(a-b).$$

Supposons que $a-b$ n'est pas un multiple de 2π et considérons les points A, B et C de coordonnées $(\cos(a),\sin(a))$, $(\cos(b),\sin(b))$ et $(\cos(a-b),\sin(a-b))$. Notons aussi I le point de coordonnées $(1,0)$. Les angles $\widehat{IOC}$ et $\widehat{AOB}$ sont égaux (à $b-a$) si bien que les triangles IOC et AOB sont isométriques (car ils possèdent un angle

L'hypothèse que $a-b$ n'est pas un multiple de 2π sert simplement à ce que les points I et C et les points A et B ne soient pas confondus (et donc à ce que les triangles IOC et AOB soient vraiment des triangles).



de même mesure compris entre deux côtés homologues de mêmes longueurs – ici le rayon du cercle). On en déduit que les longueurs AB et IC sont égales. Leurs carrés aussi par conséquent. Or

⋆ Le carré de la longueur AB est

$$\begin{aligned}
&(\cos(b)-\cos(a))^2+(\sin(b)-\sin(a))^2\\
&\quad=\cos^2(b)-2\cos(a)\cos(b)+\cos^2(a)+\sin^2(b)-2\sin(a)\sin(b)+\sin^2(a)\\
&\quad=2\big(1-\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)\big),
\end{aligned}$$

en utilisant l'identité fondamentale deux fois.

⋆ Le carré de la longueur IC est

$$\begin{aligned}
(\cos(a-b)-1)^2+(\sin(a-b)-0)^2&\\
&=\cos^2(a-b)-2\cos(a-b)+1+\sin^2(a-b)\\
&=2\big(1-\cos(a-b)\big).
\end{aligned}$$

Ainsi $2\big(1-\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)\big)=2\big(1-\cos(a-b)\big)$, par identité fondamentale. On en déduit que $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$.

- En appliquant la formule précédente avec $-b$ au lieu de b (possible car elle est valable pour tous a et b réels), on obtient :

$$\cos(a+b)=\cos(a-(-b))=\cos(a)\cos(-b)+\sin(a)\sin(-b).$$

Puisque $\cos(-b)=\cos(b)$ et $\sin(-b)=-\sin(b)$, on obtient bien que $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$.

- Pour la troisième formule, il faut procéder par étapes :

Notons au passage que l'on vient de montrer que, pour tout réel a,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\sin(a),$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos(a).$$

⋆ En appliquant la formule $\cos(a-b)$ avec $\frac{\pi}{2}$ et a au lieu de a et b (possible car elle est valable pour tous a et b réels), il vient

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(a)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(a)=0+\sin(a)$$

donc $\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\sin(a)$.

⋆ En remplaçant a par $\frac{\pi}{2}-a$ dans cette toute dernière formule, il vient que : $\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos(a)$.

⋆ Puisque cette dernière formule est valable pour tout a réel, on a aussi $\sin(a+b)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(a+b)\right)$ et donc, en appliquant la formule de $\cos(a-b)$ avec $\frac{\pi}{2}-a$ au lieu de a, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sin(a+b)&=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-b\right)\\
&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos(b)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin(b)\\
&=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b).
\end{aligned}$$

- Enfin, en appliquant cette toute dernière formule avec $-b$ au lieu de b, on obtient :

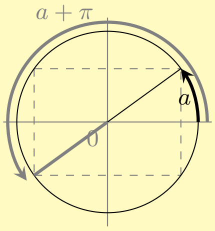
$$\sin(a-b)=\sin(a)\cos(-b)+\cos(a)\sin(-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b).\qquad\square$$

Exemple :

Ces formules se « voient » bien géométriquement :

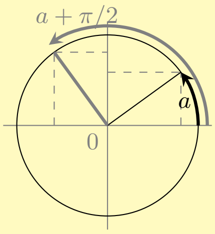
Demi-tour

$\cos(a+\pi) = -\cos(a)$
$\sin(a+\pi) = -\sin(a)$



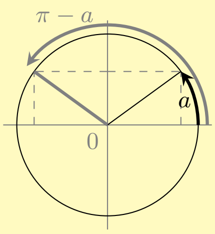
Quart de tour

$\cos(a+\pi/2) = -\sin(a)$
$\sin(a+\pi/2) = \cos(a)$



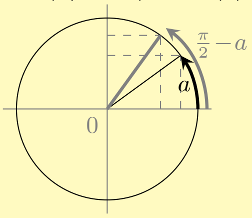
Angles supplémentaires

$\cos(\pi-a) = -\cos(a)$
$\sin(\pi-a) = \sin(a)$



Angles complémentaires

$\cos(\pi/2-a) = \sin(a)$
$\sin(\pi/2-a) = \cos(a)$



Proposition (formules de décalage). *Pour tout* $a \in \mathbb{R}$,

- $\cos(a+\pi) = -\cos(a)$,
- $\sin(a+\pi) = -\sin(a)$,
- $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\cos(a+n\pi) = (-1)^n \cos(a)$,
- $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\sin(a+n\pi) = (-1)^n \sin(a)$,
- $\cos(\pi-a) = -\cos(a)$,
- $\sin(\pi-a) = \sin(a)$,
- $\cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(a)$,
- $\sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(a)$,
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \sin(a)$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \cos(a)$.

Démonstration. Les deux dernières formules ont déjà été montrées dans la preuve des formules d'addition (elles nous ont permis de montrer les formule d'addition du sinus à partir de celles du cosinus). Toutes les autres formules sont des conséquences des formules d'addition en utilisant le fait que $\cos(\pi) = -1$, $\sin(\pi) = 0$, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ et que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

- si n est pair, $\cos(n\pi) = \cos(0) = 1$ et $\sin(n\pi) = \sin(0) = 0$.
- si n est impair, $\cos(n\pi) = \cos(-\pi+(n+1)\pi) = \cos(-\pi) = -1$. □

Il n'est pas nécessaire de retenir par cœur toutes les formules suivantes à condition de savoir les retrouver rapidement à l'aide des formules d'addition et de l'identité fondamentale (ou à l'aide des formules d'Euler et de Moivre que nous verrons dans le chapitre 6) :

Proposition (formules de duplication). *Pour tout* $a \in \mathbb{R}$,

- $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$
- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$.

Démonstration. On prend juste $a = b$ dans les formules d'addition du sinus et du cosinus puis on utilise l'identité fondamentale. □

Proposition (formules de l'angle triple). *Pour tout* $a \in \mathbb{R}$,

$$\sin(3a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a) \qquad \textit{et} \qquad \cos(3a) = -3\cos(a) + 4\cos^3(a).$$

Démonstration.

□

Proposition (formules de linéarisation). *Pour tout* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

- $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)$,
- $\sin(a)\sin(b) = -\dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b)-\cos(a-b)\right)$,
- $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)$,
- $\cos^2(a) = \dfrac{1}{2}(1+\cos(2a))$ *et* $\sin^2(a) = \dfrac{1}{2}(1-\cos(2a))$.

Démonstration. Pour les trois premières, il suffit d'utiliser les formules d'addition en partant du membre de droite. Pour les deux dernières, il suffit de réécrire les formules de duplication du cosinus. □

Proposition (formules de factorisation). *Pour tout* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

- $\cos(a)+\cos(b) = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$,
- $\cos(a)-\cos(b) = -2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$,
- $\sin(a)+\sin(b) = 2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$,
- $\sin(a)-\sin(b) = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que

$$a = \frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2},$$

puis d'utiliser les formules d'addition ou bien les formules de linéarisation. □

Maintenant que l'on dispose de toutes ces formules, revenons aux valeurs usuelles de sinus et cosinus (admises temporairement dans le paragraphe I.2) :

- En prenant $a = \frac{\pi}{4}$, la formule de duplication donne

$$0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos(2a) = 1-2\cos^2(a)$$

  donc $\cos^2(a) = \dfrac{1}{2}$ et donc $\sin^2(a) = \dfrac{1}{2}$. Puisque $\cos(a) \geqslant 0$ et $\sin(a) \geqslant 0$ (ces valeurs se trouvant dans une zone du cercle où les points sont de coordonnées toutes positives), on trouve que $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

- En prenant $a = \frac{\pi}{3}$, la formule de l'angle triple donne

$$0 = \sin(\pi) = \sin(3a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a).$$

  donc $3\sin(a) = 4\sin^3(a)$. Puisque $\sin(a) \neq 0$ (sinon a serait un multiple de π), il vient que $\sin^2(a) = \dfrac{3}{4}$ et donc $\cos^2(a) = \dfrac{1}{4}$ par identité fondamentale. Puisque $\cos(a) \geqslant 0$ et $\sin(a) \geqslant 0$ (ces valeurs se trouvant dans une zone du cercle où les points sont de coordonnées toutes positives), on trouve que $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

On peut aussi utiliser la formule de l'angle triple du cosinus et on obtient alors que $\cos(a)$ est racine de l'application polynomiale

$$P : x \mapsto 4x^3 - 3x + 1$$

dont -1 est racine évidente. En factorisant, on obtient que

$$P : x \mapsto (x+1)(2x-1)^2.$$

Ainsi $\cos(a) = \frac{1}{2}$ (puisque $\cos(a) \neq 1$, a n'étant pas un multiple de 2π).

- En prenant $a = \dfrac{\pi}{6}$, la formule de décalage donne

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

  et

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

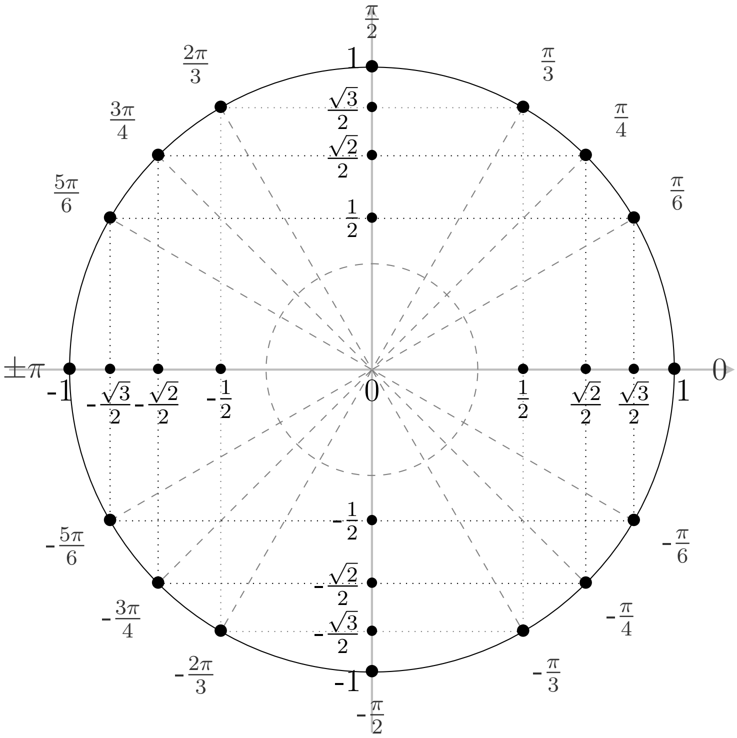
On peut trouver plein d'autres valeurs remarquables : puisque $\dfrac{5\pi}{6} = \pi - \dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{3\pi}{4} = \pi - \dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{2\pi}{3} = \pi - \dfrac{\pi}{3}$, les formules des angles supplémentaires donnent

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}, \quad \sin\left(\frac{3\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Et on obtient aussi les valeurs des sinus et cosinus des opposés de ces angles en utilisant le fait que $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Résumons cela graphiquement :

Sur le dessin ci-dessous, on a identifié un réel x avec son point correspondant M_x sur le cercle trigonométrique pour simplifier les notations.



5) Congruences de réels et équations trigonométriques

a) Congruences de réels

Définition. *Soient a, b et m des réels. On dit que a est congru à b modulo m si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + km$. On note alors $a \equiv b\,[m]$ ou $a \equiv b \pmod{m}$.*

Exemples :

Proposition. *Soient a, b, c et m des réels. Nous avons :*

1. ***Symétrie.*** *$a \equiv b\,[m]$ si et seulement si $b \equiv a\,[m]$.*
2. ***Somme dans une congruence.*** *Si $a \equiv b\,[m]$, alors $(a + c) \equiv (b + c)\,[m]$.*
3. ***Produit dans une congruence.*** *Si $a \equiv b\,[m]$, alors $ac \equiv bc\,[mc]$.*

Démonstration.

Il découle du dernier point que, si $c \neq 0$ et $a \equiv b\,[m]$, alors $\frac{a}{c} \equiv \frac{b}{c}\left[\frac{m}{c}\right]$.

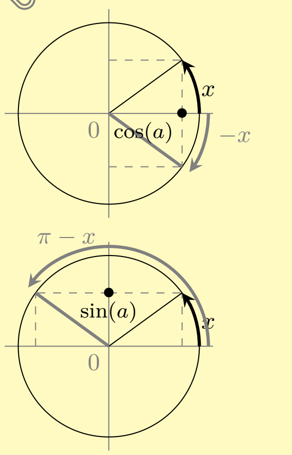
□

Définition. *Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$, on note $a + m\mathbb{Z}$ l'ensemble des réels congrus à a modulo m. Autrement dit*

$$a + m\mathbb{Z} = \{a + km \,|\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

b) Équations trigonométriques

La proposition suivante découle de considérations géométriques :



Proposition. *Soient a et x des réels. On a*

$$\begin{array}{ccccc} \cos(x) = \cos(a) & \iff & x \equiv a\,[2\pi] & \text{ou} & x \equiv -a\,[2\pi] \\ \sin(x) = \sin(a) & \iff & x \equiv a\,[2\pi] & \text{ou} & x \equiv \pi - a\,[2\pi] \end{array}$$

Exemples :

- *Résoudre $4\sin^2(2x) = 3$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.*

  ⋆ *<u>Méthode 1.</u>*

On n'oublie pas de diviser par 2 y compris dans les crochets.

  ⋆ *<u>Méthode 2.</u>*

Il s'agit bien sûr des mêmes solutions que dans la méthode 1. En effet $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}$.

- *Résoudre* $\cos(x)-\sin(x)=\sqrt{\frac{3}{2}}$ *d'inconnue* $x\in\mathbb{R}$.

Quelques cas particuliers :

Dessiner un cercle trigonométrique permet aussi facilement de les retrouver.

Proposition. *Pour tout* $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos(x)=1 &\iff x\equiv 0\,[2\pi]\\
\cos(x)=0 &\iff x\equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]\\
\cos(x)=-1 &\iff x\equiv \pi\,[2\pi]\\
\sin(x)=1 &\iff x\equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]\\
\sin(x)=0 &\iff x\equiv 0\,[\pi]\\
\sin(x)=-1 &\iff x\equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]
\end{aligned}$$

Proposition. *Pour tout* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$,

$$\cos(a)=\cos(b) \quad \textit{et} \quad \sin(a)=\sin(b) \qquad \iff \qquad a\equiv b\,[2\pi]$$

6) Tangente d'un réel

a) Définition et interprétation géométrique

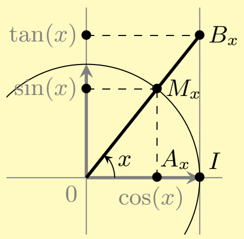
Il découle du paragraphe I.3 et de la 2π-périodicité de $\cos$ que :

$$\cos(x) = 0 \iff x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \iff x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$

Définition. *Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, on définit la tangente de x le réel*

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Interprétation géométrique : $\tan(x)$ est l'ordonnée du point d'intersection B_x de la droite $(0M_x)$ avec la droite d'abscisse 1. En effet, notons $I(1,0)$, $A_x(\cos(x),0)$ et $B_x(1,t_x)$.



Si $x \equiv 0\,[\pi]$, $t_x = 0 = \tan(x)$. Sinon, puisque les droites (A_xM_x) et (IB_x) sont parallèles, le théorème de Thalès assure que

$$\frac{OI}{OA_x} = \frac{IB_x}{A_xM_x}$$

et donc

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{t_x}{\sin(x)}$$

et donc $t_x = \tan(x)$.

On obtient ensuite la tangente d'un angle quelconque en utilisant la π-périodicité. On en reparle dans le paragraphe II.2.a.

b) Premières propriétés

Il découle des propriétés de sinus et cosinus que :

Proposition. *Pour tous $x \in \mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\tan(x + k\pi) = \tan(x)$.*

Proposition (valeurs remarquables).

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

Proposition (signe de la tangente d'un angle de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$).

- *Si $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, alors $\tan(x) > 0$.*
- *Si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;0\right[$, alors $\tan(x) < 0$.*

c) Formules de trigonométrie

Proposition (formules de décalage). *Pour tout $a \in \mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$,*

- $\tan(-a) = -\tan(a)$,
- $\tan(\pi - a) = -\tan(a)$.

Démonstration. Découle des formules de décalage de cosinus et de sinus. $\square$

Proposition. *Pour tout $a \in \mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, $1 + \tan^2(a) = \dfrac{1}{\cos^2(a)}$.*

Démonstration. On a $1 + \tan^2(a) = \dfrac{\cos^2(a) + \sin^2(a)}{\cos^2(a)} = \dfrac{1}{\cos^2(a)}$ par identité fondamentale. $\square$

Proposition (formules d'addition). *Soient a et b des réels n'appartenant pas à $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. On a*

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} \quad \text{et} \quad \tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

dès que $a + b$ et $a - b$ n'appartiennent pas à $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ respectivement.

Démonstration. On a

$$1 - \tan(a)\tan(b) = \frac{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)} = \frac{\cos(a+b)}{\cos(a)\cos(b)}.$$

Ce terme est non nul car $a + b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ et donc $\cos(a+b) \neq 0$. On peut donc diviser :

$$\begin{aligned}\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} &= \frac{\cos(a)\cos(b)}{\cos(a+b)}\left(\frac{\sin(a)}{\cos(a)} + \frac{\sin(b)}{\cos(b)}\right)\\ &= \frac{\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)}{\cos(a+b)}\\ &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}\\ &= \tan(a+b).\end{aligned}$$

La deuxième formule se montre de manière analogue. □

On en déduit :

Proposition (formules de duplication). *Soit a un réel tel que a et $2a$ n'appartiennent pas à $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. Alors :*

$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}.$$

Ces formules seront utiles dans le chapitre 10.

Proposition. *Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ et $a \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Posons $t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$. Alors :*

$$\tan(a) = \frac{2t}{1-t^2}, \qquad \sin(a) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{et} \qquad \cos(a) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Démonstration.

□

II Fonctions circulaires (ou trigonométriques)

1) Fonctions sinus et cosinus

a) Premières propriétés

Il découle des arguments géométriques des paragraphes précédents que :

Proposition (symétrie). *Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont définies et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$. De plus $\cos$ est paire et $\sin$ est impaire sur $\mathbb{R}$.*

Proposition (minoration/majoration). *Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont majorées par 1 et minorées par -1 sur $\mathbb{R}$.*

DÉMONSTRATION. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin^2(x) \leqslant \cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$ donc $|\sin(x)| \leqslant 1$ et donc $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$. La preuve est la même pour le cosinus. □

Il découle du paragraphe I.3 et de la 2π-périodicité de $\sin$ et $\cos$ que :

Inutile de l'apprendre par cœur : un dessins et du bon sens devraient suffire.
⚠ Les quantificateurs d'existence ne sont pas optionnels...

Proposition. *Soit $x \in \mathbb{R}$. On a*

$\cos(x) > 0$	$\iff$	
$\cos(x) < 0$	$\iff$	
$\cos(x) \neq 0$	$\iff$	
$\cos(x) = 0$	$\iff$	
$\sin(x) > 0$	$\iff$	
$\sin(x) < 0$	$\iff$	
$\sin(x) \neq 0$	$\iff$	
$\sin(x) = 0$	$\iff$	

Rappelons que l'ensemble des réels congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo π se note aussi $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.

Rappelons que l'ensemble des réels congrus à 0 modulo π se note aussi $\pi\mathbb{Z}$.

Cette proposition peut se réécrire avec des unions. Par exemple :

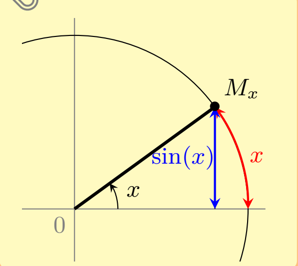
b) Régularité

Lemme. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leqslant |x|$.*

DÉMONSTRATION. Soit $x \in \mathbb{R}$. Procédons par disjonction de cas.

- Si $|x| \geqslant 1$, alors $|\sin(x)| \leqslant 1 \leqslant |x|$.
- Supposons que $x \in [0\,;1[$. Montrons l'inégalité avec un argument géométrique. Notons M le point de coordonnées $(\cos(x), \sin(x))$, qui se trouve donc sur le cercle trigonométrique. La distance parcourue sur le cercle trigonométrique à partir du point $(1,0)$ jusqu'au point M est égale à x par définition. Mais la distance perpendiculaire entre un point et une droite est la distance la plus courte entre ces deux objets. Puisque $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\sin(x) \leqslant x$ et donc $|\sin(x)| \leqslant |x|$.
- Supposons que $x \in \left]-1\,;0\right[$, alors $\sin(x) > 0$ et $-x \in \left]0\,;1\right[$ donc le point précédent et l'imparité de $\sin$ entraînent que

$$|\sin(x)| = -\sin(x) = \sin(-x) \leqslant -x = |x|.$$ □



Proposition. *Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont continues sur $\mathbb{R}$.*

On utilise la formule de trigonométrie

$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

DÉMONSTRATION. • Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\sin(x) - \sin(a)| = \left|2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| \leqslant 2\left|\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right|$$

Le lemme précédente entraîne alors que

$$|\sin(x) - \sin(a)| \leqslant 2\left|\frac{x-a}{2}\right| = |x-a|.$$

On fait tendre x vers a et le théorème d'encadrement entraîne que $|\sin(x) - \sin(a)| \xrightarrow[x \to a]{} 0$ et donc $\sin(x) \xrightarrow[x \to a]{} \sin(a)$. Autrement dit $\sin$ est continue en a.

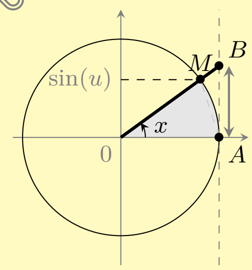
On utilise la formule de trigonométrie

$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

• Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\cos(x) - \cos(a)| = \left|-2\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| \leqslant 2\left|\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| \leqslant |x-a|$$

Comme dans le point précédent, on conclut que $|\cos(x) - \cos(a)| \xrightarrow[x \to a]{} 0$ et donc $\cos(x) \xrightarrow[x \to a]{} \cos(a)$. Autrement dit $\cos$ est continue en a. □



La longueur AB (indiquée par une flèche) est égale à $\tan(x)$.

Lemme. $\dfrac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1.$

DÉMONSTRATION. Montrons cette limite avec un argument géométrique. Soit $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$. L'aire de la portion de disque unité d'angle u (la zone grisée sur le dessin ci-contre) est égale à $\frac{x}{2}$ (rappelons que l'aire d'une portion de disque d'angle $\theta \in]0\,;2\pi[$ de rayon r est $\frac{\theta r^2}{2}$). Cette zone est incluse dans le triangle OBA donc a une aire inférieure, et contient le triangle OMA donc a une aire supérieure. En particulier,

$$\frac{1 \times \sin(x)}{2} \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \frac{1 \times \tan(x)}{2}.$$

Ainsi, en multipliant par 2, en divisant par $\sin(x) > 0$, puis en utilisant la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient :

$$\cos(x) \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant 1.$$

Par formule de duplication de $\cos$ et le premier lemme ci-dessus, on obtient

$$\cos(x) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \geqslant 1 - 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Ainsi

$$1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant 1.$$

Lorsque $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;0\right[$, $-x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et, puisque $(-x)^2 = x^2$ et $\dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{\sin(x)}{x}$ (car $\sin$ est impaire sur $\mathbb{R}$), l'inégalité ci-dessus est encore valide. On en déduit que

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;0\right[\cup \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[, \qquad 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant 1.$$

On fait tendre x vers 0 et alors le théorème d'encadrement entraîne que $\dfrac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$. □

Théorème. *Les fonctions* $\sin$ *et* $\cos$ *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$. *On a* $\sin' = \cos$ *et* $\cos' = -\sin$.

On utilise la formule de trigonométrie

$\sin(x) - \sin(y) =$
$2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

Démonstration. • Si $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} = \frac{2}{h}\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right) = \cos\left(a+\frac{h}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}.$$

Puisque $\cos$ est continue en a et que $a+\frac{h}{2} \xrightarrow[h\to 0]{} a$, on a $\cos\left(a+\frac{h}{2}\right) \xrightarrow[h\to 0]{} \cos(a)$. De plus le lemme précédent assure que $\dfrac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \xrightarrow[h\to 0]{} 1$. On en déduit que

$$\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \cos(a).$$

Ainsi $\sin$ est dérivable en a et $\sin'(a) = \cos(a)$.

On utilise la formule de trigonométrie

$\cos(x) - \cos(y) =$
$-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

• Si $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h} = -\frac{2}{h}\sin\left(a+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right) = -\sin\left(a+\frac{h}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}.$$

Puisque $\sin$ est continue en a et que $a+\frac{h}{2} \xrightarrow[h\to 0]{} a$, on a $\sin\left(a+\frac{h}{2}\right) \xrightarrow[h\to 0]{} \sin(a)$. De plus le lemme précédent assure que $\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \xrightarrow[h\to 0]{} 1$. On en déduit que

$$\frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} -\sin(a).$$

Ainsi $\cos$ est dérivable en a et $\cos'(a) = -\sin(a)$. $\square$

Corollaire. $\dfrac{1-\cos(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Démonstration. Comme $\cos$ est dérivable en 0, on a

$$\frac{1-\cos(x)}{x} = -\frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} -\cos'(0) = \sin(0) = 0.$$ $\square$

Théorème. *La fonction* $\cos$ *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \cos^{(n)} = \begin{cases} \cos & \text{si} \quad n \equiv 0\,[4]\,, \\ -\sin & \text{si} \quad n \equiv 1\,[4]\,, \\ -\cos & \text{si} \quad n \equiv 2\,[4]\,, \\ \sin & \text{si} \quad n \equiv 3\,[4]\,. \end{cases}$$

Démonstration. On montre par récurrence (laissée en exercice) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos$ est de classe $\mathscr{C}^{4n+3}$ et

$$\cos^{(4n)} = \cos, \quad \cos^{(4n+1)} = -\sin, \quad \cos^{(4n+2)} = -\cos, \quad \cos^{(4n+3)} = \sin\,.$$ $\square$

Théorème. *La fonction* $\sin$ *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sin^{(n)} = \begin{cases} \sin & \textit{si} \quad n \equiv 0\,[4]\,, \\ \cos & \textit{si} \quad n \equiv 1\,[4]\,, \\ -\sin & \textit{si} \quad n \equiv 2\,[4]\,, \\ -\cos & \textit{si} \quad n \equiv 3\,[4]\,. \end{cases}$$

Démonstration. On montre par récurrence (laissée en exercice) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin$ est de classe $\mathscr{C}^{4n+3}$ et

$$\sin^{(4n)} = \sin, \quad \sin^{(4n+1)} = \cos, \quad \sin^{(4n+2)} = -\sin, \quad \sin^{(4n+3)} = -\cos\,. \qquad \square$$

c) Variations et convexité

Proposition (variations).

- *Pour tout* $k \in \mathbb{Z}$, *la fonction* $\sin$ *est strictement croissante sur* $\left[-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\,;\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ *et strictement décroissante sur* $\left[\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\,;\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$.
- *Pour tout* $k \in \mathbb{Z}$, *la fonction* $\cos$ *est strictement croissante sur* $[(2k-1)\pi\,;2k\pi]$ *et strictement décroissante sur* $[2k\pi\,;(2k+1)\pi]$.

Démonstration. Découle du signe de $-\cos = \sin'$ et de $\sin = \cos'$. $\square$

Proposition (convexité/concavité).

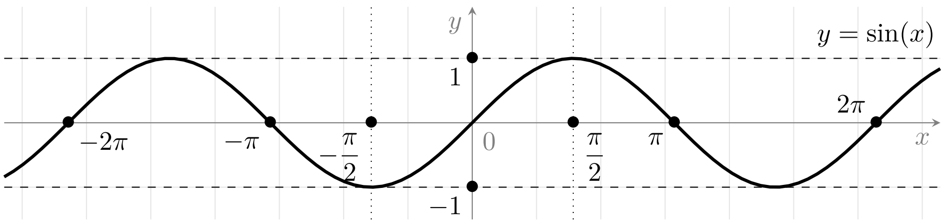
- *La fonction* $\sin$ *admet un point d'inflexion en* 0. *Plus précisément, elle est convexe sur* $[-\pi\,;0]$ *et concave sur* $[0\,;\pi]$.
- *La fonction* $\cos$ *est concave sur* $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Le fait que $|\sin(x)| \leqslant |x|$ a déjà été montré plus haut et a permis de montrer que $\sin$ est dérivable, etc. Et d'aboutir en bout de chaîne aux propriétés de convexité/concavité de $\sin$. Il peut donc paraître étonnant de présenter cette inégalité comme une conséquence de la convexité/concavité. Cependant, dans la pratique, c'est plutôt cette réponse qui est attendue pour la démontrer. En fait la construction de sinus et cosinus adoptée dans ce cours n'en est qu'une parmi tant d'autres (c'est la meilleure à ce stade de l'année). Nous aurions pu, par exemple, les définir avec des sommes de séries (cf. chapitre 27) et obtenir alors bien plus facilement toutes les formules.

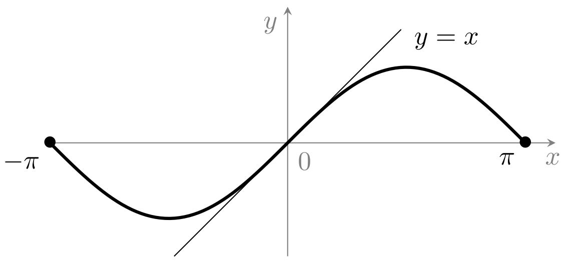
Remarque :

d) Représentations graphiques

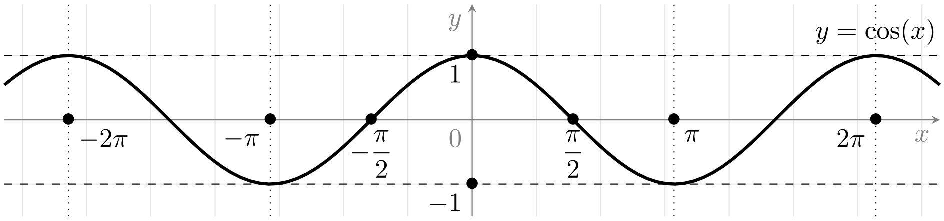
Ci-dessous le graphe du sinus :



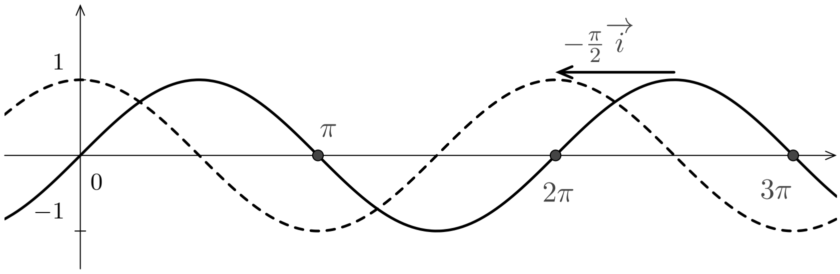
Pour mieux observer la convexité/concavité, on zoome sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ et on représente la droite d'équation $y = x$:



Ci-dessous le graphe du cosinus :



Enfin, ci-dessous, sur un même dessin, les graphes de ces deux fonctions (sinus en traits pleins, cosinus en pointillés) :



On remarque qu'elles ont le même graphe, décalé de $\frac{\pi}{2}$, ce qui est normal puisque, pour tout x, $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ et donc (cf. chapitre 4), le graphe du cosinus est « en avance » de $\frac{\pi}{2}$ par rapport au graphe du sinus.

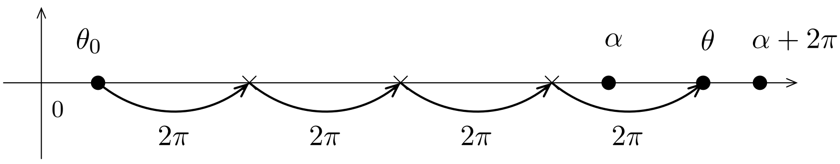
Il y a un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ entre le sinus et le cosinus.

e) Paramétrisation du cercle trigonométrique

Proposition. *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a^2 + b^2 = 1$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$. Plus précisément, sur tout intervalle semi-ouvert de longueur 2π (c'est-à-dire de la forme $[\alpha\,;\alpha + 2\pi[$ ou $]\alpha\,;\alpha + 2\pi]$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$), il existe un unique θ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$.*

Si on prend un intervalle ouvert, alors un tel θ n'existe pas forcément, et si on le prend fermé, il n'est plus forcément unique : par exemple, il n'existe pas de réel $\theta \in]-\pi\,;\pi[$ tel que $\sin(\theta) = 0$ et $\cos(\theta) = -1$, et sur $[-\pi\,;\pi]$, π et $-\pi$ conviennent.

Démonstration.



On peut aussi considérer pour k, la partie entière supérieure de $\dfrac{\alpha - \theta_0}{2\pi} + 1$ (c'est-à-dire le plus petit entier qui lui est supérieur ou égal).

□

Proposition. *Soient a et b deux réels. Alors il existe $(C, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ tels que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad a\cos(x) + b\sin(x) = C\cos(x - \varphi)$$

Lien avec la physique : une somme de deux signaux sinusoïdaux de période 2π est donc encore un signal sinusoïdal de période 2π : C est appelé amplitude du signal et φ le déphasage.

Démonstration.

Méthode de preuve à retenir pour trouver C et φ dans des cas particuliers de a et b. Mais on peut aussi évaluer en deux valeurs de x pour obtenir un système de deux équations dont C et φ sont les inconnues (possible puisque l'on sait qu'elles existent).

□

2) Fonction tangente

a) Premières propriétés

Il découle des propriétés du paragraphe I.6.c que :

Proposition. *La fonction $\tan$ est définie, impaire et π-périodique sur $\mathbb{R} \backslash \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.*

Ne pas confondre les points en lesquels la tangente est nulle et les points en lesquels la tangente n'est pas définie.

Proposition (signe). *Soit* $x \in \mathbb{R} \backslash \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. *On a*

$$\begin{array}{llll} \tan(x) > 0 & \iff & \exists k \in \mathbb{Z}, & x \in \left]k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[\\ \tan(x) < 0 & \iff & \exists k \in \mathbb{Z}, & x \in \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;k\pi\right[\\ \tan(x) \neq 0 & \iff & \exists k \in \mathbb{Z}, & x \in \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;k\pi\right[\cup \left]k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[\\ \tan(x) = 0 & \iff & \exists k \in \mathbb{Z}, & x \in k\pi \quad \iff \quad x \equiv 0[\pi] \end{array}$$

b) Régularité et limites

Comme $\tan(0) = 0$ et $\tan'(0) = 1$, on a

$$\frac{\tan(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1.$$

On avait déjà vu plus haut que

$$1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$

Proposition. *La fonction* $\tan$ *est dérivable (donc continue) sur* $\mathbb{R} \backslash \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. *Par ailleurs*

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$

Démonstration. Puisque $\cos$ est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \backslash \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ et puisque $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \backslash \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. De plus

$$\tan' = \frac{\sin'\cos - \sin\cos'}{\cos^2} = \frac{\sin^2+\cos^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}$$

mais aussi $= 1 + \tan^2$. □

Il n'y a pas de formule simple pour les dérivées successives de $\tan$ mais on verra dans le chapitre 22 que l'on peut tout de même obtenir une formule de récurrence.

Proposition. *La fonction* $\tan$ *de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R} \backslash \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $H(n)$: « $\tan$ est n fois dérivable sur $\mathbb{R} \backslash \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ ». Raisonnons par récurrence.

- **Initialisation.** On vient de montrer que $H(1)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $H(n)$ est vraie. Alors $\tan$ est n fois dérivable sur $\mathbb{R} \backslash \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ donc $\tan' = 1 + \tan^2$ aussi. On en déduit que $\tan$ est $n+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R} \backslash \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. Ainsi $H(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion.** Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H(n)$ est vraie.

On en déduit que $\tan$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \backslash \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. □

Proposition (limites en $\pm\frac{\pi}{2}$). $\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+} \tan(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \tan(x) = +\infty$.

Démonstration. Puisque $\sin$ est continue en $\pm\frac{\pi}{2}$, on a $\sin(x) \xrightarrow[x\to-\frac{\pi}{2}]{} \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $\sin(x) \xrightarrow[x\to-\frac{\pi}{2}]{} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. La fonction $\cos$ est strictement positive sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et, comme elle est continue et nulle en $\pm\frac{\pi}{2}$, $\cos(x) \xrightarrow[x\to(-\frac{\pi}{2})^+]{} 0^+$ et $\cos(x) \xrightarrow[x\to(\frac{\pi}{2})^-]{} 0^+$. D'où les deux limites de $\tan$ par quotient de limites. □

c) Variations et convexité

Mais $\tan$ n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}\backslash(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$!

Proposition (variations). *Pour tout* $k \in \mathbb{Z}$, *la fonction* $\tan$ *est strictement croissante sur* $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$.

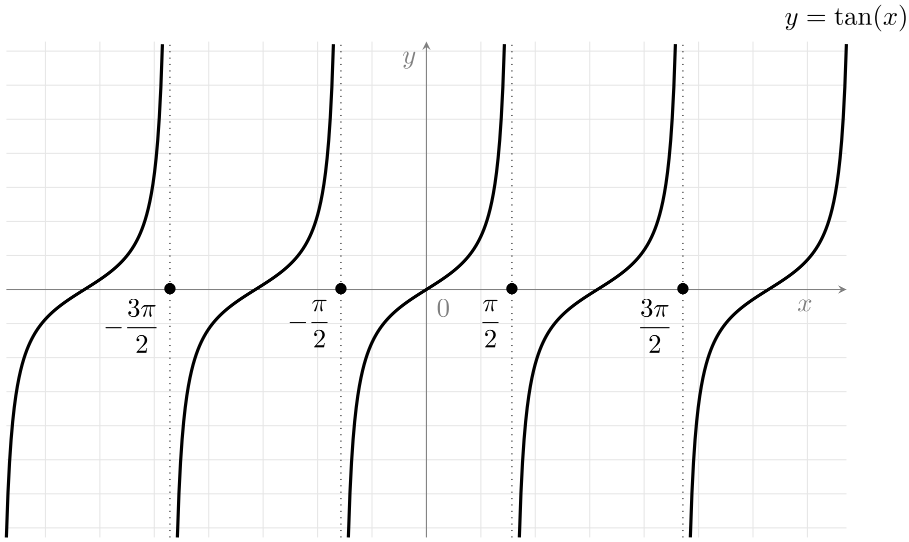
Démonstration. Puisque $\tan' = 1 + \tan^2 > 0$, $\tan$ est strictement croissante sur tout intervalle de son domaine de définition. □

Proposition (convexité/concavité). *La fonction* $\tan$ *admet un point d'inflexion en* 0. *Plus précisément, elle est convexe sur* $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ *et concave sur* $\left[-\frac{\pi}{2}\,;0\right]$.

Démonstration. La fonction $\tan$ est deux fois dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan' = 1+\tan^2$ donc
$$\tan'' = 0 + 2\tan'\tan = 2\tan(1+\tan^2).$$
Ainsi $\tan''$ a le même signe que $\tan$ donc s'annule et change de signe en 0 pour passer de négatif à positif. $\square$

Remarque :

d) Courbe représentative



III Fonctions circulaires réciproque

1) Fonction Arctangente

a) Définition et premières propriétés

Théorème (fonction Arctangente). *La fonction tangente est une bijection de* $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ *sur* $\mathbb{R}$. *Sa fonction réciproque est appelée Arctangente et notée* Arctan.

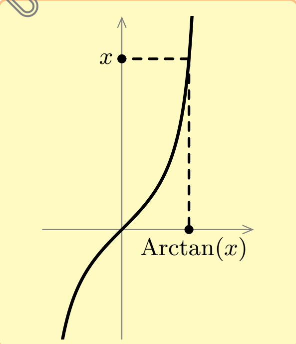
La fonction Arctan *est définie sur* $\mathbb{R}$. *Elle est impaire, continue, strictement croissante sur* $\mathbb{R}$,
$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Démonstration.

□

Proposition.

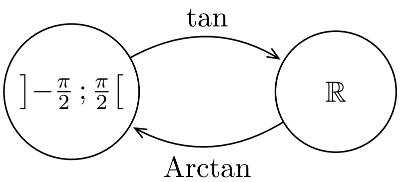
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\mathrm{Arctan}(x)) = x$.
- *Pour tout* $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\mathrm{Arctan}(\tan(x)) = x$.



Démonstration. Découle directement de la définition de Arctan comme réciproque de $\tan$ sur $]-\pi/2\,;\pi/2[$. □

Remarques :

- En d'autres termes, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Arctan}(x)$ est l'unique $y \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(y) = x$.
- De manière imagée (toujours avoir ce dessin en tête pour se souvenir du théorème ci-dessus) :

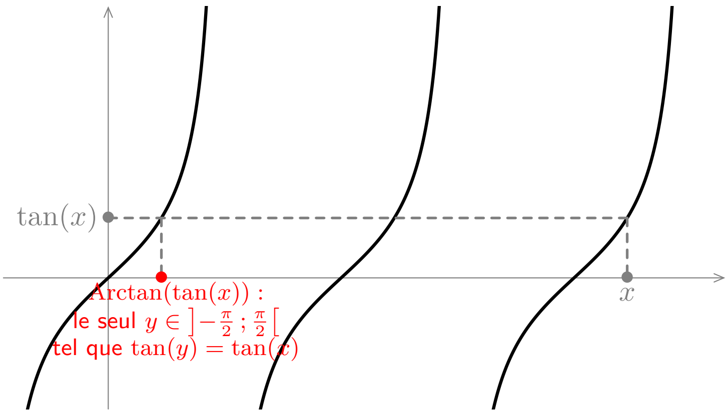


Moyens mnémotechniques :
• La tangente n'est pas définie sur $\mathbb{R}$.
• Arctan est à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

- La fonction tangente n'est pas injective sur $D_{\tan}$, et donc l'Arctangente n'est pas la réciproque de la fonction tangente : Arctan est la réciproque de $\tan\big|_{\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[}$ qui, elle, est injective, et même bijective de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

  On n'a pas toujours $\mathrm{Arctan}(\tan(x)) = x$!

  Par exemple, on a $\tan(\pi) = 0$ *donc* $\mathrm{Arctan}(\tan(\pi)) = \mathrm{Arctan}(0) = 0$ *(car* $\tan$ *est impaire). On n'a pas* $\mathrm{Arctan}(\tan(\pi)) = \pi$ *!*



- Une méthode simple (mais efficace !) pour montrer une égalité du type $\alpha = \mathrm{Arctan}(A)$ consiste à :
  - ⋆ montrer que $\tan(\alpha) = A$
  - ⋆ puis montrer que $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

  Par exemple

On généralisera cela en exercice.

En lisant le tableau des valeurs usuelles de $\tan$ dans l'autre sens, on obtient :

Et on obtient les valeurs négatives remarquables en utilisant l'imparité de Arctan.

Proposition (valeurs remarquables).

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\mathrm{Arctan}(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

b) Régularité et convexité

Proposition. *La fonction* Arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Démonstration.

□

Proposition. *La fonction* Arctan *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration. La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$. Ainsi Arctan' est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donc Arctan aussi. □

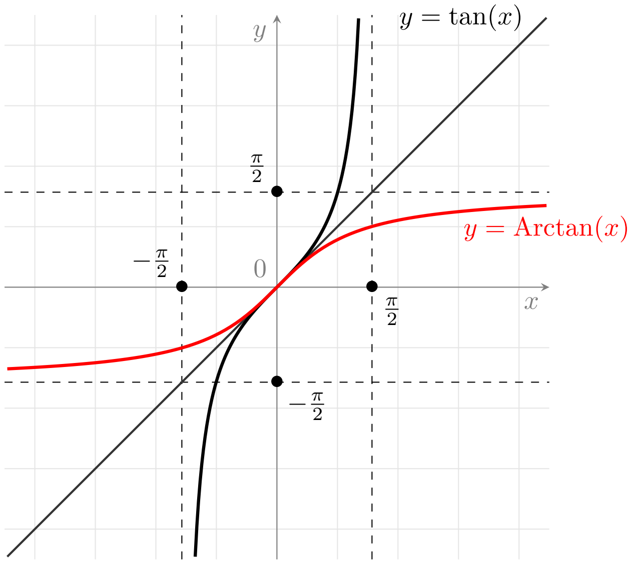
Proposition. *La fonction* Arctan *admet un point d'inflexion en* 0. *Plus précisément :* Arctan *est convexe sur* $\mathbb{R}_-$ *et concave sur* $\mathbb{R}_+$.

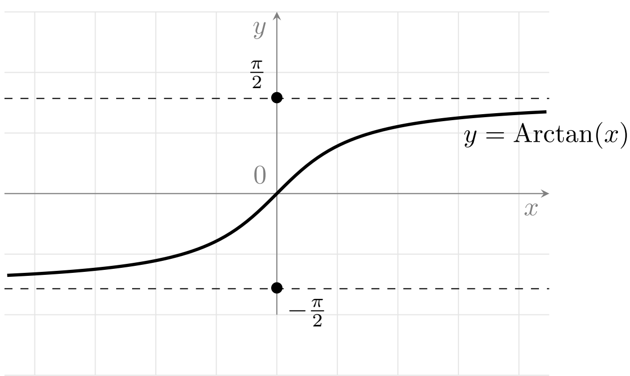
Démonstration. La fonction Arctan est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Arctan}''(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$ est du signe de $-x$. Ainsi Arctan'' s'annule en 0 en changeant de signe : elle est positive sur $\mathbb{R}_-$ et négative sur $\mathbb{R}_+$. □

Remarque : La tangente en 0 à la courbe représentative de Arctan est la droite d'équation $y = x$. La proposition précédente assure que la courbe représentative de Arctan est au-dessus de sa tangente en 0 sur $\mathbb{R}_-$ et en-dessous de sa tangente en 0 sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |\mathrm{Arctan}(x)| \leqslant |x|.$$

c) Courbe représentative





d) Quelques égalités remarquables

Voici quelques égalités impliquant la fonction Arctan qu'il faut connaître et savoir redémontrer à la demande :

- On a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}}$$

En effet :

⚠ g n'est pas constante : son domaine de définition n'est pas un intervalle !

- On a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\text{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$$

En effet :

2) Fonction Arcsinus

a) Définition et premières propriétés

Théorème (fonction Arcsinus). *La fonction sinus est une bijection de* $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ *sur* $[-1\,;1]$. *Sa fonction réciproque est appelée Arcsinus et notée* Arcsin.

La fonction Arcsin *est définie sur* $[-1\,;1]$. *Elle est impaire, continue et strictement croissante sur* $[-1\,;1]$.

Démonstration.

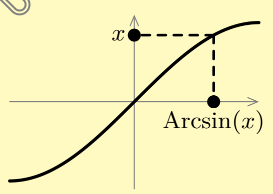
$\square$

Proposition.

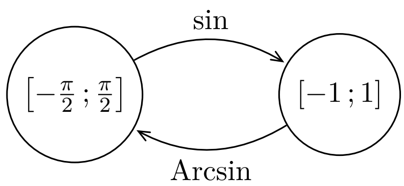
- *Pour tout* $x \in [-1\,;1]$, $\sin(\mathrm{Arcsin}(x)) = x$
- *Pour tout* $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\mathrm{Arcsin}(\sin(x)) = x$.

Démonstration. Découle directement de la définition de Arcsin comme réciproque de $\sin$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$. $\square$

Remarques :



- En d'autres termes, pour tout $x \in [-1\,;1]$, $\mathrm{Arcsin}(x)$ est l'unique $y \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(y) = x$.
- De manière imagée (toujours avoir ce dessin en tête pour se souvenir du théorème ci-dessus) :



Passer à l'Arcsinus dans une égalité, quand c'est possible, est une opération réversible. Mais passer au sinus dans une égalité est irréversible :

$x = y \;\cancel{\Longleftarrow}\; \sin(x) = \sin(y)$.

Le sens réciproque n'est même pas vrai modulo 2π (cf. paragraphe I.5.b).

- La fonction sinus n'est pas injective sur $\mathbb{R}$, et donc l'Arcsinus n'est pas la réciproque de la fonction sinus : Arcsin est la réciproque de $\sin\big|_{\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]}$ qui, elle, est injective, et même bijective de $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1\,;1]$.

  Écrire $\sin(\mathrm{Arcsin}(x))$ n'a de sens que si $x \in [-1\,;1]$ et, dans ce cas, cela vaut x. En revanche $\mathrm{Arcsin}(\sin(x))$ a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$ mais on n'a pas toujours $\mathrm{Arcsin}(\sin(x)) = x$!

  Par exemple, on a $\sin(\pi) = 0$ *donc* $\mathrm{Arcsin}(\sin(\pi)) = \mathrm{Arcsin}(0) = 0$ *(car* $\sin$ *est impaire). On n'a pas* $\mathrm{Arcsin}(\sin(\pi)) = \pi$ *!*

- Une méthode simple (mais efficace !) pour montrer une égalité du type $\alpha = \mathrm{Arcsin}(A)$ consiste à :
  - ⋆ montrer que $\sin(\alpha) = A$
  - ⋆ puis montrer que $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

  On généralisera cela en exercice.

  Par exemple :

En lisant le tableau des valeurs usuelles de $\sin$ dans l'autre sens, on obtient :

Et on obtient les valeurs négatives remarquables en utilisant l'imparité de Arcsin.

Proposition (valeurs remarquables).

$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\text{Arcsin}(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

b) Régularité et convexité

Lemme. *Pour tout* $x \in [-1\,;1]$, $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

Démonstration.

$\square$

Arcsin n'est pas dérivable en -1 et en 1. Sa courbe admet une tangente verticale en ces points.

Proposition. *La fonction* Arcsin *est dérivable sur* $]-1\,;1[$ *et*

$$\forall x \in\,]-1\,;1[\qquad \text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration.

$\square$

Proposition. *La fonction* Arcsin *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $]-1\,;1[$.

Démonstration. La fonction Arcsin est dérivable sur $]-1\,;1[$. La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;1[$ et à valeurs strictement positives en tant que fonction rationnelle dont le dénominateur est à valeurs strictement positives sur $]-1\,;1[$. La fonction racine carrée étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que Arcsin' est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;1[$ et donc Arcsin aussi. $\square$

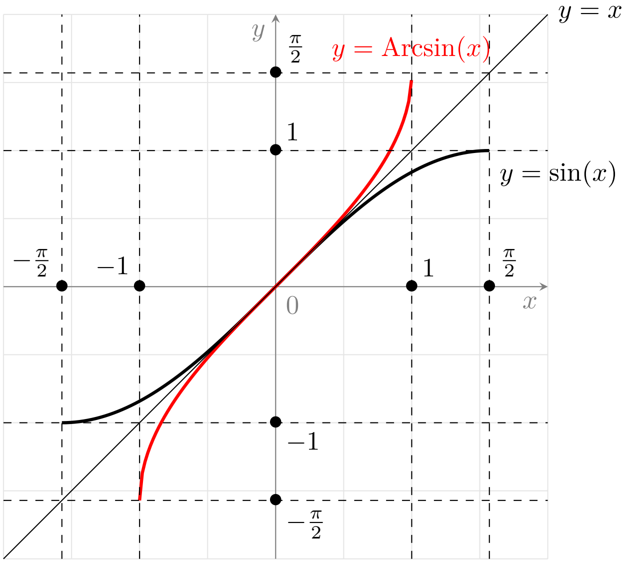
Proposition. *La fonction* Arcsin *admet un point d'inflexion en* 0. *Plus précisément :* Arcsin *est convexe sur* $[0\,;1[$ *et concave sur* $]-1\,;0]$.

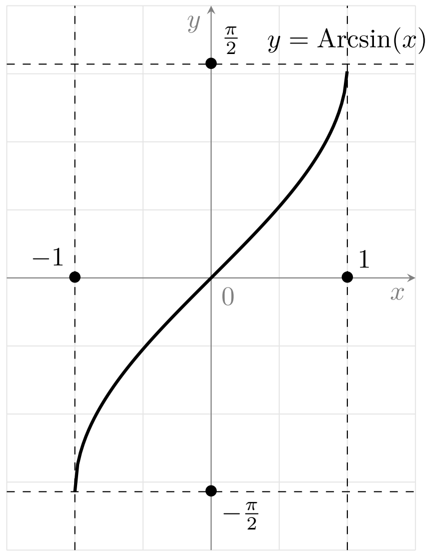
Démonstration. La fonction Arcsin est deux fois dérivable sur $]-1\,;1[$ et, pour tout $x \in\,]-1\,;1[$, $\text{Arcsin}''(x) = x(1-x^2)^{-3/2}$ est du signe de x. Ainsi Arcsin'' s'annule en 0 en changeant de signe : elle est positive sur $[0\,;1[$ et négative sur $]-1\,;0]$. $\square$

Remarque : La tangente en 0 à la courbe représentative de Arcsin est la droite d'équation $y = x$. La proposition précédente assure que la courbe représentative de Arcsin est au-dessus de sa tangente en 0 sur $[0\,;1[$ et en-dessous de sa tangente en 0 sur $]-1\,;0]$. On en déduit que

$$\forall x \in\,]-1\,;1[\,, \qquad |\,\text{Arcsin}(x)| \geqslant |x|.$$

c) Courbe représentative





3) Fonction Arccosinus

a) Définition et premières propriétés

Théorème (fonction Arccosinus). *La fonction cosinus est une bijection de* $[0\,;\pi]$ *sur* $[-1\,;1]$. *Sa fonction réciproque est appelée Arccosinus et notée* Arccos.

La fonction Arccos *est définie sur* $[-1\,;1]$. *Elle est continue et strictement décroissante sur* $[-1\,;1]$.

Démonstration.

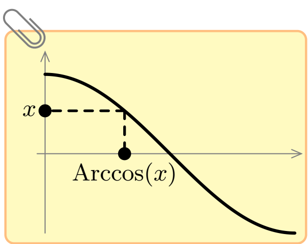
□

Proposition.

- *Pour tout* $x \in [-1\,;1]$, $\cos(\operatorname{Arccos}(x)) = x$.
- *Pour tout* $x \in [0\,;\pi]$, $\operatorname{Arccos}(\cos(x)) = x$.

Démonstration. Découle directement de la définition de Arccos comme réciproque de $\cos$ sur $[0\,;\pi]$. □

Remarques :



- En d'autres termes, pour tout $x \in [-1\,;1]$, $\operatorname{Arccos}(x)$ est l'unique $y \in [0\,;\pi]$ tel que $\cos(y) = x$.
- De manière imagée (toujours avoir ce dessin en tête pour se souvenir du théorème ci-dessus) :

$$[0\,;\pi] \underset{\operatorname{Arccos}}{\overset{\cos}{\rightleftarrows}} [-1\,;1]$$

- La fonction cosinus n'est pas injective sur $\mathbb{R}$, et donc l'Arccosinus n'est pas la réciproque de la fonction cosinus : Arccos est la réciproque de $\cos\big|_{[0\,;\pi]}$ qui, elle, est injective, et même bijective de $[0\,;\pi]$ sur $[-1\,;1]$.

  Écrire $\cos(\operatorname{Arccos}(x))$ n'a de sens que si $x \in [-1\,;1]$ et, dans ce cas, cela vaut x. En revanche $\operatorname{Arccos}(\cos(x))$ a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$ mais on n'a pas toujours $\operatorname{Arccos}(\cos(x)) = x$!

  Par exemple, on a $\cos(2\pi) = 1$ *donc* $\operatorname{Arccos}(\cos(2\pi)) = \operatorname{Arccos}(1) = 0$ *(car* $\cos(0) = 1$ *et* $0 \in [0\,;\pi]$*). On n'a pas* $\operatorname{Arccos}(\cos(2\pi)) = 2\pi$ *!*

Passer à l'Arccosinus dans une égalité, quand c'est possible, est une opération réversible. Mais passer au cosinus dans une égalité est irréversible :

$x = y \not\Leftrightarrow \cos(x) = \cos(y)$.

Le sens réciproque n'est même pas vrai modulo 2π (cf. paragraphe I.5.b).

On généralisera cela en exercice.

- Une méthode simple (mais efficace !) pour montrer une égalité du type $\alpha = \operatorname{Arccos}(A)$ consiste à :
  - ⋆ montrer que $\cos(\alpha) = A$
  - ⋆ puis montrer que $\alpha \in [0\,;\pi]$.

  Par exemple :

En lisant le tableau des valeurs usuelles de $\cos$ dans l'autre sens, on obtient :

Proposition (valeurs remarquables).

$\cos(x)$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{Arccos}(x)$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

b) Régularité

Lemme. *Pour tout* $x \in [-1\,;1]$, $\cos(\operatorname{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

Démonstration. Soit $x \in [-1\,;1]$. Puisque $\sin^2 = 1 - \cos^2$, on a

$$\sin^2(\operatorname{Arccos}(x)) = 1 - \cos^2(\operatorname{Arccos}(x)) = 1 - x^2.$$

Puisque $\sin$ est positive sur $[0\,;\pi]$ et $\operatorname{Arccos}(x) \in [0\,;\pi]$, on a $\sin(\operatorname{Arccos}(x)) \geqslant 0$ et donc $\sin(\operatorname{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}$. □

Exemple : *Résoudre l'équation* $\operatorname{Arccos}(x) = \operatorname{Arcsin}(x)$, *d'inconnue* x *réel.*

On peut même pousser l'analyse un peu plus loin. Le fait que $\operatorname{Arccos}(x) \in [0\,;\pi]$ force $\operatorname{Arcsin}(x)$ à appartenir à $[0\,;\frac{\pi}{2}]$ et donc x à appartenir à $[0\,;1]$. Cela exclut d'office $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ comme possible solution, laissant alors uniquement $\frac{\sqrt{2}}{2}$ pour la synthèse.

Proposition. *La fonction* Arccos *est dérivable sur* $]-1\,;1[$ *et*

$$\forall x \in\,]-1\,;1[\qquad \operatorname{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Arccos n'est pas dérivable en -1 et en 1. Sa courbe admet une tangente verticale en ces points.

Démonstration. La fonction $f = \cos$ est dérivable sur $[0\,;\pi]$ et $\cos' = -\sin$ ne s'annule qu'en 0 et π sur $[0\,;\pi]$. Ainsi le théorème de dérivabilité de la réciproque assure que $\operatorname{Arccos} = f^{-1}$ est dérivable sur $[-1\,;1] \setminus \{f(0), f(\pi)\} = \,]-1\,;1[$ et

$$\forall x \in\,]-1\,;1[\,, \quad \operatorname{Arccos}'(x) = \frac{1}{\cos'(\operatorname{Arccos}(x))} = \frac{1}{-\sin(\operatorname{Arccos}(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

□

Remarque :

Proposition. *La fonction* Arccos *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $]-1\,;1[$.

Démonstration. La fonction Arccos est dérivable sur $]-1\,;1[$. Puisque $\operatorname{Arccos}' = -\operatorname{Arcsin}'$ et on a vu que Arcsin' est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;1[$. On en déduit que Arccos' est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;1[$ et donc Arccos aussi. □

c) Courbe représentative