Chapitre 7

Sommes et produits

> La plupart des propriétés sont intuitives et nous ne les montrerons pas. Leurs preuves sont cependant faciles (mais fastidieuses) par récurrence sur le nombre de termes.

L'objectif de ce chapitre est de manipuler et calculer des sommes et des produits... constitués d'un « grand » nombre de termes.

I Sommes de nombres

1) Notation $\sum$

Définition. *Soient p et n des entiers relatifs tels que $p \leqslant n$. Soient $x_p, \dots, x_n$ des nombres complexes. On note*

$$\sum_{k=p}^{n} x_k = x_p + \cdots + x_n.$$

Cette notation se lit « somme des x_k pour k allant de p à n ». On dit que k est l'indice de la somme, que p est la borne inférieure de la somme, que n est sa borne supérieure et que, pour tout $k \in [\![p\,;n]\!]$, x_k est le terme d'indice k.

Exemples :

- *Si $n \in \mathbb{N}$, la somme des entiers de 0 à n se note*
- *La somme $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots + 2048$ se note encore*
- *La somme $1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{25} + \dfrac{1}{36} + \dfrac{1}{49} + \dfrac{1}{64}$ se note*
- *La somme $-4 - 3 - 2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4$ se note*
- *La somme $3^4 + 4^5 + 5^6 + 6^7 + 7^8$ se note*
- $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + \sin(\pi) + \sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) + \sin\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) + \sin(2\pi)$ *se note*

> Cette somme pourrait également être écrite $\sum_{k=4}^{8} (k-1)^k$. C'est le principe de changement d'indice (on en reparle dans le paragraphe I.3.b).

> La notation avec des pointillés n'est pas interdite pour autant lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. On l'utilisera notamment au début pour se familiariser avec la notation $\sum$ et on verra que, parfois, écrire la somme avec des pointillés permet plus facilement de conjecturer sa valeur.

Remarques :

- Cette nouvelle notation est utile car elle facilite grandement les calculs grâce à certaines propriétés que nous allons explorer dans ce chapitre. Par ailleurs elle permet de lever certains ambiguïtés que présente la notation avec des pointillés.

  Par exemple, si $n \in \mathbb{N}^*$, quand on écrit $1 + 2 + \cdots + 2^n$, parle-t-on de la somme des entiers de 1 à 2^n, ou ne somme-t-on que les puissances de 2 ? Avec la notation $\sum$, il n'y a plus aucune ambiguïté : il s'agirait respectivement de $\sum_{k=1}^{2^n} k$ et de $\sum_{k=0}^{n} 2^k$.
- Dans la famille $(x_k)_{p \leqslant k \leqslant n}$ et dans la somme $\sum_{k=p}^{n} x_k$, il y a $n - p + 1$ termes.
- Si $p = n$, la somme $\sum_{k=p}^{n} x_k$ est tout simplement x_n.

On reparle dans quelques lignes de cette convention.

- Si $p > n$, on adopte la convention que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} x_k = 0$.
- Dans la notation $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} x_k$, l'indice k est une variable muette (c'est-à-dire locale, interne à la somme). En particulier :
  - ⋆ On peut la remplacer par n'importe quelle autre variable non déjà utilisée (pas p, n ou x ici) :
$$\sum_{k=p}^{n} x_k = \sum_{i=p}^{n} x_i = \sum_{j=p}^{n} x_j = \sum_{y=p}^{n} x_y = \sum_{\heartsuit=p}^{n} x_\heartsuit$$
  - ⋆ L'indice d'une somme n'existe pas en dehors de la somme. Ainsi :
    - — L'indice d'une somme ne doit **jamais** être introduit (mais les bornes de la somme, si elles sont variables, oui).
    - — Le résultat du calcul d'une somme ne peut en aucun cas dépendre de l'indice.

      Par exemple :
$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n$$
      et on voit bien que cette somme ne dépend pas du tout de k (mais seulement de n, la borne supérieure de la somme, qui doit avoir été introduite au préalable) ?

Cette notation se généralise ainsi :

Cela signifie que, pour chaque $i \in I$, on se donne un nombre complexe x_i.

Définition. *Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes indexée par un ensemble I fini et non vide. On note $\displaystyle\sum_{i \in I} x_i$ la somme de tous les éléments de la famille.*

Cette notation se lit « somme des x_i pour i appartenant à I ». On dit que i est l'indice de la somme, que I est l'ensemble des indices de la somme et que, pour tout $i \in I$, x_i est le terme d'indice i.

Exemple : *Si $I = \{-4; 1; 6; 7; 11; 100\}$, alors*
$$\sum_{i \in I} i^2 = \boxed{}$$

Remarques :

- Chaque indice i n'apparaît qu'une seule fois dans la somme. De plus la commutativité de l'addition dans $\mathbb{R}$ fait qu'il n'est pas nécessaire de préciser l'ordre dans lequel on effectue la somme.
- L'ensemble I doit être fini. S'il est infini alors l'existence de la somme se pose. Les chapitres 27 et 39 seront consacrés justement aux sommes infinies.
- Toutes les remarques ci-dessus s'appliquent. En particulier l'indice i de $\displaystyle\sum_{i \in I} x_i$ est muet (on peut le remplacer par une autre variable, on ne doit jamais l'introduire et le résultat de la somme ne peut pas dépendre de i).
- Lorsque l'on somme des nombres complexes écrit « sous la forme $a + ib$ ou $re^{i\theta}$ » , il est vivement conseillé de ne pas utiliser l'indice i pour la somme. Même problème avec l'indice j, si on est en présence du complexe j.
- Si on note $n = \mathrm{card}(I)$, alors on peut numéroter les éléments de I, c'est-à-dire écrire I sous la forme $\{i_1; i_2; \dots; i_n\}$. Alors
$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} = x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_n}.$$

On reparlera de numérotation dans le chapitre 30.

- Remarque toute bête mais très utile : si l'un des termes d'une somme est nul, on peut enlever ce terme de la somme et donc l'indice correspondant dans I. De même, on peut ajouter un terme nul et donc un indice dans I qui correspond à ce terme.
- Lorsque $I = \varnothing$, on adopte la convention que $\displaystyle\sum_{i \in I} x_i = 0$.

Cette convention est naturelle puisque, lorsque l'on a retranché tous les termes à une somme (donc quand on a vidé l'ensemble de ses indices), il reste 0

On peut même encore généraliser la notation ainsi :

Définition. *Soit E un ensemble non vide. Soit P une propriété portant sur un nombre fini d'éléments de E. Soit $(x_k)_{k \in E}$ une famille de complexes indexée par E. On note $\displaystyle\sum_{k \in E,\, P(k)} x_k$ la somme de tous les termes de la famille dont l'indice vérifie la propriété P.*

C'est la même chose que $\displaystyle\sum_{i \in I} x_i$, en notant

$$I = \{k \in E \,|\, P(k)\}$$

qui est fini par hypothèse.

Exemples :

- $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant 10 \\ k \text{ impair}}} k^2 = \boxed{}$
- $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant 40 \\ k \text{ premier}}} k = \boxed{}$

Remarque : L'avantage de cette notation est que l'on peut sommer des termes que l'on ne connaît pas explicitement.

Par exemple,

$$\sum_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ x^5 - 3x - 1 = 0}} x$$

est la somme des réels solutions de l'équation $x^5 - 3x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Une rapide étude de fonction couplée au corollaire du TVI prouve que cette somme comporte trois termes car l'équation $x^5 - 3x - 1 = 0$ a trois solutions. Cependant, on ne les connaît pas, ce qui n'empêche pas de les sommer !

2) Premières sommes usuelles

a) Somme d'un terme constant

Si a est un nombre complexe et n un entier naturel non nul, alors

$$\underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n \text{ termes}} = n \times a$$

Autrement dit :

Proposition. *Soit $a \in \mathbb{C}$. Soit I un ensemble fini à n éléments. Alors*

$$\sum_{i \in I} a = n \times a.$$

Cela peut sembler surprenant puisque la terme sommé ne dépend pas de i. Il s'agit simplement du cas particulier où $x_i = a$ pour tout $i \in I$.

En particulier :

Proposition. *Soit $a \in \mathbb{C}$. Soient p et n des entiers naturels tels que $p \leqslant n$. Alors :*

$$\sum_{k=1}^{n} a = n \times a, \qquad \sum_{k=0}^{n} a = (n+1) \times a, \qquad \sum_{k=p}^{n} a = (n-p+1) \times a.$$

Inutile de retenir par cœur ces formules. Il suffit de retenir que « somme d'un terme constant $=$ le nombre de termes $\times$ le terme constant »

Exemples : *Si n et i désignent des entiers naturels non nuls, alors :*

$$\sum_{k=2}^{100} 1 = \boxed{}, \qquad \sum_{k=1}^{n} n = \boxed{}, \qquad \sum_{k=1}^{n} i = \boxed{}.$$

b) Sommes des premiers entiers, carrés d'entiers, cubes d'entiers

On a déjà montré (deux fois) le résultat suivant dans le chapitre 2.

Ne pas confondre
$$\sum_{k=1}^{n} n = n^2$$
et
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$
Il suffit de bien faire attention à qui est l'indice de sommation.

Théorème (somme des premiers entiers). *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*
$$\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Il faut aussi connaître les sommes des premiers carrés et premiers cubes.

Nous verrons en TD d'autres méthodes pour obtenir ces formules sans avoir besoin de connaître leur valeur au préalable (puis avoir recours à une récurrence). Nous verrons que l'on peut obtenir, de proche en proche, la somme des premiers carrés, des premiers cubes, des premières puissances quatrième, des premières puissances cinquièmes, etc. Mais rapidement les formules deviennent compliquées à retenir.

Théorème (somme des premiers carrés d'entiers). *sans utiliser de démonstrations par récurrence et qui, surtout, permettent de Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Démonstration. Déjà ces deux sommes sont bien égales puisqu'elles ne diffèrent que du terme $0^2 = 0$. Ensuite raisonnons par récurrence.

□

Formule non explicitement dans le programme, mais ultra classique (donc à savoir retrouver et montrer).

Théorème (somme des premiers cubes d'entiers). *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*
$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Démonstration. Déjà ces deux sommes sont bien égales puisqu'elles ne diffèrent que du terme $0^2 = 0$. Ensuite raisonnons par récurrence.

c) Sommes géométriques

La somme commence à 0. Contrairement aux sommes du paragraphe précédent, la faire commencer à l'indice 0 ou l'indice 1 change tout puisque $0^0 = 1$ et non pas 0.

Théorème (sommes géométriques). *Soit $x \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} n+1 & \textit{si} \quad x = 1 \\ \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration.

Il existe une formule plus générale :

Il n'est pas conseillé de l'apprendre par coeur car nous verrons un moyen simple de la retrouver à partir du théorème précédent dans le paragraphe suivant. Pour la retenir malgré tout, remarquons que $n+1$ devient $n-p+1$ (il s'agit du nombre de termes) et que l'on multiplie par x^p (le premier terme).

Théorème (sommes géométriques). *Soit $x \in \mathbb{C}$. Pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leqslant n$,*

$$\sum_{k=p}^{n} x^k = \begin{cases} n-p+1 & \textit{si} \quad x = 1 \\ x^p \, \dfrac{1-x^{n-p+1}}{1-x} & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Reportée au paragraphe I.3.a en utilisant la linéarité et au paragraphe I.3.c en utilisant des sommes dites télescopiques (mais une récurrence fonctionne aussi bien sûr). □

Exemples : *On a*

$$\sum_{k=2}^{2025} \frac{1}{4^k} = \boxed{}$$

Théorème. *Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Soit ω une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unicité qui n'est pas 1. Alors*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0.$$

DÉMONSTRATION.

□

Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, cette somme vaut simplement $n+1$ (c'est une somme d'un terme constant).

Exemple : *Un immense classique : pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, calculons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$.*

Nous allons poursuivre cet exemple dans le paragraphe I.3.a pour calculer les sommes de $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$ pour k allant 0 à n (en prenant les parties réelles et entières de cette somme).

d) Factorisation de $a^n - b^n$

Ne pas confondre cette formule avec la formule du binôme de Newton (cf. paragraphe II.1) qui développement $(a \pm b)^n$.

Théorème (factorisation de $a^n - b^n$). *Pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

DÉMONSTRATION. Reportée au paragraphe I.3.c en utilisant des sommes dites télescopiques (mais une récurrence fonctionne aussi bien sûr). □

Remarques :

- Avec des pointillés, cela donne :

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Pour montrer la formule, on peut aussi voir qu'il s'agit d'une somme géométrique en écrivant que, lorsque $b \neq 0$, pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$,

$$a^{n-1-k}b^k = a^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^k.$$

Il faut donc traiter les cas $b=0$ et $a=b$ séparément.

- Si n est impair, alors $(-1)^n = -1$ donc

$$a^n + b^n = a^n - (-b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a^{n-1-k}b^k = (a+b)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a^k b^{n-1-k}.$$

Exemples :

- *Si $n=2$, on retrouve l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.*
- *Si $n=3$, on obtient $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ et $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.*
- *Si $n=4$, on obtient $a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$.*

3) Propriétés des sommes

Dans ce paragraphe on se donne $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ des familles de complexes qui sont indexées par un ensemble fini I.

a) Généralisation des propriétés algébriques des sommes

Commençons par un résultat totalement intuitif (qui se démontre aisément par récurrence en utilisant l'associativité de l'addition) :

Pour sommer tous les $n-p+1$ nombres à disposition, on somme les $m-p+1$ premiers, puis on somme les $n-m$ suivants. Enfin on somme les deux sommes...

Proposition (relation de Chasles). *Supposons que $I=[\![p\,;n]\!]$ avec p et n des entiers relatifs tels que $p<n$. On a :*

$$\forall m \in [\![p\,;n]\!], \qquad \sum_{k=p}^{n} x_k = \sum_{k=p}^{m} x_k + \sum_{k=m+1}^{n} x_k.$$

Remarques :

- La plupart des sommes usuelles du cours « commencent à 0 ». Lorsqu'on rencontre une somme pour laquelle ce n'est pas le cas, un grand classique (qui découle de la relation de Chasles) est de la faire démarrer à 0 en ajoutant (et donc en enlevant) les termes manquants :

  Il manque les deux premiers termes. Réflexe : on les ajoute à la somme et on les enlève.

  Par exemple, si $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$,

  $$\sum_{k=2}^{n} 3^k =$$

  Ici il manque les termes de rangs 0 à $p-1$ (attention pas p).

  Plus généralement, si n et p sont des entiers naturels tels que $p<n$ et si $x \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$,

  $$\sum_{k=p}^{n} x^k = \qquad .$$

  On vient de montrer le résultat admis dans le paragraphe I.2.c.

- La relation de Chasles est aussi très pratique pour faire des cas dans une somme, par exemple lorsque la formule définissant définissant x_k change selon les valeurs de k.

  Par exemple,

  $$\sum_{k=0}^{2n} |k-n| =$$

On ne peut en aucun cas faire des cas « en dehors de la somme » : l'indice n'existe que dans la somme (en parler à l'extérieur de la somme n'a aucun sens). Dans cet exemple, écrire : si $k \leqslant n$, alors $|k-n| = n-k$ donc

$$\sum_{k=0}^{2n}|k-n| = \sum_{k=0}^{2n}(n-k)$$

est totalement faux !

Il sera inutile de passer aux pointillés lorsque l'on aura vu les changements d'indice dans le paragraphe I.3.b.

Ce principe se généralise ainsi :

Proposition (sommation par paquets). *Soient J et K deux sous-ensembles **disjoints** de I tels que $I = J \cup K$. Alors*

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in J} x_i + \sum_{i \in K} x_i.$$

Encore une fois très intuitif : pour sommer tous les termes, on fait deux paquets (ceux indexés par les éléments de J et deux indexés par les éléments de K), on somme les éléments de chaque paquet puis on somme les deux sommes.

⚠ Si J et K ne sont pas disjoints, on somme des termes en double ! Si $J \cup K \neq I$, on n'oublie des termes !

Remarque : Le cas le plus classique de sommation par paquet est de séparer la somme en la somme des termes d'indice pair et la somme des termes d'indice impair.

Par exemple, si $I = [\![1\,;n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \text{ pair}}} x_i + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \text{ impair}}} x_i$$

On reviendra sur cette formule dans le prochain paragraphe.

Les résultats suivants découlent des propriétés (associativité, commutativité, distributivité) des sommes et produits de nombres et se montrent par récurrence sur le nombre de termes :

Proposition (factorisation). *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $\displaystyle\sum_{i \in I} \lambda x_i = \lambda \sum_{i \in I} x_i$.*

On retient que l'on peut donc « sortir d'une somme » toute constante (c'est-à-dire tout nombre ne dépendant pas de l'indice de sommation) multiplicative.

⚠ Surtout pas une constante additive :

$$\sum_{i \in I} (x_i + \lambda) = \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} \lambda$$

et cette deuxième somme est égale à $\lambda \times \mathrm{card}(I)$, et surtout pas λ (à moins que I ne contienne qu'un indice mais alors ce n'est pas une vraie somme).

Proposition (somme d'additions). $\displaystyle\sum_{i \in I} (x_i + y_i) = \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i.$

Et donc, on en déduit :

Proposition (linéarité de la somme). *Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$,*

$$\sum_{i \in I} (\lambda x_i + \mu y_i) = \lambda \sum_{i \in I} x_i + \mu \sum_{i \in I} y_i.$$

Exemple : *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$\sum_{k=1}^{n} k(1+3k) = \cancel{\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} (1+3k)\right)}$$

⚠ La formule barrée ci-contre est totalement fausse mais est hélas une erreur classique de débutant. La somme d'un produit n'est pas (sauf cas particuliers) le produit des sommes... pensez aux identités remarquables.

Oups... recommençons :

Pour utiliser la formule de linéarité « de droite à gauche », c'est-à-dire transformer l'addition de deux sommes en une seule somme, il faut bien vérifier que les deux sommes ont les mêmes bornes. Sinon on commence d'abord par s'y ramener quitte à ce qu'il reste quelques termes dans l'addition en dehors de la somme.

Par exemple

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i = x_0 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) + y_n = x_0 + y_n + \sum_{i=1}^{n-1}(x_i + y_i).$$

Les propriétés de la conjugaison complexe et des parties réelles et imaginaires se généralisent aussi à une somme d'un nombre fini de complexes :

Proposition (linéarité de la conjugaison, des parties réelles et imaginaires).

$$\overline{\sum_{i\in I} x_i} = \sum_{i\in I} \overline{x_i}, \qquad \mathrm{Re}\left(\sum_{i\in I} x_i\right) = \sum_{i\in I} \mathrm{Re}(x_i), \qquad \mathrm{Im}\left(\sum_{i\in I} x_i\right) = \sum_{i\in I} \mathrm{Im}(x_i).$$

Ces deux sommes sont des immenses classiques à savoir recalculer sans problème avec cette méthode (on se ramène à la somme géométrique

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

que l'on calcule via la méthode de l'arc-moitié, puis on passe aux parties réelles ou imaginaires). On peut bien sûr tenter de les montrer par récurrence si on connaît leurs formules (mais c'est un peu technique). On verra en TD une autre méthode qui consiste à multiplier ces sommes par $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$, faire apparaître des sommes télescopiques et utiliser des formules de trigonométrie.

Exemple : *Dans le paragraphe précédent, nous avons calculé que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{nx}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

b) Changement d'indice

En fait il y a plusieurs façons d'écrire une somme. Par exemple, si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille de complexes, alros

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= x_{0+1} + x_{1+1} + x_{2+1} + \cdots + x_{n-1+1} \\ &= x_{n+1-n} + x_{n+1-(n-1)} + x_{n+1-(n-2)} + \cdots + x_{n+1-1} \end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=0}^{n-1} x_{j+1} = \sum_{k=1}^{n} x_{n+1-k}$$

On parle de changement d'indice. Il s'agit simplement d'une renumérotation des indices des termes sommés. Il y a trois types possibles de changement d'indices qui sont licites sans se poser de questions :

Proposition (changement d'indice). *Soient p, n et q des entiers relatifs tels que $p \leqslant n$. Soit $(x_i)_{p \leqslant i \leqslant n}$ une famille de complexes. Nous avons*

- ***Changement d'indice** $k = i + q$ **(c'est-à-dire** $i = k - q$**).***

$$\sum_{i=p}^{n} x_i = \sum_{k=p+q}^{n+q} x_{k-q}.$$

- ***Changement d'indice** $k = i - q$ **(c'est-à-dire** $i = k + q$**).** Si $q \leqslant p$, alors*

$$\sum_{i=p}^{n} x_i = \sum_{k=p-q}^{n-q} x_{k+q}.$$

- ***Changement d'indice** $k = q - i$ **(c'est-à-dire** $i = q - k$**).** Si $q \geqslant n$, alors*

$$\sum_{i=p}^{n} x_i = \sum_{k=q-n}^{q-p} x_{q-k}.$$

Il ne soit rester aucune trace de l'indice d'origine.

Remarque : Il est fortement conseillé de toujours vérifier un changement d'indice à l'aide du premier et du dernier terme. Pour ne pas se tromper, on peut écrire ce que donne le changement d'indice sur les inégalités $p \leqslant i \leqslant n$:

- Si on pose $i = k - q$ (c'est-à-dire $k = q + i$) alors, lorsque i varie de p à n, k varie de $q + p$ à $q + n$.
- Si on pose $i = k + q$ (c'est-à-dire $k = i - q$) alors, lorsque i varie de p à n, k varie de $p - q$ à $n - q$.
- Si on pose $i = q - k$ (c'est-à-dire $k = q - i$) alors, lorsque i varie de p à n, k varie de $q - n$ à $q - p$.

On inverse bien $q - p$ et $q - n$ car, par convention, on met la borne inférieure de la somme en dessous.

Exemples :

- *Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (n - j + 1)^2$. On peut développer puis couper cette somme en trois sommes (même 6 si on s'y prend vraiment mal) par linéarité :*

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} (n - j + 1)^2 &= \sum_{j=1}^{n} ((n + 1)^2 - 2(n + 1)j + j^2) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (n + 1)^2 - 2(n + 1) \sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} j^2 \\
&= n \times (n + 1)^2 - 2(n + 1) \frac{n(n + 1)}{2} + \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} \\
&= \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.
\end{aligned}$$

  ... ou bien :

- *Faisons successivement les changements d'indice $k = i - 1$, $j = k + 2$ et $\ell = 9 - j$:*

Cette somme est juste donnée à titre d'exemple de changements d'indices mais sans doute incalculable explicitement.

⚠ On pourrait penser à d'autres types de changement d'indice mais en fait les trois types ci-dessus sont les seuls autorisés en toute circonstance.

Par exemple :

- ⋆ *si on tente de faire le changement d'indice $k = 2i$ dans la somme $\sum_{i=1}^{n} x_{2i}$, alors on serait tenté d'écrire $\sum_{k=2}^{2n} x_k$. Mais cette somme contient des termes de rangs impairs, ce qui n'est pas le cas de la somme d'origine. En fait on a $\sum_{i=1}^{n} x_{2i} = \sum_{k \in K} x_k$ avec $K = \{2; 4; 6; 8; \cdots; 2n\}$. Ce n'est pas très pratique mais possible.*
- ⋆ *si on tente de faire le changement d'indice $k = (i-2)^2$ dans la somme $\sum_{i=0}^{n} (i-2)^4$, alors on serait tenté d'écrire $\sum_{i=2}^{(n-2)^2} k^2$. Mais cette somme ne contient pas le terme $1 = 1^2$, alors que la somme d'origine oui lorsque $i = 1$. Même écrire $\sum_{i=1}^{(n-2)^2} k^2$ est faux puisque $1 = 1^2$ n'apparaît qu'une seule fois dans la somme tandis que la somme d'origine commence par $2^4 + 1^4 + 0^4 + 1^4 + 2^4 + \cdots$ donc 1 apparaît deux fois (tout comme 2^4). Et puis, comme dans l'exemple précédent, il y a trop de termes dans cette nouvelle somme.*

La notion de bijection (vue dans le chapitre 4 pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) se généralise bien à des ensembles quelconques. On dit que σ est une bijection de J dans I si :
- à tout élément j de J, on associe un unique élément dans I, noté $\sigma(j)$.
- pour tout élément $i \in I$, il existe un unique $j \in J$ tel que $i = \sigma(j)$.

Nous verrons dans le chapitre 15, que si $(x_i)_{i \in I}$ est indexé par un ensemble fini I et si il existe une bijection σ d'un ensemble J dans I, alors

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in j} x_{\sigma(j)}.$$

Par exemple, si $I = \{3; 7; 11\}$, $J = \{1; 2; 3\}$ et σ est tel que $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 7$ et $\sigma(3) = 11$, alors

$$\sum_{i \in I} x_i = x_3 + x_7 + x_{11} = x_{\sigma(1)} + x_{\sigma(2)} + x_{\sigma(3)} = \sum_{j=1}^{3} x_{\sigma(j)}.$$

Les trois changements d'indice de la proposition fournissent en fait les trois bijections les plus simples d'une partie de $\mathbb{N}$ dans une autre. Dans la pratique, on fait très majoritairement ces trois types, ainsi que les changements d'indices $i = 2k$ (respectivement $i = 2k+1$) lorsque l'on sait que tous les rangs sont pairs (respectivement impairs) :

.

Dans la première somme on a fait le changement d'indice $i = 2k$ (et, comme i va de 0 à n, k va de 0 à $\frac{n}{2}$... ou plutôt $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$). Dans la deuxième somme on a fait le changement d'indice $i = 2k+1$ (et, comme i va de 1 à n, k va de 0 à $\frac{n-1}{2}$... ou plutôt $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$).

Exemple : *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$\sum_{j=0}^{2n} (-1)^j j =$$

Pour finir, disons que tout cela peut sembler abstrait et compliqué au début mais, encore une fois, un changement d'indice n'est rien d'autre qu'une renumérotation des indices (qui nous arrange pour le calcul).

c) Sommes télescopiques

D'autres sommes télescopiques :

$$\sum_{k=p}^{n}(x_k - x_{k+1}) = x_p - x_{n+1}$$

$$\sum_{k=p}^{n}(x_k - x_{k-1}) = x_{p-1} - x_n.$$

Proposition (somme télescopique). *Soient p et n des entiers relatifs tels que $p \leqslant n$. Soit $(x_k)_{p-1 \leqslant k \leqslant n+1}$ une famille de complexes. Alors*

$$\sum_{k=p}^{n}(x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_p$$

et

$$\sum_{k=p}^{n}(x_k - x_{k-1}) = x_n - x_{p-1}$$

On dit qu'il s'agit de sommes télescopiques.

On voit que chaque terme de la somme, à partir de x_p, est annulé par un autre terme... sauf le dernier. Il reste donc $x_{n+1} - x_p$.

Avant de donner une preuve rigoureuse, arrêtons nous sur le fait que ce résultat est très simple si on l'écrit avec des pointillés :

L'autre peut aussi s'obtenir par changement de variable $i = k - 1$ à l'aide de la première.

Démonstration. Montrons la première (l'autre est analogue).

Exemples :

- *Calculons la somme* $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)}$.

- *Soient a et b des complexes et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il est temps de démontrer la formule*

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k},$$

temporairement admise au paragraphe I.2.d.

- *Donnons une autre preuve de la formule pour les sommes géométriques de raison $x \in \mathbb{C} \backslash \{1\}$ via une somme télescopique : si p et n sont des entiers naturels tels que $p \leqslant n$, alors*

d) Sommes de réels et relations d'ordre

Il n'y a pas d'inégalités dans $\mathbb{C}$! ! ! !

Proposition (somme d'inégalités). *Soient $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$ des familles de **réels** telles que, pour tout $i \in I$, $x_i \leqslant y_i$. Alors*

$$\sum_{i \in I} x_i \leqslant \sum_{i \in I} y_i.$$

Si, de plus, il existe $i_0 \in I$ tel que $x_{i_0} < y_{i_0}$, alors l'inégalité ci-dessus est stricte.

La somme S_n ci-contre (que l'on ne peut pas calculer explicitement) sera revue plusieurs fois cette année. Nous montrerons qu'elle tend vers $\frac{\pi^2}{6}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exemple : *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Montrons que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par 2.*

Pas de problème ici si ce ne sont pas des réels puisqu'il y a des modules (donc ce sont bien des inégalités entre réels).

Proposition (inégalité triangulaire). *Soient $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$ des familles de complexes. On a*

$$\left| \sum_{i \in I} x_i \right| \leqslant \sum_{i \in I} |x_i|.$$

4) Sommes doubles et interversion de sommes

Dit autrement, A est un ensemble de couples.

Dans tout ce paragraphe A désigne une partie finie non vide du produit cartésien de deux ensembles, la plupart du temps une partie finie de $\mathbb{N}^2$ ou le produit cartésien de deux ensembles finis.

C'est-à-dire, pour tout $(i, j) \in A^2$, on se donne un complexe $x_{i,j}$

On se donne aussi $(x_{i,j})_{(i,j) \in A}$ une famille de complexes indexée par A.

a) Notion de somme double

Tous les résultats des paragraphes précédents s'appliquent : on remplace I par A et i par (i,j) (possible puisque I était quelconque fini).

Définition. *On dit que la somme* $\displaystyle\sum_{(i,j)\in A} x_{i,j}$ *est une somme double.*

Exemple : *Supposons que* $A = [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$ *avec* n *et* p *des entiers naturels non nuls. Pour tous* $(i,j)\in A$, *notons* $x_{i,j} = ij^2$. *Rangeons les termes dans un tableau :*

$i \backslash j$	1	2	3	$\cdots$	p
1	1	4	9	$\cdots$	p^2
2	2	8	18	$\cdots$	$2p^2$
3	3	12	27	$\cdots$	$3p^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
n	n	$4n$	$9n$	$\cdots$	np^2

Calculer la somme $\displaystyle\sum_{(i,j)\in A} ij^2$ *consiste donc à sommer tous les termes des cases grises.*

Explorons dans la suite des parties A avec des formes particulières où il existe des formules de calcul.

b) Le cas d'un domaine rectangulaire

Soient m, n, p, q des entiers relatifs tels que $p \leqslant n$ et $q \leqslant m$.

On parle de domaine rectangulaire (cf. illustration ci-dessous avec un tableau).

Définition.

- *Si* $A = [\![p\,;n]\!] \times [\![q\,;m]\!]$ *alors on note* $(x_{i,j})_{\substack{p\leqslant i\leqslant n\\ q\leqslant j\leqslant m}}$ *au lieu de* $(x_{i,j})_{(i,j)\in A}$ *et*
$$\sum_{\substack{p\leqslant i\leqslant n\\ q\leqslant j\leqslant m}} x_{i,j} \quad \text{au lieu de} \quad \sum_{(i,j)\in A} x_{i,j}.$$
- *Si* $A = [\![p\,;n]\!]^2$, *alors on note* $(x_{i,j})_{p\leqslant i,j\leqslant n}$ *au lieu de* $(x_{i,j})_{(i,j)\in A}$ *et*
$$\sum_{p\leqslant i,j\leqslant n} x_{i,j} \quad \text{au lieu de} \quad \sum_{(i,j)\in A} x_{i,j}.$$

Le nombre de termes intervenant dans cette somme est égal au nombre de termes dans le tableau. Il y en a $(n-m+1)(q-p+1)$ puisqu'il s'agit d'un tableau à $n-m+1$ lignes et $q-p+1$ colonnes.

Illustrons ce cas avec un tableau :

$i \backslash j$	q	$q+1$	$\cdots$	$m-1$	m
p	$x_{p,q}$	$x_{p,q+1}$	$\cdots$	$x_{p,m-1}$	$x_{p,m}$
$p+1$	$x_{p+1,q}$	$x_{p+1,q+1}$	$\cdots$	$x_{p+1,m-1}$	$x_{p+1,m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$n+1$	$x_{n-1,q}$	$x_{n-1,q+1}$	$\cdots$	$x_{n-1,m-1}$	$x_{n-1,m}$
n	$x_{n,q}$	$x_{n,q+1}$	$\cdots$	$x_{n,m-1}$	$x_{n,m}$

Pour sommer les éléments de la famille (c'est-à-dire les éléments des cases grises du tableau ci-dessus), on peut décider de

- sommer d'abord chaque ligne ($\sum_{j=p}^{q} x_{i,j}$ pour tout $i \in [\![m\,;n]\!]$) puis de prendre la somme de tous les résultats : $\displaystyle\sum_{i=m}^{n}\left(\sum_{j=p}^{q} x_{i,j}\right)$.

- ou bien sommer d'abord chaque colonne ($\sum_{i=m}^{n} x_{i,j}$ pour tout $j \in [\![p\,;q]\!]$) puis de prendre la somme de tous les résultats : $\displaystyle\sum_{j=p}^{q}\left(\sum_{i=m}^{n} x_{i,j}\right)$.

Il y a trois formules dans cette formule :
- les deux égalités qui disent que cette somme double peut s'obtenir en calculant deux sommes consécutivement (plus précisément la somme d'une somme).
- mais surtout il y a le fait que la somme tout à gauche est égale à la somme tout à droite. Autrement dit, on peut toujours intervertir deux sommes finies dès que les bornes de la somme intérieure ne dépendant pas de l'indice de la somme intérieur.

Résumons cela :

Théorème (de Fubini).

$$\sum_{i=q}^{m}\left(\sum_{j=p}^{n} x_{i,j}\right) = \sum_{\substack{p\leqslant i\leqslant n\\ q\leqslant j\leqslant m}} x_{i,j} = \sum_{j=p}^{n}\left(\sum_{i=q}^{m} x_{i,j}\right).$$

Exemple : *Calculons* $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ n+1\leqslant j\leqslant 2n}} (j-3i^2)$.

Plus généralement, on a le résultat suivant :

C'est comme si on avait un tableau rectangulaire mais avec des trous. Il suffit de mettre des 0 dans les cases vides (plus précisément, on note $n = \max(I)$, $p = \min(I)$, $m = \max(J)$ et $q = \min(J)$ et on pose $x_{i,j} = 0$ pour tout $(i,j) \in (\llbracket p\,;n\rrbracket \times \llbracket q\,;m\rrbracket) \setminus (I \times J))$ et on se ramène au théorème précédent.

Théorème. *Soient I et J des ensembles finis non vides et soit $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de complexes. Alors*

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} x_{i,j}\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j} = \sum_{j\in I}\left(\sum_{i\in J} x_{i,j}\right).$$

c) Le cas d'un domaine triangulaire

Soit p et n des entiers relatifs tels que $p \leqslant n$.

On parle de domaine triangulaire (supérieur) (cf. illustration ci-dessous avec un tableau).

Définition. *Si $A = \{(i,j) \in \llbracket p\,;n\rrbracket^2 \,|\, i \leqslant j\}$, alors on note $(x_{i,j})_{p\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ au lieu de $(x_{i,j})_{(i,j)\in A}$ et*

$$\sum_{p\leqslant i\leqslant j\leqslant n} x_{i,j} \quad \text{au lieu de} \quad \sum_{(i,j)\in A} x_{i,j}.$$

Illustrons ce cas avec un tableau :

$i \backslash j$	p	$p+1$	$\cdots$	k	$\cdots$	$n-1$	n
p	$x_{p,p}$	$x_{p,p+1}$	$\cdots$	$x_{p,k}$	$\cdots$	$x_{p,n-1}$	$x_{p,n}$
$p+1$		$x_{p+1,p+1}$	$\cdots$	$x_{p+1,k}$	$\cdots$	$x_{p+1,n-1}$	$x_{p+1,n}$
$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k				$x_{k,k}$	$\cdots$	$x_{k,n-1}$	$x_{k,n}$
$\vdots$					$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$						$x_{n-1,n-1}$	$x_{n-1,n}$
n							$x_{n,n}$

Moyen mnémotechnique pour retrouver la formule

$$\sum_{p \leqslant i \leqslant j \leqslant n} = \sum_{i=p}^{n} \sum_{j=i}^{n}$$

(c'est analogue pour l'autre) :

• Pour la somme extérieure, **qui ne peut surtout pas dépendre de j (sinon c'est une erreur grave : j ne peut pas exister en dehors de la somme intérieure puisque c'est son indice de sommation)**, on « efface $j \leqslant$ » et il reste $p \leqslant i \leqslant n$. Ainsi i va de p à n.

• Un fois i fixé, on voit que $i \leqslant j \leqslant n$. Ainsi j va de i à n dans la intérieure.

Pour sommer les éléments de la famille (c'est-à-dire les éléments des cases grises du tableau ci-dessus), on peut décider de

- sommer d'abord chaque ligne (on obtient alors $\displaystyle\sum_{j=i}^{n} x_{i,j}$ pour tout $i \in [\![p\,;n]\!]$) puis prendre la somme de tous les résultats : $\displaystyle\sum_{i=p}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} x_{i,j}\right)$.
- ou bien sommer d'abord chaque colonne (on obtient alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{j} x_{i,j}$ pour tout $j \in [\![p\,;n]\!]$) puis prendre la somme de tous les résultats : $\displaystyle\sum_{j=p}^{n}\left(\sum_{i=p}^{j} x_{i,j}\right)$.

Théorème (de Fubini).

$$\sum_{i=p}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} x_{i,j}\right) = \sum_{p \leqslant i \leqslant j \leqslant n} x_{i,j} = \sum_{j=p}^{n}\left(\sum_{i=p}^{j} x_{i,j}\right).$$

Exemple : *Calculons* $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j}$.

<u>Première tentative :</u> $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i\left(\sum_{j=i}^{n}\frac{1}{j}\right)$. *Impasse : on ne connaît pas de formule pour la somme des inverse d'entiers naturels non nuls.*

<u>Deuxième tentative :</u> on intervertit les sommes :

$$\xcancel{S_n = \sum_{j=i}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{j}}$$

Ça n'a aucun sens ! L'indice i n'existe pas hors de la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}$ donc il n'a rien à faire dans $\displaystyle\sum_{j=i}^{n}$. Lorsqu'une borne de la somme intérieure est l'indice de la somme extérieure, on ne peut pas les échanger purement et simplement ! Par contre, on peut se ramener à une somme double :

d) Le cas d'un domaine triangulaire strict

Soit p et n des entiers relatifs tels que $p < n$.

On parle de domaine triangulaire (supérieur) strict (cf. illustration ci-dessous avec un tableau).

Définition. *Si $A = \{(i,j) \in [\![p\,;n]\!]^2 \,|\, i < j\}$, alors on note $(x_{i,j})_{p\leqslant i<j\leqslant n}$ au lieu de $(x_{i,j})_{(i,j)\in A}$ et*

$$\sum_{p\leqslant i<j\leqslant n} x_{i,j} \qquad \text{au lieu de} \qquad \sum_{(i,j)\in A} x_{i,j}.$$

Illustrons ce cas avec un tableau :

$i \backslash j$	p	$p+1$	$p+2$	$\cdots$	k	$k+1$	$\cdots$	$n-1$	n
p		$x_{p,p+1}$	$x_{p,p+2}$	$\cdots$	$x_{p,k}$	$x_{p,k+1}$	$\cdots$	$x_{p,n-1}$	$x_{p,n}$
$p+1$			$x_{p+1,p+2}$	$\cdots$	$x_{p+1,k}$	$x_{p+1,k+1}$	$\cdots$	$x_{p+1,n-1}$	$x_{p+1,n}$
$\vdots$				$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k-1$					$x_{k-1,k}$	$x_{k-1,k+1}$	$\cdots$	$x_{k-1,n-1}$	$x_{k-1,n}$
k						$x_{k,k+1}$	$\cdots$	$x_{k,n-1}$	$x_{k,n}$
$\vdots$							$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-2$								$x_{n-2,n-1}$	$x_{n-2,n}$
$n-1$									$x_{n-1,n}$
n									

Moyen mnémotechnique pour retrouver la formule

$$\sum_{p\leqslant i<j\leqslant n} = \sum_{j=p+1}^{n}\sum_{i=p}^{j-1}$$

(c'est analogue pour l'autre) :

• Pour la somme extérieure, **qui ne peut surtout pas dépendre de i (sinon c'est une erreur grave : i ne peut pas exister en dehors de la somme intérieure puisque c'est son indice de sommation)**, on « efface $\leqslant i$ » et il reste $p < j \leqslant n$, c'est-à-dire $p+1 \leqslant j \leqslant n$. Ainsi j va de $p+1$ à n.

• Une fois j fixé, on voit que $p \leqslant i < j$, c'est-à-dire $p \leqslant i \leqslant j-1$. Ainsi i va de p à $j-1$ dans la somme intérieure.

Pour sommer les éléments de la famille (c'est-à-dire les éléments des cases grises du tableau ci-dessus), on peut décider de

- sommer d'abord chaque ligne (on obtient alors $\displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} x_{i,j}$ pour tout $i \in [\![p, n-1]\!]$)

  puis prendre la somme de tous les résultats : $\displaystyle\sum_{i=p}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} x_{i,j}\right)$.

- ou bien sommer d'abord chaque colonne (on obtient alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{j-1} x_{i,j}$ pour tout $j \in [\![p+1, n]\!]$) puis prendre la somme de tous les résultats : $\displaystyle\sum_{j=p+1}^{n}\left(\sum_{i=p}^{j-1} x_{i,j}\right)$.

Théorème (de Fubini).

$$\sum_{i=p}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} x_{i,j}\right) = \sum_{p\leqslant i<j\leqslant n} x_{i,j} = \sum_{j=p+1}^{n}\left(\sum_{i=p}^{j-1} x_{i,j}\right).$$

Exemple : *Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Calculons $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij$.*

On voit que le calcul est plus simple dans la méthode 2 puisqu'on a à faire à des sommes démarrant à un petit indice (démarrer à $i+1$ force à couper la somme en différence de deux sommes). Dans la pratique, on préfère donc la formule

$$\sum_{j=p+1}^{n} \sum_{i=p}^{j-1}$$

à l'autre si possible.

e) Le cas général

Théorème (Fubini). *On se donne A une partie non vide de $I \times J$ avec I et J des ensembles finis et $(x_{i,j})_{(i,j)\times A}$ une famille de complexes. On définit :*

- *pour tout $i \in I$, $L_i = \{j \in J \,|\, (i,j) \in A\}$,*
- *pour tout $j \in J$, $C_j = \{i \in I \,|\, (i,j) \in A\}$.*

Alors

$$\sum_{(i,j)\in A} x_{i,j} = \sum_{i\in I} \sum_{j\in L_i} x_{i,j} = \sum_{j\in J} \sum_{i\in C_j} x_{i,j}.$$

Démonstration. L'idée est encore la même : on range les nombres de la famille dans un tableau (il n'y a un nombre que dans les cases d'indices (i,j) appartenant à A) et, pour chaque ligne i, L_i est alors l'ensemble des indices de colonnes j pour lesquels il y a un terme dans le tableau à l'indice (i,j). La somme $\displaystyle\sum_{j\in L_i} x_{i,j}$ est donc la somme des termes de la ligne i. Puis on somme alors toutes ces sommes pour obtenir la somme de tous les termes dont les indices sont dans A. C'est analogue pour les colonnes. $\square$

f) Un mot sur les sommes multiples

Les sommes doubles se généralisent bien sûr à des sommes triples, quadruples, etc. On essaye de se ramener à une succession de sommes simples.

Par exemple, si $(x_{i,j,k})_{(i,j,k)\in[\![p\,;n]\!]^3}$ est une famille de complexes, alors

$$\sum_{p\leqslant i,j,k\leqslant n} x_{i,j,k} = \sum_{i=p}^{n}\sum_{j=p}^{n}\sum_{k=p}^{n} x_{i,j,k}$$

ou encore

$$\sum_{p\leqslant i<j<k\leqslant n} x_{i,j,k} = \sum_{i=p}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} x_{i,j,k}.$$

5) Multiplication de deux sommes

Soient I et J deux ensembles finis non vides. Soient $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_j)_{j\in J}$ des familles de complexes.

Pour faciliter la compréhension, on aurait pu écrire j à la place de i comme indice de la deuxième somme. Mais dans la pratique, il n'est pas rare d'utiliser le même indice pour multiplier deux sommes. Après tout, ce n'est en aucun cas problématique : ces deux indices vivent des vies séparées donc peuvent avoir le même nom sans interférer l'un avec l'autre.

Proposition (formule de développement/factorisation).

$$\left(\sum_{i\in I} x_i\right)\times\left(\sum_{i\in J} y_i\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j.$$

Démonstration.

$\square$

En particulier, lorsque $I=[\![p\,;n]\!]$ et $J=[\![q\,;m]\!]$, avec m, n, p et q des entiers relatifs tels que $p\leqslant n$ et $q\leqslant m$,

$$\left(\sum_{i=m}^{n} x_i\right)\times\left(\sum_{i=p}^{q} y_i\right) = \sum_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} x_i y_j.$$

Et, en particulier encore,

$$\left(\sum_{i=p}^{n} x_i\right)\times\left(\sum_{i=p}^{n} y_i\right) = \sum_{p\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_j.$$

On s'en convainc facilement en prenant un petit cas particulier :

$$(x_1+x_2)(y_1+x_2)$$
$$=x_1y_1+x_1x_2+x_2y_1+x_2y_2$$

qui n'est pas $x_1y_1+x_2y_2$ (sauf cas particulier).

A ne pas confondre avec :

$$\left(\sum_{i=p}^{n} x_i\right)\times\left(\sum_{i=p}^{n} y_i\right)=\sum_{i=1}^{n} x_iy_i,$$

qui est grossièrement fausse !

En prenant $I=J$ et $(x_i)_{i\in I}=(y_i)_{i\in I}$, on obtient :

Proposition (carré d'une somme). $\displaystyle\left(\sum_{i\in I} x_i\right)^2=\sum_{(i,j)\in I^2} x_ix_j.$

Lorsque a et b sont deux réels, on a $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$. Il s'agit de la somme des carrés et d'un terme appelé « double produit ». Cela se généralise au carré d'un nombre fini de termes :

Il n'y a pas de formule simple pour le cube d'une somme de strictement plus de deux termes (n'en parlons même pas pour des puissances supérieurs).

Proposition. *Soient p et n des entiers relatifs tels que $p<n$. On a :*

$$\left(\sum_{k=p}^{n} x_k\right)^2=\sum_{p\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j=\underbrace{\sum_{k=p}^{n} x_k^2}_{\text{somme des carrés}}+2\underbrace{\sum_{p\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j}_{\text{doubles produits}}.$$

Démonstration. La première égalité découle de la proposition précédente. Ensuite, on coupe la somme double en trois sommes par sommation par paquets :

$$\sum_{p\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j=\underbrace{\sum_{p\leqslant i=j\leqslant n} x_ix_j}_{\text{termes diagonaux}}+\underbrace{\sum_{p\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j}_{\text{termes sur-diagonaux}}+\underbrace{\sum_{p\leqslant j<i\leqslant n} x_ix_j}_{\text{termes sous-diagonaux}}$$

Dans la somme la plus à droite, si on échange les noms des indices i et j (ce qui est toujours possibles puisqu'ils sont muets), on se retrouve avec la somme des termes sur-diagonaux. D'où la formule avec les doubles produits. $\square$

II Produits de nombres

1) Notation $\prod$

On fait la même chose que dans le paragraphe I mais avec des produits.

Définition.

- *Soient p et n des entiers relatifs tels que $p\leqslant n$. Soient $x_p,\dots,x_n$ des nombres complexes. On note*
$$\prod_{k=p}^{n} x_k=x_p\times\cdots\times x_n.$$
- *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes indexée par un ensemble I fini et non vide. On note $\displaystyle\prod_{i\in I} x_i$ le produit de tous les éléments de la famille.*
- *Soit P une propriété portant sur un nombre fini d'éléments d'un ensemble E. Soit $(x_k)_{k\in E}$ une famille de complexes indexée par E. On note $\displaystyle\prod_{k\in E,\,P(k)} x_k$ le produit de tous les termes de la famille dont l'indice vérifie la propriété P.*

Exemples :

- *Le produit $1\times2\times3\times4\times5\times6$ se note*

- *Lorsque $x \in \mathbb{C}$, le produit $(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)$ se note*

Remarques :

- Toutes les remarques du paragraphe I.1 concernant la notation $\sum$ s'appliquent à la notation $\prod$. En particulier l'indice i de $\displaystyle\prod_{i\in I} x_i$ est muet (on peut le remplacer par une autre variable, on ne doit jamais l'introduire et le résultat de la somme ne peut pas dépendre de i).
- Si l'un des termes d'un produit est nul, celui-ci est nul.
- Remarque toute bête mais très utile : si l'un des termes d'un produit vaut 1, on peut enlever ce terme du produit et donc l'indice correspondant dans I. De même, on peut rajouter (en multipliant) au produit un terme valant 1 et donc un indice dans I qui correspond à ce terme.
- Lorsque $I = \varnothing$, on adopte la convention que $\displaystyle\prod_{i\in I} x_i = 1$.

Cette convention est naturelle puisque, lorsque l'on a divisé un produit de complexes non nuls par tous ses tous ses termes (donc quand on a vidé l'ensemble de ses indices), il reste 1

2) Propriétés des produits

Dans ce paragraphe on se donne $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ des familles de complexes qui sont indexées par un ensemble fini I.

a) Relation de Chasles, multiplication par paquets, télescopage

Toutes les propriétés suivantes s'obtiennent de la même manière que leurs homologues avec les sommes (en remplaçant le symbole $\sum$ par $\prod$, les additions par des multiplications et les soustractions par des divisions) :

Proposition (relation de Chasles). *Supposons que $I = [\![p\,;n]\!]$ avec p et n des entiers relatifs tels que $p < n$. On a :*

$$\forall m \in [\![p\,;n]\!], \qquad \prod_{i=p}^{n} x_i = \left(\prod_{i=p}^{m} x_i\right) \times \left(\prod_{i=m+1}^{n} x_i\right).$$

Proposition (multiplication par paquets). *Soient J et K deux sous-ensembles **disjoints** de I tels que $I = J \cup K$. Alors*

$$\prod_{i\in I} x_i = \left(\prod_{i\in J} x_i\right) \times \left(\prod_{i\in K} x_i\right).$$

Proposition (produit télescopique). *Soient p et n des entiers relatifs tels que $p \leqslant n$. Soit $(x_k)_{p-1\leqslant k\leqslant n+1}$ une famille de complexes **non nuls**. Alors*

$$\prod_{k=p}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_{n+1}}{x_p} \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=p}^{n} \frac{x_k}{x_{k-1}} = \frac{x_n}{x_{p-1}}.$$

Et aussi

$$\prod_{k=p}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1}} = \frac{x_p}{x_{n+1}}.$$

et

$$\prod_{k=p}^{n} \frac{x_{k-1}}{x_k} = \frac{x_{p-1}}{x_n}.$$

***Exemple :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a*

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) =$$

car on est en présence d'un produit télescopique.

b) Changement d'indice, produits doubles, interversion de produits

Les formules de changement d'indice sont encore valables en remplaçant le symbole $\sum$ par le symbole $\prod$. En effet elles ne portent que sur les indices et non sur le fait de sommer.

On définit aussi la notion de produit double. Les formules d'interversion restent vraies en remplaçant le symbole $\sum$ par le symbole $\prod$. En effet elles ne portent que sur l'associativité et la commutativité de l'opération $\times$ (l'addition étant aussi associative et commutative).

c) Propriétés spécifiques des produits

Les propriétés suivantes sont immédiates (elles découlent de propriétés du produits, vues dans les chapitres 3 et 4 et se montrent par récurrence) :

Ne pas confondre avec la propriété de factorisation pour une somme. On peut « sortir λ » du produit mais en le mettant à la puissance $\operatorname{card}(I)$. En effet, il se trouve $\operatorname{card}(I)$ fois dans le produit. Un petit exemple suffit pour s'en convaincre :

$$\lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda(x_1 + x_2)$$

tandis que

$$\lambda x_1 \times \lambda x_2 = \lambda^2 \times x_1 x_2.$$

Proposition (factorisation dans un produit). *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a*

$$\prod_{i \in I} \lambda x_i = \lambda^{\operatorname{card}(I)} \prod_{i \in I} x_i.$$

Proposition (produit de multiplications). $\displaystyle\prod_{i \in I} x_i y_i = \left(\prod_{i \in I} x_i\right) \times \left(\prod_{i \in I} y_i\right).$

Proposition (produit d'inverses et de quotients). *Si, pour tout $i \in I$, $y_i \neq 0$,*

$$\prod_{i \in I} \frac{1}{y_i} = \frac{1}{\displaystyle\prod_{i \in I} y_i} \qquad \text{et} \qquad \prod_{i \in I} \frac{x_i}{y_i} = \frac{\displaystyle\prod_{i \in I} x_i}{\displaystyle\prod_{i \in I} y_i}.$$

Proposition (produit de puissances entières). *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\prod_{i \in I} x_i^n = \left(\prod_{i \in I} x_i\right)^n.$$

Cette égalité est encore vraie lorsque $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$ si, pour tout $i \in I$, $x_i \neq 0$.

Proposition (produit de modules). $\displaystyle\prod_{i \in I} |x_i| = \left|\prod_{i \in I} x_i\right|.$

Proposition (produit de conjugués). $\displaystyle\prod_{i \in I} \overline{x_i} = \overline{\prod_{i \in I} x_i}.$

Il n'y a pas d'inégalités dans $\mathbb{C}$! ! ! !

Proposition (produit d'inégalités). *Soient $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$ des familles de **réels positifs** telles que, pour tout $i \in I$, $x_i \leqslant y_i$. Alors*

$$\prod_{i \in I} x_i \leqslant \prod_{i \in I} y_i.$$

Si, pour tout $i \in I$, $0 < x_i \leqslant y_i$ et s'il existe $i_0 \in I$ tel que $x_{i_0} < y_{i_0}$, alors l'inégalité ci-dessus est stricte.

3) Produit d'exponentielles, de puissances généralisées, logarithme d'un produit

Par récurrence utilisant les propriétés de l'exponentielle et du logarithme népérien :

Proposition (produit d'exponentielles). $\displaystyle\prod_{i\in I}\exp(x_i)=\exp\left(\sum_{i\in I}x_i\right)$

Et, en posant $S=\sum_{i\in I}x_i$,

$$\prod_{i\in I}a^{x_i}=a^S$$

pour tout réel a tel que a^S existe et, pour tout $i\in I$, a^{x_i} existe.

Proposition (logarithme d'un produit). *Si, pour tout $i\in I$, x_i est un **réel strictement positif**, alors*

$$\ln\left(\prod_{i\in I}x_i\right)=\sum_{i\in I}\ln(x_i).$$

Encore valable avec $\log_a$ au lieu de $\ln$ lorsque $a\in\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$.

Remarque : Lorsque l'on veut calculer le produit de réels strictement positifs, on peut donc se ramener à un calcul de somme via la formule suivante :

$$\prod_{i\in I}x_i=\exp\left(\sum_{i\in I}\ln(x_i)\right).$$

Tentant vu qu'on est plus à l'aise avec les calculs de somme en général.

Proposition (produit de puissances généralisées). *Soit $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Si, pour tout $i\in I$, x_i est un **réel strictement positif**, alors*

$$\prod_{i\in I}x_i^\alpha=\left(\prod_{i\in I}x_i\right)^\alpha.$$

Lorsque $\alpha>0$, cette égalité est encore vraie si l'un au moins des x_i, $i\in I$, est nul.

En particulier,

$$\prod_{i\in I}\sqrt{x_i}=\sqrt{\prod_{i\in I}x_i}.$$

4) Factorielles

Définition.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On appelle factorielle de n, et on note $n!$, le produit des entiers de 1 à n, c'est-à-dire

$$n!=\prod_{k=1}^n k=1\times2\times3\cdots\times(n-1)\times n.$$

On pose $0!=1$.

Ce produit démarre à 1 et surtout par à 0, sinon il serait tout le temps nul... ce qui ne serait pas très intéressant.

Voici les premières valeurs des factorielles :

$$\begin{aligned}1!&=1\\2!&=2\\3!&=6\\4!&=24\\5!&=120\\6!&=720\\7!&=5040\\8!&=40320\\9!&=362880\\10!&=3628800\\11!&=39916800\\12!&=479001600\end{aligned}$$

Il faut connaitre au moins les six premières.

Remarques :

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n!$ se lit « factorielle n ». On entend souvent « n factorielle » mais c'est impropre.
- La factorielle n'est définie que pour les entiers naturels : $x!$ lorsque $x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ n'a aucun sens !
- Une factorielle est toujours un entier naturel non nul. On peut donc toujours diviser une factorielle. En particulier, diviser par $0!=1$ ne doit jamais vous inquiéter.
- Il n'y a pas grand chose à savoir sur la factorielle à ce stade, si ce n'est comprendre son sens et savoir la manipuler aisément et sans erreur en se rappelant simplement sa définition en tant que produit. En particulier, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
  - ⋆ $(n+1)!=(n+1)\times n!$.
  - ⋆ Si $n\geqslant1$, $n!=n\times(n-1)!$ et $\dfrac{n!}{n}=(n-1)!$.
  - ⋆ Si $n\geqslant2$, $n!=n\times(n-1)\times(n-2)!$ et $\dfrac{n!}{n(n-1)}=(n-2)!$.
  - ⋆ etc.

⋆ Si p est entier naturel inférieur ou égal à n, alors

$$n! = \boxed{}$$

donc

$$\frac{n!}{p!} = \boxed{}$$

Nous verrons dans le chapitre 30 que $n!$ est le nombre de façon d'ordonner un ensemble à n élément ou encore le nombre de bijections d'un ensemble fini à n éléments dans un autre ensemble fini à n éléments. On parle de permutation.

- ⚠ $0! = 1$ est une convention totalement naturelle. Elle s'explique par deux raisons :
  - ⋆ Si on prend $n = 0$ dans la formule définissant la factorielle à l'aide d'un produit, on obtient $0! = \prod_{k=1}^{0} k$ (toutefois on évite d'écrire cela dans la pratique pour éviter des erreurs de manipulation). Il s'agit d'un produit vide et, par convention, on a dit que sa valeur valait 1.
  - ⋆ Pour passer de $3!$ à $2!$ on divise par 3, puis pour passer de $2!$ à $1!$ on divise encore par 2. Dès lors, pour passer de $1!$ à $0!$, il est naturel de vouloir diviser par 1 et on obtient alors $0! = 1$.
- ⚠ La plupart des formules qui pourraient nous passer par la tête sont fausses. Notamment, lorsque p et n sont des entiers naturels (sauf valeurs particulières par pure coïncidence), $(n+p)! \neq n! + p!$, $(n+p)! \neq n! \times p!$, $(n \times p)! \neq n! \times p!$, $(n^p)! \neq (n!)^p$, $\dfrac{n!}{p!} \neq (n-p)!$, etc. On trouve des contre-exemples facilement avec des petites valeurs de n et p. C'est même généralement grossièrement faux : par exemple, si $n \geqslant 2$,

$$\frac{(2n)!}{n!} = (2n) \times (2n-1) \times \cdots \times (n+1)$$

donc $(2n)!$ est (très largement) strictement supérieur à $2!n! = 2n!$.

⚠ Attention au parenthèses : $(2n)!$ et $2n!$ ne sont pas du tout la même chose !!

Exemple : *Un classique : le produit des premiers nombres pairs/impairs. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

Exemple : *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \boxed{}$$

5) Coefficients binomiaux

Lorsque $n \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$, on ne définit pas $\binom{n}{p}$. On ne le définit pas non plus lorsque $p \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

Définition. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$. Si $p \in [\![0\,;n]\!]$, on pose $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.*

Si $p \notin [\![0\,;n]\!]$, on pose $\displaystyle\binom{n}{p} = 0$.

Le nombre $\displaystyle\binom{n}{p}$ est appelé coefficient binomial et se lit « p parmi n ».

Exemple : $\displaystyle\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{720}{24 \times 2} = 15.$

Nous verrons dans le chapitre 30 que $\binom{n}{p}$ est le nombre de chemins réalisant p succès pour n répétitions dans un arbre binaire, mais aussi le nombre de façons de choisir p éléments (distincts) parmi n éléments (distincts) ou encore le nombre de partie à p éléments d'un ensemble à n éléments.

Remarque : La formule $\displaystyle\frac{n!}{p!(n-p)!}$ sert pour les démonstrations impliquant des coefficients binomiaux mais, en pratique, on ne l'utilise jamais. En effet, on peut remarque que

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) \times \underbrace{(n-p) \times (n-p-1) \times \cdots \times 2 \times 1}_{=(n-p)!}$$

si bien que :

$$\boxed{}$$

Cela permet de faire moins de calcul à la main. Pour la retenir, il suffit de remarquer que, au numérateur comme au dénominateur, il y a un produit de p termes. Plus précisément, au numérateur on démarre à n et on « descend » jusqu'à $n-p+1$ (on écrit donc p termes) et, au dénominateur, on démarre à p et on « descend » jusqu'à 1.

Exemples : *Recommençons l'exemple ci-dessus :* $\displaystyle\binom{6}{4} = \boxed{}$.
Un autre exemple :

$$\binom{11}{5} = \boxed{}$$

On n'utilise surtout pas la formule $\frac{11!}{5!6!}$ qui fait intervenir un nombre très grand : $11!$.

Quelques cas particuliers à connaître :

Proposition.

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$.*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$.*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$, alors $\displaystyle\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.*

DÉMONSTRATION.

- Si $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\binom{n}{n} = \frac{n!}{0!n!} = 1$ et $\displaystyle\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!0!} = 1$.

- Si $n \geqslant 1$, $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{1!(n-1)!} = \dfrac{n\cdot(n-1)!}{(n-1)!} = n$ et $\binom{n}{n-1} = \dfrac{n!}{(n-1)!1!} = n$.
- Si $n \geqslant 2$, $\binom{n}{2} = \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = \dfrac{n(n-1)\cdot(n-2)!}{2\cdot(n-2)!} = \dfrac{n(n-1)}{2}$. □

Formule très pratique lorsque p est supérieur à $\frac{n}{2}$, surtout lorsque n et p sont très grands (cf. exemple ci-dessous).

Proposition (symétrie dans les coefficients binomiaux). *Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0\,;n]\!]$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.*

Démonstration. Lorsque $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0\,;n]\!]$, on a

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-(n-p))!(n-p)!} = \binom{n}{n-p}.$$ □

Exemple : *On a* $\binom{100}{98} = \binom{100}{2} = \dfrac{100\times 99}{2\times 1} = 4950$.

Le terme « formule du chef » (ou parfois « formule du capitaine ») trouve son explication dans une démonstration combinatoire que l'on verra dans le chapitre 30. Toutefois ce n'est pas le terme officiel (il n'y en a pas).

Proposition (formule du chef). *Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1\,;n]\!]$,*

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

Démonstration.

□

Remarque : Il y a plein de variantes de cette formule : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0\,;n+1]\!]$,

$$(p+1)\binom{n+1}{p+1} = (n+1)\binom{n}{p}, \qquad \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{p+1} = \frac{1}{p+1}\binom{n}{p}.$$

Et on peut aussi l'appliquer plusieurs fois : pour tout $n \geqslant 2$ et $p \in [\![2\,;n]\!]$

$$p(p-1)\binom{n}{p} = n(n-1)\binom{n-2}{p-2}.$$

Inutile de tout retenir mais il faut savoir les retrouver au besoin.

Avec la convention que $\binom{a}{b} = 0$ lorsque $a < 0$ ou $b > a$, les formules du chef et de Pascal s'étendent à toute valeur entière de p.

Proposition (formule du triangle de Pascal). *Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1\,;n-1]\!]$,*

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

Démonstration.

□

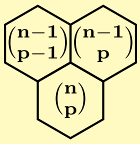
Corollaire. *Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0\,;n]\!]$, alors $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$.*

Si on prend la définition de $\binom{n}{p}$ comme le nombre de façons de choisir p éléments (distincts) parmi n éléments (distincts), il est évident que c'est un entier naturel. Mais, avec notre définition, ça ne saute pas aux yeux !

Démonstration. Raisonnons par récurrence.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $P(n)$: « $\forall p \in [\![0\,;n]\!]$, $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$ ».
- **Initialisation.** Nous avons $\binom{0}{0} = 1 \in \mathbb{N}$ donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie. On se donne $p \in [\![0\,;n+1]\!]$.
  - ⋆ Si $p = 0$, $\binom{n+1}{p} = 1 \in \mathbb{N}$.
  - ⋆ Si $p \geqslant 1$, la formule du triangle de Pascal entraîne que
  $$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p}.$$
  Par hypothèse de récurrence, les deux termes de droite sont des entiers naturels si bien que leur somme $\binom{n+1}{p}$ aussi.

  Ainsi $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion.** Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie. □



Exemple de lecture : à la $10^{\text{ième}}$ ligne (en numérotant les lignes à partir de 0), on trouve les $\binom{10}{p}$ pour $p \in [\![0\,;10]\!]$. On lit que $\binom{10}{4} = 210$.

Triangle de Pascal. La formule du triangle de Pascal donne aussi un procédé algorithmique pour obtenir les coefficients binomiaux uniquement à l'aide de sommes. On présente cela usuellement sous forme d'un triangle formé de nombres tels que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0\,;n]\!]$, le $p^{\text{ième}}$ nombre de la $n^{\text{ième}}$ ligne est $\binom{n}{p}$ (en numérotant à partir de 0 et non 1). On commence donc par placer, sur chaque ligne, des 1 en première et dernière position. Ensuite chaque nombre du triangle s'obtient en additionnant les deux nombres situés au dessus de lui (en vertu de la formule de Pascal). Voici le triangle de Pascal limité à $n = 10$:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

III La formule du binôme de Newton

1) Formule et démonstration

Théorème (Formule du binôme de Newton). *Soient x et y dans $\mathbb{C}$. Pour tout entier naturel n, nous avons*
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Démonstration. Montrons la première formule (la deuxième égalité se déduit de la première en échangeant les rôles de x et y).

2) Exemples

- Soient x et y dans $\mathbb{C}$.
  - ⋆ Lorsque $n = 2$, la formule du binôme de Newton est $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. On retrouve donc l'identité remarquable bien connue.
  - ⋆ Lorsque $n = 3$, la formule du binôme de Newton est
  - ⋆ Lorsque $n = 4$, la formule du binôme de Newton est
  - ⋆ Lorsque $n = 10$, la formule du binôme de Newton est

Les coefficients binomiaux apparaissant dans ces formules s'obtiennent facilement à l'aide du triangle de Pascal (cf. paragraphe ci-dessus).

Le premier réflexe à avoir est de faire démarrer la somme à 0 (en compensant).

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k+1} 3^{k-n} =$$

On remplace juste y par $-y$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelques cas particuliers ultra classiques :
  - ⋆ Pour tout $(x, y) \in \mathbb{C}^2$,

$$(x-y)^n = \boxed{}$$

  - ⋆ Pour tout $x \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \boxed{}$.
  - ⋆ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \boxed{}$.
  - ⋆ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = \boxed{}$

Ce calcul est un immense classique qui intervient notamment dans le calcul de l'espérance d'une variable aléatoire de loi binomiale (cf. chapitre 32).

- Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $(x, y) \in \mathbb{C}^2$

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k y^{n-k} =$$

3) Application à la trigonométrie

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Prenons l'exemple de $n = 5$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

IV Sommes et produits... d'autres choses que de complexes

Nous verrons que l'on peut aussi sommer et multiplier des suites (cf. chapitre 14), des matrices (cf. chapitre 20) ou, plus généralement, des éléments d'ensembles appelés groupes ou anneaux (cf. chapitre 17). Enfin nous verrons que nous pouvons sommer des objets appelés vecteurs qui sont des éléments d'ensembles appelés espaces vectoriels (cf. chapitres 28). Nous généraliserons alors ces notations dans les chapitres qui leurs sont consacrés).

Dans les paragraphes précédents, nous nous sommes limités aux sommes de nombres. Mais peut-on généraliser cela à d'autres types d'éléments. Il va sans dire que, pour sommer (respectivement multiplier) plusieurs éléments, il faut déjà pouvoir en sommer (respectivement multiplier) deux. Or, pour le moment, nous n'avons vu qu'un seul autre type d'éléments que l'on peut sommer : les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On peut donc étendre les notations de ce chapitre aux fonctions :

Définition. *Soient E une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille de fonction de E dans $\mathbb{R}$ indexée par un ensemble I fini et non vide. On définit alors sur I les fonctions*

$$\sum_{i\in I} f_i : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i\in I} f_i(x) \end{array} \right.$$

$$\prod_{i\in I} f_i : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\prod_{i\in I} f_i(x) \end{array} \right.$$

Exemple : *Une fonction P de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est polynomiale si elle est nulle ou bien s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Quasiment toutes les propriétés des sommes et produits de complexes se généralisent alors aux fonctions. Nous n'allons pas tout détailler : il suffit d'évaluer en un point quelconque de E et d'appliquer la propriété voulue à son image, si c'est possible.

Exemple : *Soient $n \geqslant 3$ et $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions dérivables sur une partie E de $\mathbb{R}$.*

- *Le produit $f_1 f_2$ est alors dérivable sur E et $(f_1 f_2)' = f_1' f_2 + f_1 f_2'$.*
- *Le produit $f_1 f_2 f_2$ est alors dérivable sur E et*

$$(f_1 f_2 f_2)' = f_1'(f_2 f_3) + f_1(f_2 f_3)' = f_1' f_2 f_3 + f_1 f_2' f_3 + f_1 f_2 f_3'.$$

Cela peut encore s'écrire :

La dérivée d'un produit de fonction et la somme des produits où à chaque terme on en dérive une seule.

- *Plus généralement (cela se montre par récurrence) : la fonction $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} f_i$ est dérivable sur E et*