Chapitre 8

Systèmes linéaires

L'objectif de ce chapitre est de présenter une méthode de résolution des systèmes linéaires appelée méthode du pivot de Gauss. Cette méthode est algorithmique et aboutit à tous les coups. Elle doit être employée **systématiquement** pour résoudre un système linéaire.

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un élément de $\mathbb{K}$ est alors appelé scalaire.

I Définitions et exemples

Définition. *Soient n et p des entiers strictement positifs. Un système linéaire de n équations à p inconnues est la donnée d'un système*

$$(S) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{cases}$$

où, pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$, $a_{i,j} \in \mathbb{K}$, $b_i \in \mathbb{K}$ et $x_i \in \mathbb{K}$

- *Les nombres $a_{i,j}$, $(i,j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$ sont appelés les coefficients de (S). On les suppose connus.*
- *Le n-uplet $(b_1, \dots, b_n)$ est appelé le second membre de (S). On le suppose connu.*
- *$x_1, \dots, x_p$ sont appelées les inconnues de (S).*
- *Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, on note L_i la $i^{\text{ième}}$ ligne du système (S), c'est-à-dire*

  $$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,p}x_p = b_i,$$

  et on l'appelle $i^{\text{ième}}$ équation du système.
- *Si $(b_1, \dots, b_n) = (0, \dots, 0)$ alors le système (S) est dit homogène.*
- *Le système homogène associé à (S) est le système obtenu en remplaçant $(b_1, \dots, b_n)$ par $(0, \dots, 0)$. On le note (S_0).*
- *Un p-uplet $(s_1, \dots, s_p)$ est dit solution de (S) si les n égalités obtenues en remplaçant $(x_1, \dots, x_p)$ par $(s_1, \dots, s_p)$ sont vérifiées.*
- *Deux systèmes sont dits équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.*
- *Le système est dit compatible s'il existe au moins une solution.*
- *Le système est dit impossible ou incompatible s'il n'admet aucune solution.*

Remarques :

- Si un système (S) possède une ligne « toujours » vraie (par exemple $0 = 0$ ou $x = x$), alors (S) est équivalent au système obtenu en retirant cette ligne.
- Si un système (S) possède une ligne « toujours » fausse (par exemple $0 = 1$ ou $x + 1 = x$), alors (S) est incompatible.
- Un système homogène à p inconnues admet au moins une solution : le p-uplet $(0, 0, \dots, 0)$. Nous allons montrer dans ce chapitre qu'un système linéaire admet une seule solution, ou aucune, ou une infinité.

Exemple : *Considérons le système*

$$(S) \quad \begin{cases} x & + & 4y & + & 5z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & - & 4z & = & 10 \\ 2x & + & 3y & + & 3z & = & 5 \\ 4x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'un système de quatre équations à trois inconnues : x, y et z.

Le système homogène associé à (S) est

$$(S_0) \quad \begin{cases} x & + & 4y & + & 5z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & - & 4z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & 3z & = & 0 \\ 4x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{cases}$$

et le second membre de (S) est le vecteur $(0,10,5,0)$. On vérifie que $(1,6,-5)$ est solution du système : il est donc compatible (on peut montrer qu'il s'agit de la seule solution).

Interprétation géométrique.

- Lorsque $p=2$ et $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, résoudre un système revient à déterminer les points d'intersection de n droites du plan.
- Lorsque $p=3$ et $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, résoudre un système revient à déterminer les points d'intersection de n plans de l'espace.

Afin de décrire les solutions d'un système linéaire, introduisons les notions d'addition et de multiplication externe sur $\mathbb{K}^p$:

Définition. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Si $(u_1,\dots,u_p) \in \mathbb{K}^p$, $(v_1,\dots,v_p) \in \mathbb{K}^p$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on note :*

$$(u_1,\dots,u_p)+(v_1,\dots,v_p) = (u_1+v_1,\dots,u_p+v_p)$$

et $\lambda(u_1,\dots,u_p) = (\lambda u_1,\dots,\lambda u_p)$.

II Résolution de systèmes linéaires triangulaires

Nous allons voir dans cette section que certains types de systèmes linéaires sont faciles à résoudre.

Soit (S) un système à $n \in \mathbb{N}^*$ équations et $p \in \mathbb{N}^*$ inconnues.

Définition. *On dit que le système (S) est triangulaire si*

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!], \qquad \big(i > j \quad \Longrightarrow \quad a_{i,j} = 0\big).$$

Autrement dit, un système est triangulaire, si tous les coefficients sous la diagonale (ceux en dessous des termes du type $a_{i,i}$, $1 \leqslant i \leqslant \min(n,p)$) sont nuls.

1) Le cas où $n=p$

Si (S) est triangulaire et $n=p$, alors il a la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,i}x_i & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,i}x_i & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \ddots & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & a_{i,i}x_i & + & \cdots & + & a_{i,n}x_n & = & b_i \\ & & & & & & & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Supposons que tous les termes diagonaux sont tous non nuls : pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $a_{i,i} \neq 0$.

La $n^{\text{ième}}$ ligne entraîne alors que $x_n = \dfrac{b_n}{a_{n,n}}$. On substitue ensuite x_n par sa valeur dans la $(n-1)^{\text{ième}}$ ligne, ce qui nous permet d'obtenir la valeur de x_{n-1}. On remonte successivement dans les lignes et on calcule tour à tour les valeurs de x_{n-2}, ..., x_2 et enfin x_1. On en déduit le théorème suivant :

Théorème. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et (S) un système à n équations et n inconnues. Supposons que (S) est triangulaire et que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $a_{i,i} \neq 0$. Alors (S) admet une unique solution.*

Exemple : *Considérons le système suivant :*

$$(S) \quad \begin{cases} 5x + y - z = 1 \\ \qquad 3y + 4z = -6 \\ \qquad\qquad - 2z = 3 \end{cases}$$

Il s'agit d'un système sous forme triangulaire avec des coefficients diagonaux non nuls. On obtient donc $z = \dfrac{-3}{2}$, puis $y = \dfrac{-6-4z}{3} = 0$ puis enfin $x = \dfrac{1-y+z}{5} = -\dfrac{1}{10}$. Le système admet donc $\left(-\dfrac{1}{10}, 0, \dfrac{-3}{2}\right)$ pour unique solution.

Si l'un des coefficients diagonaux est nul, alors on ne peut pas conclure en général : il se peut qu'il admette aucune solution ou bien une infinité.

En effet, modifions le système précédent.

- $\star$ *Le système*

$$(S') \quad \begin{cases} 5x + y - z = 1 \\ \qquad 3y + 4z = -6 \\ \qquad\qquad 0 = 3 \end{cases}$$

n'admet pas de solutions car la condition $0 = 3$ est clairement fausse.

- $\star$ *Dans le système*

$$(S'') \quad \begin{cases} 5x + y - z = 1 \\ \qquad 4z = -6 \\ \qquad - 2z = 3 \end{cases}$$

les deux dernières lignes sont toutes les deux équivalentes à $z = -3/2$. Ainsi

$$(S'') \iff \begin{cases} 5x + y = -\dfrac{1}{2} \\ z = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\dfrac{1}{2} - 5x \\ z = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

En effet, quand on a plus d'inconnues que d'équations, on met les inconnues « en trop » (on parlera plus bas d'inconnues auxiliaires) à droite et on exprime les premières par rapport à elles. L'ensemble des solutions de (S) est donc :

$$\left\{ \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) + x(1,-5,0) \,\middle|\, x \in \mathbb{K} \right\}$$

(il s'agit de la droite de l'espace passant par le point $(0, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (1,-5,0)$). Il y en a une infinité.

2) Le cas où $n < p$

Si (S) est triangulaire et $n < p$, alors il a la forme suivante :

$$\begin{cases}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,i}x_i + \cdots + a_{1,n}x_n + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\
\qquad a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,i}x_i + \cdots + a_{2,n}x_n + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\
\qquad\qquad \ddots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad a_{i,i}x_i + \cdots + a_{i,n}x_n + \cdots + a_{i,p}x_p = b_i \\
\qquad\qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad\qquad a_{n,n}x_n + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n
\end{cases}$$

Supposons encore que tous les termes diagonaux sont non nuls : pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $a_{i,i} \neq 0$. Parmi les p inconnues, on en choisit n que l'on appelle inconnues principales. Les $p - n$ autres sont appelées inconnues auxiliaires du système. Choisissons par exemple

- $x_1, \ldots, x_n$ pour inconnues principales.
- $x_{n+1}, \ldots, x_p$ pour inconnues auxiliaires.

On place les inconnues auxiliaires dans le membre de droite pour faire apparaître un système triangulaire :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,i}x_i + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 - \displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} a_{1,k}x_k \\ \qquad a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,i}x_i + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 - \displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} a_{2,k}x_k \\ \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad a_{i,i}x_i + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i - \displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} a_{i,k}x_k \\ \qquad\qquad\qquad \ddots \qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{n,n}x_n = b_n - \displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} a_{n,k}x_k \end{cases}$$

Par remontées successives (cf. le cas triangulaire avec $n=p$), on calcule les valeurs de $x_1,\dots,x_n$ en fonction des inconnues auxiliaires. Pour chaque choix de valeurs des inconnues auxiliaires (il y a une infinité de choix), il y a une unique solution au système. Nous en déduisons qu'il y a une infinité de solution.

Théorème. *Soit (S) un système à $n \in \mathbb{N}^*$ équations et $n < p$ inconnues. Supposons que (S) est triangulaire et que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $a_{i,i} \neq 0$. Alors (S) admet une infinité de solutions.*

Exemple : *Considérons le système suivant :*

$$(S) \quad \begin{cases} x - 3y + 5z = 4 \\ \qquad y - 2z = -1 \end{cases}$$

Il est triangulaire et les termes diagonaux sont non nuls. On décide que z est l'inconnue auxiliaire et on obtient

$$(S) \iff \begin{cases} x - 3y = 4-5z \\ \qquad y = -1+2z \end{cases}$$

Ce système est désormais sous forme triangulaire avec des coefficients diagonaux non nuls. On sait le résoudre : on a $y=-1+2z$ puis $x=4-5z+3y=4-5z-3+6z=1+z$. Par conséquent l'ensemble des solutions de (S) est

$$\{(1,-1,0)+z(1,2,1)\,|\,z\in\mathbb{K}\}$$

(il s'agit de la droite de l'espace passant par le point $(1,-1,0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}=(1,2,1)$). Il y en a une infinité .

⚠ Si l'un des coefficients diagonaux est nul alors, comme dans le paragraphe précédent il se peut qu'il n'y ait aucune solution ou qu'il y en ait une infinité. On résout au cas par cas. On peut notamment essayer d'échanger des inconnues au risque que le système ne soit plus triangulaire. Si tel est le cas, alors on utilise la méthode du pivot de Gauss (cf. partie III).

3) Le cas où $n > p$

Si (S) est triangulaire et $n>p$, alors nécessairement tous les coefficients des $n-p$ dernières lignes sont nuls. Il y a alors deux cas de figure :

- Si $b_{p+1}=\cdots=b_n=0$, alors les $n-p$ dernières lignes du système sont nulles et on peut donc les enlever. On se ramène alors au cas où $n=p$.
- Si l'un des b_i, $p+1 \leqslant i \leqslant n$ est non nul, disons le i_0 ième, alors la i_0 ième ligne est fausse (il s'agit de $0=b_{i_0}$) : le système n'admet pas de solution.

III La méthode du pivot de Gauss

Comme nous venons de le voir, la résolution d'un système triangulaire est simple. Nous allons à présent introduire la méthode du pivot de Gauss qui permet, à l'aide d'opérations dites élémentaires sur les lignes, de se ramener à un système triangulaire.

1) Opérations sur les lignes d'un système

Définition. *Notons $L_1, L_2, \dots, L_n$ les n lignes du système (S). On appelle opération élémentaire sur les lignes de (S) l'une des trois opérations suivantes :*

- *L'échange des lignes i et j, avec $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]$ tels que $i \neq j$. On la note $L_i \leftrightarrow L_j$.*
- *La multiplication de la ligne $i \in [\![1\,;n]\!]$ par un scalaire λ **non nul**. On la note $L_i \leftarrow \lambda L_i$.*
- *L'ajout à la ligne $i \in [\![1\,;n]\!]$ de la ligne $j \in [\![1\,;n]\!] \backslash \{i\}$ multipliée par un scalaire α. On la note $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$.*

Remarques : Nous déduisons de ces trois types d'opérations élémentaires, les opérations suivantes :

- $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ où $i \neq j$ dans $[\![1\,;n]\!]$, $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et $\beta \in \mathbb{K}$ (on fait successivement les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i + \frac{\beta}{\alpha} L_j$ puis $L_i \leftarrow \alpha L_i$).
- $L_i \leftarrow L_i + \sum\limits_{j \neq i} \beta_j L_j$ où $i \in [\![1\,;n]\!]$ et $(\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^{n-1}$ (ajout à la $i^{\text{ième}}$ ligne d'une *combinaison linéaire* des autres lignes).

⚠ Insistons bien : dans $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ ou $L_i \leftarrow \lambda L_i$, α et λ doivent être non nuls. Ce n'est pas nécessaire pour α dans $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ (si on prend α nul, ce n'est pas si grave, c'est juste qu'on ne fait rien...). En effet, ce qui est important est que l'opération soit réversible (sinon on perd l'équivalence).

Proposition. *Si un système (S') est obtenu à partir d'un système (S) en effectuant une succession d'opérations élémentaires, alors (S) et (S') sont équivalents.*

Démonstration.

- Notons $(S_{i,j})$ le système obtenu en échangeant les lignes i et j. Si $(x_1, \dots, x_p)$ est une solution de (S), alors les n lignes de (S) sont vraies. Elles restent vraies si l'on échange de place les lignes i et j. Ainsi $(x_1, \dots, x_p)$ est une solution de $(S_{i,j})$. La réciproque est immédiate en échangeant les lignes j et i.
- Soient $i \in [\![1\,;n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Notons $(S_{i,\lambda})$ le système obtenu lorsqu'on fait l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i$. Si $(x_1, \dots, x_p)$ est une solution de (S), alors les n lignes de (S) sont vraies. Elles restent vraies si l'on multiplie chaque membre de L_i par λ. Ainsi $(x_1, \dots, x_p)$ est une solution de $(S_{i,\lambda})$.
Réciproquement, si $(x_1, \dots, x_p)$ est une solution de $(S_{i,\lambda})$ alors en faisant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i$, on obtient que $(x_1, \dots, x_p)$ est une solution de (S).
Nous en déduisons que les ensembles des solutions de (S) et $(S_{i,\lambda})$ sont égaux. Les systèmes sont donc équivalent.
- Soient $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Notons $(S_{i,j,\alpha})$ le système obtenu lorsqu'on fait l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$. Si $(x_1, \dots, x_p)$ est une solution de (S), alors les n lignes de (S) sont vraies. Elles restent vraies lorsque l'on fait $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$. Ainsi $(x_1, \dots, x_p)$ est une solution de $(S_{i,j,\alpha})$.
Réciproquement, si $(x_1, \dots, x_p)$ est une solution de $(S_{i,j,\alpha})$, alors en faisant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i - \alpha L_j$, on obtient que $(x_1, \dots, x_p)$ est une solution de (S).
Nous en déduisons que les ensembles des solutions de (S) et $(S_{i,j,\alpha})$ sont égaux. Les systèmes sont donc équivalent.

On conclut par récurrence sur le nombre d'opérations élémentaires effectuées. □

Corollaire. *Si un système (S) possède deux lignes identiques, alors le système (S') obtenu en supprimant l'une de ces deux lignes est équivalent à (S).*

Démonstration. Si L_i et L_j sont ces deux lignes, alors l'opération $L_i \leftarrow L_i - L_j$ transforme la ligne L_i en $0 = 0$. Cette égalité étant toujours vraie, on peut la supprimer (elle n'apporte aucune information sur les solutions éventuelles du système). □

2) Illustration de la méthode par des exemples

a) Exemple 1

Considérons le système suivant :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & y & - & z & + & t & = & 1\\ 3x & + & 2y & + & z & - & 9t & = & 1\\ x & + & y & & & - & 3t & = & -2\\ x & + & y & - & z & & & = & 2\end{array}\right.$$

Nous allons nous ramener à un système triangulaire en faisant une succession bien précise d'opérations élémentaires sur les lignes du système.

Étape 1 :

• On s'assure que le coefficient devant x sur la première ligne est non nul. Si ce n'est pas le cas (comme ici), on échange la première ligne avec une autre ligne pour laquelle le coefficient devant x est non nul. échangeons L_1 et L_4 :

$$(S)\quad\iff\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & + & y & - & z & & & = & 2 & \quad L_1\leftrightarrow L_4\\ 3x & + & 2y & + & z & - & 9t & = & 1 &\\ x & + & y & & & - & 3t & = & -2 &\\ & & y & - & z & + & t & = & 1 &\end{array}\right.$$

Désormais le coefficient placé devant x dans la première ligne (1 ici) s'appelle le premier pivot.

• En utilisant la première ligne, à l'aide d'opérations élémentaires, on annule le coefficient devant x dans les lignes suivantes :

$$(S)\quad\iff\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & + & y & - & z & & & = & 2 &\\ & - & y & + & 4z & - & 9t & = & -5 & \quad L_2\leftarrow L_2-3L_1\\ & & & & z & - & 3t & = & -4 & \quad L_3\leftarrow L_3-L_1\\ & & y & - & z & + & t & = & 1 &\end{array}\right.$$

Étape 2 : Désormais on ne touche plus à la première ligne et on recommence la première étape avec les lignes restantes. Le coefficient devant y dans la deuxième ligne est -1. Il s'agit du deuxième pivot. En utilisant la deuxième ligne, à l'aide d'opérations élémentaires, on annule le coefficient devant y dans les lignes suivantes :

$$(S)\quad\iff\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & + & y & - & z & & & = & 2 &\\ & - & y & + & 4z & - & 9t & = & -5 &\\ & & & & z & - & 3t & = & -4 &\\ & & & & 3z & - & 8t & = & -4 & \quad L_4\leftarrow L_4+L_2\end{array}\right.$$

Étape 3 : Désormais on ne touche plus aux deux premières lignes et on recommence la première étape avec les lignes restantes. Le coefficient devant z dans la troisième ligne est 1. Il s'agit du troisième pivot. En utilisant la troisième ligne, à l'aide d'opérations élémentaires, on annule le coefficient devant z dans la ligne suivante :

$$(S)\quad\iff\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & + & y & - & z & & & = & 2 &\\ & - & y & + & 4z & - & 9t & = & -5 &\\ & & & & z & - & 3t & = & -4 &\\ & & & & & & t & = & 8 & \quad L_4\leftarrow L_4-3L_3\end{array}\right.$$

Étape finale : On peut procéder par remontées successives comme on l'a vu dans le paragraphe II. Mais il est plus intéressant d'un point de vue algorithmique de poursuivre avec la précédente mais en « remontant » :

$$(S)\quad\iff\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & + & y & - & z & & & = & 2 &\\ & - & y & + & 4z & & & = & 67 & \quad L_2\leftarrow L_2+9L_4\\ & & & & z & & & = & 20 & \quad L_3\leftarrow L_3+3L_4\\ & & & & & & t & = & 8 &\end{array}\right.$$

$$\iff\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & + & y & & & & & = & 22 & \quad L_1\leftarrow L_1+L_3\\ & - & y & & & & & = & -13 & \quad L_2\leftarrow L_2-4L_3\\ & & & & z & & & = & 20 &\\ & & & & & & t & = & 8 &\end{array}\right.$$

$$\iff \begin{cases} x & & & = 9 \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ -\ y & & & = -13 \\ & z & & = 20 \\ & & t & = 8 \end{cases}$$

Le système admet donc $(9, 13, 20, 8)$ pour unique solution. Dans cet exemple précis, on aurait été plus rapide avec des remontées successives mais, lorsqu'il y a des fractions, il est mieux de procéder comme on vient de le faire. Par ailleurs, nous n'aurons pas le choix de faire ainsi dans le chapitre 20 pour appliquer la méthode dite de Gauss-Jordan.

Remarque : En faisant des remontées successives à la place de cette étape finale, on obtient : $t = 8$, puis $z = -4 + 3t = 20$, puis $y = 5 + 4z - 9t = 13$ et enfin $x = 2 - y + z = 9$. Le système admet donc $(9, 13, 20, 8)$ pour unique solution.

b) Exemple 2

Considérons le système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} 2x + y - 3z + 7t = 12 \\ -x + y - 4t = -5 \\ x - 7y + 6z + 6t = 1 \\ x + 5y - 6z + 2t = 9 \end{cases}$$

Appliquons-lui la même méthode que précédemment.

Étape 1 : Le coefficient devant x sur la première ligne est égal à 2... qui est non nul. Il s'agit du premier pivot. En utilisant la première ligne, à l'aide d'opérations élémentaires, on annule le coefficient devant x dans les lignes suivantes :

$$(S) \iff \begin{cases} 2x + y - 3z + 7t = 12 \\ 3y - 3z - t = 2 \quad L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ -\ 15y + 15z + 5t = -10 \quad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \\ 9y - 9z - 3t = 6 \quad L_4 \leftarrow 2L_4 - L_1 \end{cases}$$

Remarquons que, puisque le pivot n'est pas égal à 1, nous avons utilisé à chaque ligne deux opérations élémentaires (par exemple pour la deuxième ligne, nous avons fait $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{-2}L_1$ puis $L_2 \leftarrow 2L_2$ pour ne pas se retrouver avec des fractions).

Étape 2 : Le coefficient devant y sur la deuxième ligne est égal à 3. Il s'agit du deuxième pivot. En utilisant la deuxième ligne, à l'aide d'opérations élémentaires, on annule le coefficient devant y dans les lignes suivantes :

$$(S) \iff \begin{cases} 2x + y - 3z + 7t = 12 \\ 3y - 3z - t = 2 \\ 0 = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2 \\ 0 = 0 \quad L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 \end{cases}$$

Étape 3 : Le système est désormais triangulaire. Les deux dernières lignes sont toujours vérifiées, on peut donc les omettre. On les appelle conditions de compatibilité. On se retrouve donc avec :

$$(S) \iff \begin{cases} 2x + y - 3z + 7t = 12 \\ 3y - 3z - t = 2 \end{cases}$$

On décide par exemple que z et t soient les inconnues auxiliaires. On les place dans le membre de droite pour faire apparaitre un système triangulaire :

$$(S) \iff \begin{cases} 2x + y = 12 + 3z - 7t \\ 3y = 2 + 3z + t \end{cases}$$

Étape 4 : On poursuit avec la méthode du pivot de Gauss en « remontant » :

$$(S) \iff \begin{cases} 6x + \quad = 38 + 6z - 22t \quad L_1 \leftarrow 3L_1 - L_2 \\ 3y = 2 + 3z + t \end{cases}$$

Étape finale : On divise par les coefficients diagonaux :

$$(S) \iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{6}(38+6z-22t) & L_1 \leftarrow \frac{1}{6}L_1 \\ y = \dfrac{1}{3}(2+3z+t) & L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \end{cases}$$

$$\iff (x,y,z,t) = \left(\frac{1}{3}\Big(17+3z-11t\Big), \frac{1}{3}\Big(2+3z+t\Big), z, t\right)$$

$$\iff (x,y,z,t) = \left(\frac{17}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0\right) + z\,(1,1,1,0) + t\left(-\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1\right)$$

L'ensemble des solutions du système est $\left\{\dfrac{1}{3}(17,2,0,0) + z\,(1,1,1,0) + \dfrac{t}{3}(-11,1,0,3) \;\middle|\; (z,t) \in \mathbb{K}^2\right\}$. Il y en a une infinité.

c) Exemple 3

Considérons le système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} 5x + 3y - z = 3 \\ x + 2y - z = 1 \\ 3x - y + z = 2 \end{cases}$$

Appliquons lui la même méthode que précédemment.

On annule le coefficient devant x dans toutes les lignes sauf la première :

$$(S) \iff \begin{cases} 5x + 3y - z = 3 & \\ \phantom{5x+{}} 7y - 4z = 2 & L_2 \leftarrow 5L_2 - L_1 \\ - 14y + 8z = 1 & L_3 \leftarrow 5L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

On annule le coefficient devant y dans toutes les lignes sauf les deux premières :

$$(S) \iff \begin{cases} 5x + 3y - z = 3 & \\ 7y - 4z = 2 & \\ 0 = 5 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

Le système est désormais triangulaire. La dernière ligne est une condition de compatibilité et elle est clairement fausse. Par conséquent le système est incompatible : il n'a pas de solution.

d) Exemple 4 (avec un système à paramètres)

Soit $m \in \mathbb{K}$. Considérons le système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} x - y + (1+m)z = 2-m \\ 2x - my + 3z = 2-m \\ (1-m)x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Appliquons lui la même méthode que précédemment.

On annule le coefficient devant x dans toutes les lignes sauf la première :

$$(S) \iff \begin{cases} x - y + (1+m)z = 2-m & \\ (2-m)y + (1-2m)z = m-2 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ (2-m)y + (m^2+1)z = (m-1)(2-m) & L_3 \leftarrow L_3 - (1-m)L_1 \end{cases}$$

On s'assure que le coefficient devant y est non nul. Il faut faire deux cas.

- **Cas où $m = 2$:** On a alors

$$(S) \iff \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ -3z = 0 \\ 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + 0 = 0 \\ z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

  Ainsi l'ensemble des solutions est $\{x(1,1,0) \,|\, x \in \mathbb{K}\}$.

- **Cas où $m \neq 2$:** Désormais le coefficient devant y est non nul et on annule le coefficient devant y dans la dernière ligne :

$$(S) \iff \begin{cases} x - y + (1+m)z = 2-m \\ (2-m)y + (1-2m)z = m-2 \\ m(m+2)z = m(2-m) \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

On aimerait maintenant diviser par $m(m+2)$ pour obtenir z ou bien utiliser $m(m+2)$ comme pivot pour la méthode du pivot de Gauss en remontant. Quelle que soit la méthode employée, cela n'est possible que si $m \notin \{-2; 0\}$. Il va falloir différentier plusieurs cas :

  - ⋆ **Cas où $m = 0$:** On a alors

$$(S) \iff \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2y + z = -2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

La dernière ligne est toujours vérifiée : on peut l'omettre. On décide par exemple que y soit l'inconnue auxiliaire. On a alors

$$(S) \iff \begin{cases} x + z = 2 + y \\ z = -2 - 2y \end{cases}$$

On remonte avec la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} (S) &\iff \begin{cases} x = 4 + 3y \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ z = -2 - 2y \end{cases} \\ &\iff (x,y,z) = (4+3y, y, -2-2y) \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\{(4,0,-2) + y(3,1,-2) \,|\, y \in \mathbb{K}\}$.

  - ⋆ **Cas où $m = -2$:** La dernière ligne de (S) devient alors $0 = -8$. Cette condition est bien entendue fausse : le système n'admet pas de solutions.
  - ⋆ **Cas où $m \notin \{-2; 0; 2\}$:** Cette fois $m(m+2) \neq 0$ et on peut l'utiliser comme pivot. Avant cela divisons par m pour la simplifier :

$$(S) \iff \begin{cases} x - y + (1+m)z = 2-m \\ (2-m)y + (1-2m)z = m-2 \\ (m+2)z = (2-m) \end{cases}$$

On fait les opérations $L_2 \leftarrow (m+2)L_2 - (1-2m)L_3$ et $L_1 \leftarrow (m+2)L_1 - (1+m)L_3$:

$$(S) \iff \begin{cases} (m+2)x - (m+2)y = 2-m \\ (m+2)(2-m)y = (m-2)(3-m) \\ (m+2)z = (2-m) \end{cases}$$

On fait l'opération $L_1 \leftarrow (2-m)L_1 + L_2$:

$$(S) \iff \begin{cases} (2-m)(m+2)x = m-2 \\ (m+2)(2-m)y = (m-2)(3-m) \\ (m+2)z = (2-m) \end{cases}$$

Enfin on fait les opérations $L_1 \leftarrow \frac{1}{(2-m)(m+2)}L_1$, $L_2 \leftarrow \frac{1}{(2-m)(m+2)}L_2$ et $L_3 \leftarrow \frac{1}{m+2}L_3$ et on conclut que le système admet une unique solution : $\left(\frac{-1}{m+2}, \frac{m-3}{m+2}, \frac{2-m}{m+2}\right)$.

Remarque : Si $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, alors $ax + by + cz = d$ est l'équation d'un plan de l'espace (on en reparlera un peu dans le cours sur les espaces vectoriels). Par conséquent, lorsque $m \in \mathbb{R}$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ est une solution de (S) si et seulement si (x,y,z) se trouve sur l'intersection des plans d'équations $x - y + (1+m)z = 2-m$, $2x - my + 3z = 2 - m$ et $(1-m)x + y + 2z = 0$. On a démontré que :

- Si $m \in \{0; 2\}$, alors l'intersection des trois plans est une droite.
- Si $m = -2$, alors l'intersection des plans est vide.
- Si $m \notin \{-2; 0; 2\}$, alors l'intersection des plans est un point.

e) Exemple 5

Considérons le système suivant :

$$(S)\quad \begin{cases} 2x & & - & z & - & 2t & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 2z & - & t & = & 1 \\ x & + & y & & & + & 2t & = & -2 \\ 3x & + & y & - & z & & & = & -1 \end{cases}$$

Appliquons lui la même méthode que précédemment mais sans commentaires cette fois.

$$(S) \iff \begin{cases} 2x - z - 2t = 1 \\ y + 3z + t = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 2y + z + 6t = -5 & L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \\ 2y + z + 6t = -5 & L_4 \leftarrow 2L_4 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x - z - 2t = 1 \\ y + 3z + t = 0 \\ -5z + 4t = -5 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ -5z + 4t = -5 & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x - z - 2t = 1 \\ y + 3z + t = 0 \\ -5z + 4t = -5 \\ 0 = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x - z - 2t = 1 \\ y + 3z + t = 0 \\ -5z + 4t = -5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x - 2t = 1 + z \\ y + t = -3z \\ 4t = -5 + 5z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4x = -3 + 7z & L_1 \leftarrow 2L_1 + L_3 \\ 4y = 5 - 17z & L_2 \leftarrow 4L_2 - L_3 \\ 4t = -5 + 5z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -\frac{3}{4} + \frac{7}{4}z & L_1 \leftarrow \frac{L_1}{4} \\ y = \frac{5}{4} - \frac{17}{4}z & L_2 \leftarrow \frac{L_2}{4} \\ t = -\frac{5}{4} + \frac{5}{4}z & L_3 \leftarrow \frac{L_3}{4} \end{cases}$$

$$\iff (x,y,z,t) = \left(-\frac{3}{4} + \frac{7}{4}z, \frac{5}{4} - \frac{17}{4}z, z, -\frac{5}{4} + \frac{5}{4}z\right)$$

$$\iff (x,y,z,t) = \left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 0, -\frac{5}{4}\right) + z\left(\frac{7}{4}, -\frac{17}{4}, 1, \frac{5}{4}\right)$$

L'ensemble des solutions du système est

$$\left\{ -\frac{1}{4}(3,-5,0,5) + \frac{z}{4}(7,-17,4,5) \;\middle|\; z \in \mathbb{K} \right\}.$$

Il y en a une infinité.

f) Exemple 6 (avec des coefficients non réels)

Considérons le système suivant :

$$(S)\quad \begin{cases} x - y - iz = 1 \\ -ix + y + z = i \\ x + iy - z = 0 \end{cases}.$$

Appliquons lui la même méthode que précédemment mais sans commentaires cette fois.

$$
\begin{array}{rcl}
(S) & \iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcll}
x & - & y & - & iz & = & 1 & \\
 & & (1-i)y & + & 2z & = & 2i & L_2 \leftarrow L_2 + iL_1 \\
 & & (1+i)y & - & (1-i)z & = & -1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1
\end{array}\right. \\
 & \iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcll}
x & - & y & - & iz & = & 1 & \\
 & & (1-i)y & + & 2z & = & 2i & \\
 & & & - & 2z & = & 1-i & L_3 \leftarrow (1-i)L_3 - (1+i)L_2
\end{array}\right. \\
 & \iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcll}
2x & - & 2y & & & = & 1-i & L_1 \leftarrow 2L_1 - iL_3 \\
 & & (1-i)y & & & = & 1+i & L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\
 & & & - & 2z & = & 1-i &
\end{array}\right. \\
 & \iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcll}
(2-2i)x & & & & & = & 2 & L_1 \leftarrow (1-i)L_1 + 2L_2 \\
 & & (1-i)y & & & = & 1+i & \\
 & & & - & 2z & = & 1-i &
\end{array}\right. \\
 & \iff & \left\{\begin{array}{rrrcll}
x & & & = & \frac{1+i}{2} & L_1 \leftarrow \frac{L_1}{2-2i} \\
 & y & & = & i & L_2 \leftarrow \frac{L_2}{1-i} \\
 & & z & = & \frac{-1+i}{2} & L_3 \leftarrow -\frac{L_3}{2}
\end{array}\right.
\end{array}
$$

Ainsi le système admet $\left(\dfrac{1+i}{2}, i, \dfrac{-1+i}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(1+i, 2i, -1+i)$ pour unique solution.

3) Cas général

La méthode que nous avons employée dans les exemples précédents s'appelle la méthode du pivot de Gauss. Elle permet de mettre un système sous forme triangulaire.

- On commence par échanger éventuellement deux lignes ou permuter éventuellement le rôle de deux inconnues pour se ramener à un système dont le premier coefficient (celui en haut à gauche) est non nul. On l'appelle le premier pivot.
  ⚠ Si c'est déjà le cas, on ne fait rien !
- Supposons que x_1 est la première inconnue et $a_{1,1}$ le premier pivot. On annule toute la colonne sous $a_{1,1}x_1$: pour tout $k \in [\![2\,;n]\!]$, on effectue l'opération élémentaire $L_k \leftarrow a_{1,1}L_k - a_{k,1}L_1$ (ou $L_k \leftarrow L_k - \dfrac{a_{k,1}}{a_{1,1}}L_1$).
- Il y a alors deux possibilités :
  - ⋆ soit le système est triangulaire et on s'arrête.
  - ⋆ sinon on ne touche plus à la première ligne et on applique l'algorithme précédent au système obtenu en retirant la première ligne.

Après un nombre fini d'étapes (au plus $\min(p, n-1)$ si c'est un système linéaire de n équations à p inconnues), on obtient un système triangulaire de la forme suivante :

$$
\left\{\begin{array}{ccccccccccccccccc}
a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,i}x_i & + & \cdots & + & a_{1,r}x_r & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\
 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,i}x_i & + & \cdots & + & a_{2,r}x_r & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\
 & & & & \ddots & & & & & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & a_{i,i}x_i & + & \cdots & + & a_{i,r}x_r & + & \cdots & + & a_{i,p}x_p & = & b_i \\
 & & & & & & & & \ddots & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & a_{r,r}x_n & + & \cdots & + & a_{r,p}x_p & = & b_r \\
 & & & & & & & & & & & & & & 0 & = & b_{r+1} \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & & & 0 & = & b_n
\end{array}\right.
$$

avec $1 \leqslant r \leqslant \min(n,p)$ et, pour tout $i \in [\![1\,;r]\!]$, $a_{i,i} \neq 0$.

Si $r < n$, alors les équations $b_{r+1} = 0$, ... et $b_n = 0$ sont appelées conditions de compatibilité du système. Le système admet des solutions si et seulement si elles sont vraies. Plus précisément :

- Si l'une d'entre elles est fausse, alors le système est incompatible : il n'a pas de solution.
- Si $b_{r+1} = \cdots = b_n = 0$, alors les conditions de compatibilité du système sont vraies et on peut les omettre. On se retrouve alors avec un système triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls. On a déjà vu comment résoudre ce type de systèmes :
  - ⋆ Ou bien $n = p$ et alors le système admet une unique solution. On l'obtient en procédant par remontées successives ou bien en procédant avec la même méthode mais en « remontant ».
  - ⋆ Ou bien $n < p$ et alors le système admet une infinité de solutions. On obtient la forme de l'ensemble des solutions en procédant par remontées successives ou bien en procédant avec la même méthode mais en « remontant ».

Si $r = n$, alors on a forcément $p \geqslant n$ et il s'agit déjà d'un système triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls.

Remarques :

- L'entier r s'appelle le rang du système. On y reviendra...
- Lorsque l'on dispose d'un système linéaire triangulaire dont les termes diagonaux sont tous non nuls, alors trouver la valeur de x_n, puis x_{n-1}, ..., puis x_1 par remontées successives revient à faire les opérations élémentaires suivante successivement :

$$\begin{gathered} L_{n-1} \leftarrow a_{n,n}L_{n-1} - a_{n-1,n}L_n, \ \ldots \ L_1 \leftarrow a_{n,n}L_1 - a_{1,n}L_n \\ L_{n-2} \leftarrow a_{n-1,n-1}L_{n-2} - a_{n-2,n-1}L_{n-1}, \ \ldots \ L_1 \leftarrow a_{n-1,n-1}L_1 - a_{1,n-1}L_{n-1} \\ \vdots \\ L_1 \leftarrow a_{2,2}L_1 - a_{1,2}L_1 \\ L_n \leftarrow \frac{1}{a_{n,n}}L_n, \ L_{n-1} \leftarrow \frac{1}{a_{n-1,n-1}}L_{n-1}, \ \ldots \ L_2 \leftarrow \frac{1}{a_{2,2}}L_2, \ L_1 \leftarrow \frac{1}{a_{1,1}}L_1. \end{gathered}$$

  Ainsi tout système peut se résoudre uniquement via une succession d'opérations élémentaires sur les lignes. Cette remarque est importante pour l'inversion de matrice (cf. méthode de Gauss-Jordan dans le chapitre 20).

Nous avons démontré au passage le théorème suivant :

Théorème. *Si (S) est un système linéaire, alors on est toujours dans l'un des trois cas suivants :*

- *ou bien (S) ne possède aucune solution.*
- *ou bien (S) possède une unique solution.*
- *ou bien (S) possède une infinité de solutions.*

Si (S) est homogène, alors :

- *ou bien (S) possède $(0, \ldots, 0)$ pour unique solution.*
- *ou bien (S) possède une infinité de solutions.*

Remarques :

- Si un système admet deux solutions, alors il en admet une infinité.
- Il y a encore beaucoup de choses à dire sur les systèmes, notamment sur les propriétés de leurs ensembles de solutions. Nous en reparlerons dans les chapitres 20 et 34.