Chapitre 16

Relations binaires

Depuis le début de l'année, nous avons souvent mis en relation des objets d'un ensemble. On parle de relation binaire. Exemples en vrac : le réel x est plus petit que le réel y, l'entier a est divisible par l'entier b, l'entier a est congru à l'entier b modulo n, la partie A est incluse dans la partie B, la fonction f a le même signe que la fonction g, etc. On en rencontre même dans la vie de tous les jours, par exemple : Paul est né le même jour que David, Marius a eu une meilleure note que Léon, etc.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les propriétés mathématiques des relations binaires sur un ensemble E. Un moyen de le faire est de lister tous les couples (x, y) de E^2 pour lesquels x est en relation avec y.

Dans tout ce chapitre, E désigne un ensemble non vide.

I Résultats généraux sur les relations binaires

L'ensemble $\mathcal{G}$ est aussi appelé graphe de la relation $\mathcal{R}$.

Définition. *On appelle relation binaire toute partie $\mathcal{G}$ de E^2.*

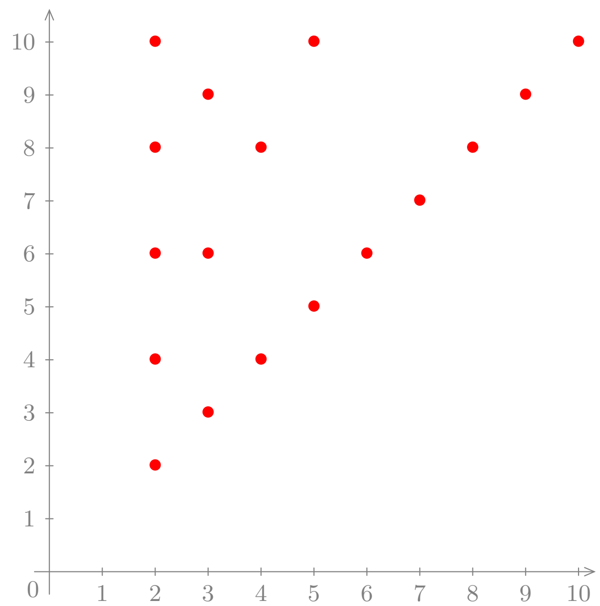
Pour tout $(x, y) \in E^2$, on dit que x est en relation avec y lorsque $(x, y) \in \mathcal{G}$. Si on note $\mathcal{R}$ la relation, et si x et en relation avec y, alors on note $x\mathcal{R}y$.

Remarque : En d'autres termes, une relation binaire est définie comme l'ensemble des couples qui la vérifient.

Par exemple, la relation « est un diviseur de » sur $[\![2\,;10]\!]$ est l'ensemble

$$\{(2,2);(2,4);(2,6);(2,8);(2,10);(3,3);(3,6);(3,9);\\ (4,4);(4,8);(5,5);(5,10);(6,6);(7,7);(8,8);(9,9);(10,10)\}$$

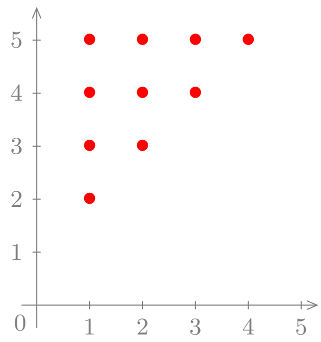
Elle peut être représenté par les points ci-dessous :



Autre exemple, la relation « être inférieur strict à » sur $[\![1\,;5]\!]$ est l'ensemble

$$\{(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(2,3);\ldots;(4,5)\}.$$

Elle peut être représenté par les points ci-dessous :



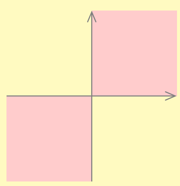
Expliciter la partie $\mathcal{G}$ de E^2 des couples vérifiant la relation ou encore construire le graphe est rapidement fastidieux voire hors de portée.

Mais, dans la pratique, pour définir une relation binaire, on dit souvent : « On définit la relation $\mathcal{R}$ sur E par : pour tout $(x, y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y$ si et seulement si [...] »

Exemples :

- *L'égalité sur E est une relation sur E, notée $=$ au lieu de $\mathcal{R}$.*
- *« être inférieur à » est une relation sur $\mathbb{R}$, notée $\leqslant$ au lieu de $\mathcal{R}$.*
- *« être inférieur strictement à » est une relation sur $\mathbb{R}$, notée $<$ au lieu de $\mathcal{R}$.*
- *On définit que $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une relation $\mathcal{R}$ par, pour tout $(f, g) \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$,*
$$f\mathcal{R}g \qquad \iff \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant g(x).$$
Mais on note (encore) $f \leqslant g$ plutôt que $f\mathcal{R}g$.
- *On définit sur $\mathscr{P}(E)$ la relation d'inclusion par : pour tout $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$,*
$$A\mathcal{R}B \qquad \iff \qquad \forall x \in A, \quad x \in B.$$
Mais on note $A \subset B$ plutôt que $A\mathcal{R}B$.

Cette relation peut être représentée par la partie du plan associée aux deux carrés (sans les axes puisqu'on s'est placé sur $\mathbb{R}^*$) ci-dessous :



- *On définit sur $\mathbb{R}^*$ la relation « avoir le même signe » par : pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$,*
$$x\mathcal{R}y \qquad \iff \qquad (x > 0 \text{ et } y > 0) \text{ ou } (x < 0 \text{ et } y < 0).$$
Mais on note « x a le même signe que y » plutôt que $x\mathcal{R}y$.
- *On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation de divisibilité par : pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$,*
$$a\mathcal{R}b \qquad \iff \qquad \exists c \in \mathbb{Z}, \quad b = ac.$$
Mais on note $a|b$ plutôt que $a\mathcal{R}b$.
- *Si $m \in \mathbb{R}$, la relation de congruence modulo m sur $\mathbb{R}$ est définie par, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,*
$$a\mathcal{R}b \qquad \iff \qquad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad a = b + km.$$
Mais on note $a \equiv b\,[m]$ plutôt que $a\mathcal{R}b$.

⚠ On peut avoir $x\mathcal{R}y$ mais pas $y\mathcal{R}x$! En effet, mathématiquement, un couple (x, y) peut appartenir à une partie de E^2 sans que le couple (y, x) ne lui appartienne.

Par exemple, $1 < 2$ (cela signifie que $(1, 2)$ appartient au graphe $\mathcal{G}$ de la relation d'ordre strict sur $\mathbb{R}$) mais il est faux que $2 < 1$ (le couple $(2, 1)$ n'appartient à $\mathcal{G}$).

La réfléxivité signifie que tout élément est en relation avec lui même. La symétrie signifie que, si un premier élément est en relation avec un deuxième, alors le deuxième est aussi en relation avec le premier...

Définition. *Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On dit que :*

- *$\mathcal{R}$ est réflexive si : $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$.*
- *$\mathcal{R}$ est symétrique si : $\forall (x, y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y \ \Rightarrow\ y\mathcal{R}x$.*
- *$\mathcal{R}$ est antisymétrique si : $\forall (x, y) \in E^2,\ (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \ \Rightarrow\ x = y$.*
- *$\mathcal{R}$ est transitive si : $\forall (x, y, z) \in E^3,\ (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \ \Rightarrow\ x\mathcal{R}z$.*

... L'antisymétrie signifie que, si deux éléments sont en relation l'un avec l'autre, avec c'est qu'ils sont égaux. Enfin la transitivité signifie que, si un premier élément est en relation avec un deuxième, lui-même en relation avec un troisième, alors le premier est en relation avec le troisième.

Si $\mathcal{R}$ est à la fois réflexive, symétrique et antisymétrique alors, pour tout $(x,y) \in E$, si $x\mathcal{R}y$, on a $y\mathcal{R}x$ (symétrie) mais donc $x = y$ (antisymétrie). Réciproquement, si $x = y$, $x\mathcal{R}y$ (réflexivité). Par conséquent $\mathcal{R}$ est l'égalité sur E. Bien sûr la réciproque est vraie : l'égalité sur E est réflexive, symétrique et antisymétrie (et transitive bien sûr). Ainsi, dans la pratique, on ne cherche jamais à montrer qu'une relation est à la fois symétrique et antisymétrique.

Exemples :

- *La relation* $\leqslant$ *sur* $\mathbb{R}$ *est réflexive, antisymétrique et transitive. En effet :*
  - ⋆ *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant x$.
  - ⋆ *Pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *si* $x \leqslant y$ *et* $y \leqslant x$, *alors* $y = x$.
  - ⋆ *Pour tout* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, *si* $x \leqslant y$ *et* $y \leqslant z$, *alors* $x \leqslant z$.
- *La relation* $<$ *sur* $\mathbb{R}$ *est antisymétrique et transitive. En effet :*
  - ⋆ *Pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *si* $x < y$ *et* $y < x$, *alors* $y = x$ *(cela semble étrange mais c'est tout à fait vrai : puisque la proposition* $x < y$ *et* $y < x$ *est fausse, l'implication est vraie).*
  - ⋆ *Pour tout* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, *si* $x < y$ *et* $y < z$, *alors* $x < z$.

  Mais elle n'est pas réflexive puisque $2 < 2$ *est fausse.*
- *La relation* $\leqslant$ *sur* $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *est réflexive, antisymétrique et transitive. En effet :*
  - ⋆ *Pour tout* $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f \leqslant f$ *(car, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant f(x)$*).*
  - ⋆ *Pour tout* $(f,g) \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})^2$, *si* $f \leqslant g$ *et* $g \leqslant f$, *alors* $f = g$ *(car, si pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant g(x)$ *et* $g(x) \leqslant f(x)$, *alors* $f(x) = g(x)$*).*
  - ⋆ *Pour tout* $(f,g,h) \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})^3$, *si* $f \leqslant g$ *et* $g \leqslant h$, *alors* $f \leqslant h$ *(car, si pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant g(x)$ *et* $g(x) \leqslant h(x)$, *alors* $f(x) \leqslant h(x)$*).*
- *La relation d'inclusion* $\subset$ *sur* $\mathscr{P}(E)$ *est réflexive, antisymétrique et transitive. En effet :*
  - ⋆ *Pour tout* $A \in \mathscr{P}(E)$, $A \subset A$.
  - ⋆ *Pour tout* $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$, *si* $A \subset B$ *et* $B \subset A$, *alors* $A = B$.
  - ⋆ *Pour tout* $(A,B,C) \in \mathscr{P}(E)^3$, *si* $A \subset B$ *et* $B \subset C$, *alors* $A \subset C$.
- *La relation de divisibilité* $|$ *sur* $\mathbb{Z}$ *est réflexive et transitive. En effet (nous avons montré tout cela dans le chapitre 12) :*
  - ⋆ *Pour tout* $a \in \mathbb{Z}$, $a \leqslant a$ *(rappelons que* $0|0$*).*
  - ⋆ *Pour tout* $(a,b,c) \in Z^3$, *si* $a|b$ *et* $b|c$, *alors* $a|c$.

  En revanche $|$ *n'est pas antisymétrique sur* $\mathbb{Z}$ *puisque* $2|-2$ *et* $-2|2$ *sans que* $2 = -2$. *Elle n'est pas symétrique non plus puisque* $2|4$ *mais* $4 \nmid 2$.
- *La relation de divisibilité* $|$ *sur* $\mathbb{N}$ *est réflexive et transitive (puisqu'elle l'est sur* $\mathbb{Z}$*) et elle est antisymétrique cette fois. En effet : si* $(a,b) \in N^2$ *vérifie* $a|b$ *et* $b|a$, *alors* $|a| = |b|$ *et donc* $a = b$.
- *Soit* $m \in \mathbb{R}$. *La relation* $\equiv [m]$ *sur* $\mathbb{R}$ *est réflexive, symétrique et transitive. En effet :*
  - ⋆ *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $x = x + \underbrace{0}_{\in\mathbb{Z}} \times m$ *donc* $x \equiv x\,[m]$.
  - ⋆ *Pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *si* $x \equiv y\,[m]$, *alors il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $x = y + km$ *donc* $y = x + \underbrace{(-k)}_{\in\mathbb{Z}} m$. *Ainsi* $y \equiv x\,[m]$.
  - ⋆ *Pour tout* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, *si* $x \equiv y\,[m]$ *et* $y \equiv z\,[m]$, *alors il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *et* $\ell \in \mathbb{Z}$ *tels que* $x = y + km$ *et* $y = z + \ell m$ *donc* $x = z + \underbrace{(k+\ell)}_{\in\mathbb{Z}} m$ *et donc* $x \equiv z\,[m]$.
- *Soit* $n \in \mathbb{Z}$. *La relation* $\equiv [n]$ *sur* $\mathbb{Z}$ *est réflexive, symétrique et transitive (pour les mêmes raisons que le point précédent).*
- *La relation « avoir le même signe » sur* $\mathbb{R}^*$ *est réflexive, symétrie et antisymétrique. En effet :*
  - ⋆ *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$, x *a le même signe que* x.
  - ⋆ *Pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *si* x *a le même signe que* y, *alors* y *a le même signe que* x.
  - ⋆ *Pour tout* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, *si* x *a le même signe que* y *et* y *le même signe que* z, *alors* x *a le même signe que* z.

II Les relations d'ordre

1) Définitions

On dit parfois simplement un ordre au lieu d'une relation d'ordre

Définition (relation d'ordre). *Une relation d'ordre sur E est une relation binaire sur E qui est réflexive, antisymétrique et transitive.*

Si E est un ensemble muni d'une relation d'ordre, on dit que c'est un ensemble ordonné.

On rencontrera aussi $\preccurlyeq_E$ ou $\leqslant_E$ si plusieurs ensembles sont en jeu.

Remarques :

- Lorsque E est muni d'une relation d'ordre $\leqslant$, on dit aussi que $(E, \leqslant)$ est ordonné.
- Une relation d'ordre est plus souvent notée $\preccurlyeq$ ou $\leqslant$ que $\mathcal{R}$. La plupart du temps, $\leqslant$ désignera l'ordre naturel sur $\mathbb{R}$, mais on l'emploiera aussi désigner d'autres ordres lorsqu'il n'a pas d'ambiguité.
- Une relation d'ordre sert à définir rigoureusement le fait qu'un élément est « plus petit » (au sens large) qu'un autre. Les trois conditions de la définition sont alors naturelles :
  - ⋆ la réflexivité traduit le fait qu'un élément est « plus petit » que lui même.
  - ⋆ l'antisymétrie traduit le fait que, si un élément est à la fois « plus petit » et « plus grand » qu'un autre, alors ces deux éléments sont égaux.
  - ⋆ la transitivité traduit le fait que si un premier élément est « plus petit » qu'un deuxième et que ce deuxième élément est « plus petit » qu'un troisième, alors le premier est « plus petit » que le troisième.

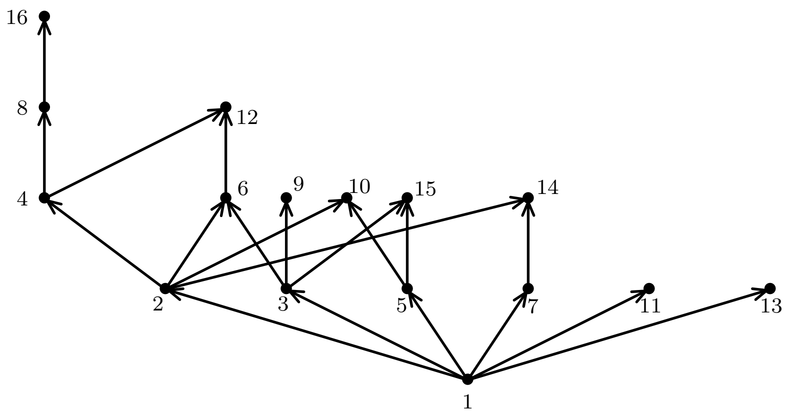
Exemples : *On a vu dans le paragraphe I que :*

- *La relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre.*
- *La relation $\leqslant$ sur $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une relation d'ordre.*
- *La relation d'inclusion $\subset$ sur $\mathscr{P}(E)$ est une relation d'ordre.*
- *La relation de divisibilité $|$ sur $\mathbb{N}$ est une relation d'ordre.*
- *La relation de divisibilité $|$ sur $\mathbb{Z}$ n'est pas une relation d'ordre.*

On le fait tout de même rarement car cela devient souvent rapidement illisible.

Remarque : Lorsque E est un ensemble fini, on peut parfois représenter une relation d'ordre $\preccurlyeq$ par un diagramme : on représente les éléments de E sous forme de points et on relie deux points a et b de E par une flèche de a vers b si a est directement en relation avec b (c'est-à-dire que l'on ne met pas de flèche entre a et b si il existe c tel que $a \preccurlyeq c$ et $c \preccurlyeq b$).

Ci-dessous le diagramme associé à la relation de divisibilité $|$ sur $[\![1\,;16]\!]$.



Plus généralement, il s'agit d'une ligne pour tout ensemble fini totalement ordonné (cf. paragraphe II.3).

Pour l'ordre $\leqslant$ sur une partie finie de $\mathbb{R}$, il s'agit juste d'une ligne.

> On la note $<$ si la relation d'ordre est notée $\leqslant$. On la note $<_E$ si la relation d'ordre est notée $\leqslant_E$, etc.

> Mais ce n'est pas une relation d'ordre puisqu'elle n'est pas réflexive. On voit que l'hypothèse de réflexivité n'est qu'une convention. L'hypothèse la plus importante est la transitivité puisque c'est elle qui donne la hiérarchie entre les éléments.

Proposition/Définition (relation stricte associée à une relation d'ordre).
Soit $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E. On définit la relation $\prec$ sur E par :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad x \prec y \quad \Longleftrightarrow \quad x \preccurlyeq y \text{ et } x \neq y.$$

Il s'agit d'une relation transitive et antisymétrique, appelée relation stricte associée à $\preccurlyeq$.

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Remarque : Si $(x,y) \in E^2$ est tel que $x \prec y$, alors $x \preccurlyeq y$. La récurrence est fausse bien sûr.

Exemples :

- *La relation $<$ sur $\mathbb{R}$ est la relation stricte associée à $\leqslant$.*
- *La relation $\subsetneq$ sur $\mathscr{P}(E)$ est la relation stricte associée à $\subset$*

2) Exemple : ordre produit et ordre lexicographique

Soient E et F deux ensembles non vides, munis de relations d'ordre $\leqslant_E$ et $\leqslant_F$ respectivement. Intéressons-nous à la construction d'un ordre sur le produit cartésien $E \times F$.

> En prenant $E = F = \mathbb{R}$, nous pourrons alors munir $\mathbb{R}^2$ d'un ordre... et donc $\mathbb{C}$.

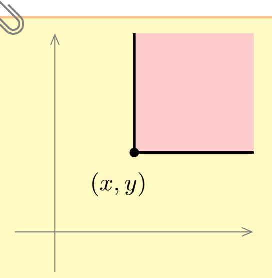
a) Ordre produit

On définit sur $E \times F$ l'ordre produit $\preccurlyeq$ par : pour tous $(x,y) \in E \times F$ et $(x',y') \in E \times F$,

$$(x,y) \preccurlyeq (x',y') \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \leqslant_E x' \quad \text{et} \quad y \leqslant_F y'.$$

Montrons qu'il s'agit d'une relation d'ordre sur $E \times F$.

> Évidemment, cette construction se généralise à un produit cartésien quelconque : un uplet est plus petit qu'un autre si c'est le cas coordonnée par coordonnée.

> 
>
>
> On remplace $(x,y) \preccurlyeq (x',y')$ par $x + iy \preccurlyeq x' + iy'$ et on obtient l'ordre produit sur $\mathbb{C}$.

En particulier, l'ordre produit $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{R}^2$ est donc défini par : pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x',y') \in \mathbb{R}^2$,

$$(x,y) \preccurlyeq (x',y') \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \leqslant x' \quad \text{et} \quad y \leqslant x'.$$

Exemples :

- *Si $\preccurlyeq$ désigne l'ordre produit sur $\mathbb{R}^2$, on a $(-3,4) \preccurlyeq (1,6)$.*
- *Si $\preccurlyeq$ désigne l'ordre produit sur $\mathbb{C}$, on a $\mathrm{i} \preccurlyeq 1 + 2\mathrm{i}$.*

b) Ordre lexicographique

Ici on construit des mots de deux lettres : une première lettre appartenant à l'ensemble E et une deuxième lettre appartenant à l'ensemble F.

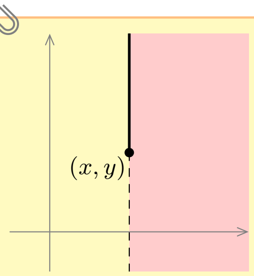
L'ordre lexicographique est un ordre bien connu : c'est celui dans lequel les mots sont rangés dans le dictionnaire.

On définit sur $E \times F$ l'ordre lexicographique $\preccurlyeq$ par : pour tous $(x, y) \in E \times F$ et $(x', y') \in E \times F$,

$$(x, y) \preccurlyeq (x', y') \qquad \Longleftrightarrow \qquad x <_E x' \quad \text{ou} \quad (x = x' \text{ et } y \leqslant_F y').$$

Montrons que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $E \times F$.

Évidemment, cette construction se généralise à un produit cartésien quelconque : l'ordre de la première coordonnée l'emporte et, en cas d'égalité, c'est la deuxième qui l'emporte puis, en cas d'égalité, c'est la troisième, etc.



On remplace $(x, y) \preccurlyeq (x', y')$ par $x + iy \preccurlyeq x' + iy'$ et on obtient l'ordre lexicographique sur $\mathbb{C}$.

En particulier, l'ordre lexicographique $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{R}^2$ est donc défini par : pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) \preccurlyeq (x', y') \qquad \Longleftrightarrow \qquad x < x' \quad \text{ou} \quad (x = x' \text{ et } y \leqslant y').$$

Exemples :

- *Si $\preccurlyeq$ désigne l'ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^2$, on a $(3, 100) \preccurlyeq (4, 10)$ et $(1, -2) \preccurlyeq (1, 3)$.*
- *Si $\preccurlyeq$ désigne l'ordre produit sur $\mathbb{C}$, on a $2 + 7\mathrm{i} \preccurlyeq 5 - \mathrm{i}$ et $1 - 3\mathrm{i} \preccurlyeq 1$.*

C'est précisément ce que l'on a dit dans le chapitre 6.

Remarque : Dans l'ordre lexicographique sur $\mathbb{C}$, on a décidé ci-dessus que la partie réelle comptait en premier mais on aurait pu faire le choix contraire. il n'y a pas d'ordre naturel sur $\mathbb{C}$!

3) Ordre total, ordre partiel

Lorsque l'on considère deux réels, l'un est toujours plus petit que l'autre. En revanche, cette propriété n'est pas vraie pour toutes les relations d'ordre. Par exemple, si on prend deux parties d'un ensemble, il n'est pas vrai en général que l'une est incluse dans l'autre.

Par exemple, si $E = [\![1 ; 6]\!]$, $A = \{1; 3; 5\}$ et $B = \{2; 3\}$, alors $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$.

Cela motive l'introduction des notions suivantes :

Définition. *Soit $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E.*

- *On dit que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre total si : $\forall (x,y) \in E^2,\ x \preccurlyeq y \text{ ou } y \preccurlyeq x$.*

  On dit alors que $(E, \preccurlyeq)$ est un ensemble totalement ordonné.
- *Dans le cas contraire, on dit que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre partiel .*

  On dit alors $(E, \preccurlyeq)$ est un ensemble partiellement ordonné.

Autrement dit, un ordre est total lorsque deux éléments quelconques de E sont comparables : l'un est toujours plus petit que l'autre au sens de $\preccurlyeq$.

Exemples : *Parmi tous les exemples des paragraphes précédents, les suivants sont des relations d'ordre total :*

- *La relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$. En effet, quel que soient les réels x et y, on a $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.*
- *L'ordre lexicographique $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{R}^2$ En effet :*

Plus généralement, lorsque E et F sont munis d'un ordre total, l'ordre lexicographique sur $E \times F$ est encore un ordre total.

Les suivants sont des ordres partiels :

- *La relation $\leqslant$ sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En effet, si $f : x \longmapsto x$ et $g : x \longmapsto 2x$, on a ni $f \leqslant g$ (puisque $f(-1) = -1 > -2 = g(-1)$) ni $g \leqslant f$ (puisque $g(1) = 2 > 1 = f(1)$).*
- *La relation $\subset$ sur $\mathscr{P}(E)$ dès que E possède (au moins) deux éléments. En effet, en notant a et b deux éléments distincts de E, on a ni $\{a\} \subset \{b\}$, ni $\{b\} \subset \{a\}$.*
- *La relation de divisibilité $|$ sur $\mathbb{N}$. En effet, on a ni $2|3$, ni $3|2$.*
- *L'ordre produit $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{R}^2$. En effet :*

Il est immédiat que $(\mathscr{P}(E), \subset)$ est totalement ordonné dans le cas où $E = \varnothing$ ou E est un singleton (mais ce n'est pas très passionnant).

4) Majorants et minorants

Dans ce paragraphe, on suppose que E est muni d'une relation d'ordre $\preccurlyeq$, et on se donne A une partie non vide de E.

Nous allons généraliser les notions de majorants, minorants, maxima, minima et bornes supérieures et inférieures vues dans les chapitres 3 et 13 pour la relation d'ordre sur les réels.

Définition (Majorant, minorant).

- *Soit $M \in E$. On dit que M est **un** majorant de A si : $\forall a \in A,\ a \preccurlyeq M$.*

  Si A admet un majorant M, on dit que A est majorée (par M).
- *Soit $m \in E$. On dit que m est **un** minorant de A si : $\forall a \in A,\ m \preccurlyeq a$.*

  Si A admet un minorant m, on dit que A est minorée (par m).
- *Si A est majorée et minorée, on dit que A est bornée.*

Sur un ensemble quelconque, il n'y a évidemment pas de valeur absolue, et donc le critère « A est bornée si et seulement si A est majorée en valeur absolue » n'a pas de sens !

Exemples :

- *Pour la relation de divisibilité $|$ sur $\mathbb{N}$, l'ensemble $\{9; 12; 15\}$ est ....*
- *Pour la relation $\subset$, $\mathscr{P}(E)$ est ....*

Définition (Maximum, minimum).

- *Soit M un majorant de A. On dit que M est un maximum (ou un plus grand élément) de A si $M \in A$.*
- *Soit m un minorant de A. On dit que m est minimum (ou un plus petit élément) de A si $m \in A$.*

En d'autres termes, un maximum est un majorant qui appartient à l'ensemble. Un minimum est un minorant qui appartient à l'ensemble.

Proposition. *Si A admet un maximum (respectivement un minimum), celui-ci est unique. On le note alors $\max(A)$ (respectivement $\min(A)$).*

Démonstration. Supposons que A admette M et M' pour maximum (le raisonnement est analogue dans le cas du minimum).

- Puisque M est un majorant de A et $M' \in A$, on a $M' \preccurlyeq M$.
- Puisque M' est un majorant de A et $M \in A$, on a $M \preccurlyeq M'$.

Ainsi $M = M'$ par antisymétrie. D'où l'unicité sous réserve d'existence. □

Exemples :

- *Pour la relation de divisibilité $|$ sur $\mathbb{N}$:*
  - ⋆ *L'ensemble* $\{2; 4; 8; 16; 32\}$ ....
  - ⋆ *L'ensemble* $\{2; 4; 6; 8\}$ ....

Bon techniquement, la notion de PPCM de strictement plus de 2 nombres est hors-programme...

  - ⋆ *L'ensemble* $\{2; 3\}$ ....
  - ⋆ *L'ensemble* $\mathbb{N}$ ....
  - ⋆ *L'ensemble* $\mathbb{N}^*$ ....
  - ⋆ *L'ensemble* $\mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$ ....
- *Déterminons le maximum de $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ de $\mathbb{R}^2$ muni de l'ordre lexicographique $\preccurlyeq$.*

Définition (Borne supérieure, borne inférieure).

- *Si l'ensemble des majorants de A admet un minimum, alors celui-ci est appelé borne supérieure (ou supremum) de A et noté $\sup(A)$.*
- *Si l'ensemble des minorants de A admet un maximum, alors celui-ci est appelé borne inférieure (ou supremum) de A et noté $\inf(A)$.*

Autrement dit, sous réserve d'existence, la borne supérieure de A est le plus petit des majorants et la borne inférieure de A est la plus grand des minorants.

Remarque : Contrairement à ce qui se passe pour la relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$, pour une relation d'ordre quelconque, une partie non vide majorée n'admet pas forcément de borne supérieure.

Considérons $\mathbb{Q}$ muni de la relation d'ordre $\leqslant$. Notons $A = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 < \sqrt{2}\}$. Montrons que A n'admet pas de borne supérieure (dans $\mathbb{Q}$).

En tout généralité, il n'y a plus non plus de théorème caractérisation epsilonesque, ni de caractérisation séquentielle.

La réciproque est fausse puisqu'une borne supérieure n'appartient pas forcément à l'ensemble, cf. exemple ci-dessous.

Proposition.

- *Si A admet un maximum, alors A admet une borne supérieure et $\sup(A) = \max(A)$.*
- *Si A admet un minimum, alors A admet une borne inférieure et $\inf(A) = \min(A)$.*

Démonstration. Supposons que A admette un maximum M (le raisonnement est analogue pour un minimum). Notons B l'ensemble des majorants de A.

- On a $M \in B$ car le maximum est un majorant.
- Soit $M' \in B$ (c'est-à-dire un majorant de A). Puisque $M \in A$, on a $M \preccurlyeq M'$.

Par conséquent M est un (et donc le) minorant de B. Par définition A admet donc M pour borne supérieure. □

Exemples :

On montrerait de même que le PPCM de $a_1, \ldots, a_n$ (notion hors programme dès que $n \geqslant 3$) est la borne inférieure de A.

- *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$ des entiers naturels non nuls. Notons d leur PGCD. Montrons que d est la borne supérieure de $\{a_1; \ldots; a_n\}$.*

- *Soit $\mathscr{A}$ une partie de $\mathscr{P}(E)$, muni de la relation d'ordre $\subset$. Montrons que*

$$U_{\mathscr{A}} = \bigcup_{X \in \mathscr{A}} X \qquad \text{et} \qquad I_{\mathscr{A}} = \bigcap_{X \in \mathscr{A}} X.$$

sont respectivement les bornes supérieures et inférieures de $\mathscr{A}$.

Il n'y a aucune raison pour que $I_{\mathscr{A}}$ ou $U_{\mathscr{A}}$ appartient à $\mathscr{A}$ (et donc soient le minimum ou le maximum de A respectivement). Par exemple, si $E = \mathbb{R}$ et $\mathscr{A} = \{\mathbb{R}_-; \mathbb{R}_+\}$, on a $I_{\mathscr{A}} = \varnothing$ et $U_{\mathscr{A}} = \mathbb{R}$ donc ni $I_{\mathscr{A}}$, ni $U_{\mathscr{A}}$ n'appartiennent à $\mathscr{A}$.

Plus haut, avec l'ordre lexicographique, la borne supérieure était $(1,0)$ puisqu'il s'agissait du maximum.

- *Considérons de nouveau la partie $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ de $\mathbb{R}^2$ mais muni cette fois de l'ordre produit $\preccurlyeq$. Montrons que $(1,1)$ est la borne supérieure mais n'est pas le maximum.*

III Les relations d'équivalence

1) Définitions

Définition (relation d'équivalence). *Une relation d'équivalence sur E est une relation binaire sur E qui est réflexive, symétrique et transitive.*

Remarques :

On rencontrera aussi $\sim_E$, $\approx_E$ ou $\equiv_E$ si plusieurs ensembles sont en jeu.

La symétrie d'une relation d'équivalence permet de dire « x et y sont en relation » plutôt que « x est en relation avec y ». Dans le cas d'une relation d'équivalence, on dit même que « x et y sont équivalents ».

- Une relation d'équivalence est plus souvent notée $\sim$, $\approx$ ou $\equiv$ que $\mathcal{R}$. La plupart du temps, $\equiv$ désignera la congruence sur $\mathbb{R}$, mais on l'emploiera aussi désigner d'autres relations d'équivalence lorsqu'il n'a pas d'ambiguïté.
- Une relation d'équivalence sert à définir rigoureusement le fait que deux éléments ont une caractéristique donnée commune. Les trois conditions de la définition sont alors naturelles :
  - ⋆ la réflexivité traduit le fait qu'un élément a la même caractéristique que lui même.
  - ⋆ la symétrie traduit le fait que, si un premier élément partage la même caractéristique qu'un deuxième, alors ce deuxième partage la même caractéristique que le deuxième.
  - ⋆ la transitivité traduit le fait que si un premier élément a la même caractéristique qu'un deuxième et que ce deuxième a la même caractéristique qu'un troisième alors le premier a la même caractéristique que le troisième.

Exemples : *On a vu dans le paragraphe I que :*

- *Pour tout $m \in \mathbb{R}$, la relation $\equiv [m]$ sur $\mathbb{R}$ est une relation d'équivalence.*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation $\equiv [n]$ sur $\mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence.*
- *La relation « avoir le même signe » sur $\mathbb{R}^*$ est une relation d'équivalence.*

2) Autres exemples

- *Soit f une fonction de E dans F (un ensemble non vide quelconque). On définit la relation $\sim_f$ sur E par, pour tout $(x, y) \in E^2$,*

$$x \sim_f y \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) = f(y).$$

C'est une relation d'équivalence sur E. En effet :

- *Cela peut fonctionner même si ce n'est pas une fonction. Par exemple, on définit sur $\mathbb{C}^*$ la relation $\sim_{\textsf{Arg}}$ par, pour tous $z = r\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ et $z' = r'\mathrm{ei}\theta' \in \mathbb{C}^*$,*

$$z \sim_{\textsf{Arg}} z' \qquad \Longleftrightarrow \qquad \theta \equiv \theta' \, [2\pi] \, .$$

C'est une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}^*$. En effet :

- *On définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ la relation $\equiv_{\mathbb{Q}}$ par : pour tous $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ et $(p', q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$,*

$$(p, q) \equiv_{\mathbb{Q}} (p', q') \qquad \Longleftrightarrow \qquad pq' = p'q.$$

C'est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. En effet :

On dit qu'un couple (A,B) de points du plan est un bi-point.

- *On définit sur* $(\mathbb{R}^2)^2$ *la relation* $\approx$ *par : pour tous* $(A,B) \in (\mathbb{R}^2)^2$ *et* $(C,D) \in (\mathbb{R}^2)^2$,
$$(A,B) \approx (C,D) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_B - x_A = x_D - x_C \quad \text{et} \quad y_B - y_A = y_D - y_C,$$
en notant $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ *et* $D(x_D, y_D)$. *C'est une relation d'équivalence sur* $(\mathbb{R}^2)^2$. *En effet :*

- *On définit sur l'ensemble* $c_0(\mathbb{R})$ *des suites réelles convergentes, la relation* $\approx_{\textit{lim}}$ *par : pour tous* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{R})$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{R})$,
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \approx_{\textit{lim}} (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$
C'est une relation d'équivalence sur $c_0(\mathbb{R})$.

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

- *La relation « être né le même jour du mois » et une relation d'équivalence sur* E, *l'ensemble des humains (ou plus généralement l'ensemble des trucs ayant une date de naissance). En effet :*
  - ⋆ *Toute personne est né le même jour du mois qu'elle-même.*
  - ⋆ *Si une première personne est née le même jour du mois qu'une deuxième, alors cette deuxième personne est née le même jour du mois que la première.*
  - ⋆ *Si une première personne est née le même jour du mois qu'une deuxième et que cette deuxième est née le même jour du mois qu'une troisième, alors la première est née le même jour du mois que la troisième.*

3) Classes d'équivalence

Définition (classe d'équivalence). *Soit* $\sim$ *une relation d'équivalence sur* E. *Soit* $x \in E$. *On appelle classe d'équivalence de* x *l'ensemble*
$$\mathrm{cl}(x) = \{y \in E \,|\, x \sim y\}.$$
Autrement dit, $\mathrm{cl}(x)$ *est l'ensemble des éléments de* E *qui sont équivalents à* x.

Proposition. *Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E. Pour tout $(x,y) \in E^2$, on a*

$$\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \sim y.$$

Démonstration.

□

En quelque sorte, tous les éléments d'une classe d'équivalence peuvent être considérés comme « le même élément » vis à vis de la caractéristique décrite par la relation d'équivalence.

On a dit plus haut que définir une relation d'équivalence sur E étant un moyen de définir rigoureusement le fait que deux éléments partagent une certaine caractéristique, un point commun donné (par exemple la date de naissance, le reste modulo un entier fixé, la même image par une application, etc.). Une classe d'équivalence est donc une « communauté » d'éléments de E qui partagent tous la même caractéristique. Chaque élément de E appartient forcément à sa classe d'équivalence (à sa « communauté ») et deux « communautés » distinctes n'ont aucun élément en commun (aux yeux de la caractéristique à laquelle on s'intéresse). Cela rend le résultat suivant totalement intuitif :

On a donc

$$E = \bigcup_{x \in E} \mathrm{cl}(x).$$

⚠ Cette union n'est pas une union disjointe a priori. Pourtant, on vient de dire (et nous allons le montrer) que les classes d'équivalence sont deux à deux disjointes. Pour traduire cela, on peut introduire la notion d'ensemble de représentants des classes d'équivalence : un tel ensemble R est une partie de E qui contient un élément et un seul de chaque classe d'équivalence de $\sim$. Alors l'union

$$E = \bigcup_{x \in R} \mathrm{cl}(x)$$

est disjointe.

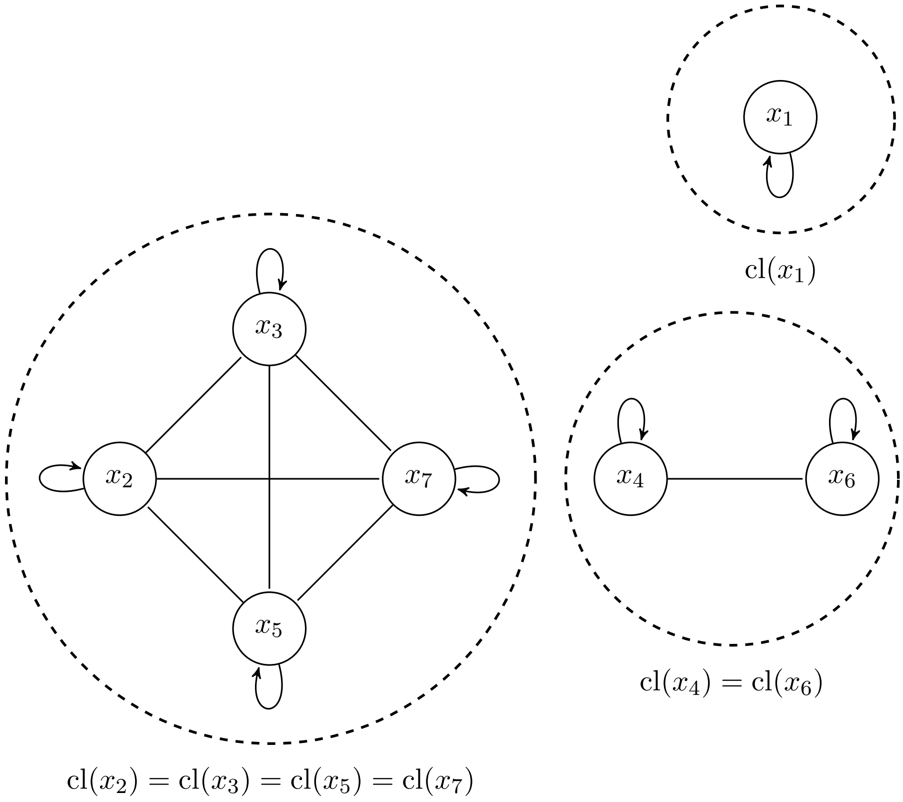
Proposition. *Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E. Les classes d'équivalence de $\sim$ forment une partition de E.*

Démonstration.

□

Remarque : Comme pour une relation d'ordre, on peut parfois représenter une relation d'équivalence par un diagramme. Il se décompose alors en un certain nombre de blocs qui sont les classes d'équivalences. Les blocs ne sont pas reliés les uns aux autres (car deux éléments de deux classes distinctes ne sont pas en relation). Chaque point appartient à un bloc et à un seul (il est éventuellement seul dans ce groupe). Par ailleurs, les éléments d'un même bloc sont tous reliés les uns aux autres.

Prenons l'exemple d'un ensemble $E = \{x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6; x_7; x_8\}$ tel que, en reliant chaque élément à tout élément avec lequel il est en relation d'équivalence et en délimitant les classes d'équivalence par des cercles en pointillés, on obtient :



Exemples :

- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les classes d'équivalence de la relation $\equiv [n]$ sont les ensembles des entiers ayant le même reste modulo n : l'ensemble des entiers congrus à 0 modulo n, l'ensemble des entiers congrus à 1 modulo n, etc. jusqu'à l'ensemble des entiers congrus à $n-1$ modulo n.*
- *Les classes d'équivalence de la relation « avoir le même signe » sur $\mathbb{R}^*$ sont $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.*
- *Si $f : E \longrightarrow F$, avec la notation $\sim_f$ du paragraphe III.2, les classes d'équivalence de la relation $\sim_f$ sont les ensembles d'éléments de E ayant la même image par la fonction f. Ce sont les ensembles de la forme $f^{-1}(\{y\})$ pour $y \in f(E)$.*
  - ⋆ *Si f est injective, il s'agit des singletons de E.*
  - ⋆ *Si $E = F = \mathbb{R}$ et f est la fonction carré, alors, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$,*

  En particulier, $\mathrm{cl}(0) = 2\pi\mathbb{Z}$.

  - ⋆ *Si $E = F = \mathbb{R}$ et $f = \cos$, alors, pour tout $y \in \mathbb{R}$,*
- *Avec la notation $\sim_{Arg}$ du paragraphe III.2, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\mathrm{cl}(z)$ est l'ensemble des complexes ayant un même argument que z. Ainsi les classes d'équivalence de la relation $\sim_{Arg}$ sont les demi-droites issues de O et privées de O.*

Cette construction de $\mathbb{Q}$ peut sembler gratuite mais il est important quand on fait des mathématiques à stade avancé de définir proprement les objets autrement qu'en proclamant leur existence. Ici il faut faire un effort de faire comme si on ne connaissait pas $\mathbb{Q}$ et la notation $\frac{p}{q}$.

- *Avec la notation $\equiv_{\mathbb{Q}}$ du paragraphe III.2, pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$,*

$$\mathrm{cl}((p,q)) = \{(p',q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \,|\, pq' = p'q\} = \left\{ (p',q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \;\middle|\; \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \right\},$$

  autrement dit, il s'agit de l'ensemble des couples de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ dont le quotient est le rationnel $\frac{p}{q}$.

  On définit alors l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels comme l'ensemble des classes d'équivalence de $\equiv_{\mathbb{Q}}$ (chaque classe d'équivalence définit un seul rationnel) mais, pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, on décide de noter $\frac{p}{q}$ la classe d'équivalence de (p,q).

Reste encore à prouver que toutes les propriétés attendues de $\mathbb{Q}$ sont bien vérifiées par l'ensemble $\mathbb{Q}$ ainsi construit (ce qui constituera un excellent exercice dans le chapitre 17).

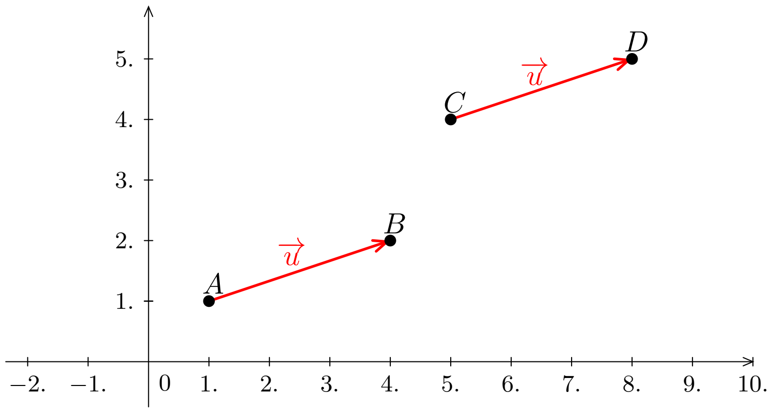
- *Avec la notation $\approx$ du paragraphe III.2, pour tout bipoint $(A,B) \in (\mathbb{R}^2)^2$,*

$$\mathrm{cl}((A,B)) = \{(C,D) \in (\mathbb{R}^2)^2 \,|\, x_B - x_A = x_D - x_C \quad \text{et} \quad y_B - y_A = y_D - y_C\},$$

autrement dit, il s'agit de l'ensemble des bipoints donnant le même vecteur.

C'est pour cela qu'on dit que, même lorsqu'il est à deux endroits différents, cela ne fait qu'un seul vecteur !

On définit alors l'ensemble des vecteurs du plan comme l'ensemble des classes d'équivalence de $\approx$ (chaque classe d'équivalence définit un seul vecteur) mais, pour tout $(A,B) \in (\mathbb{R}^2)^2$, on décide de noter $\overrightarrow{AB}$ la classe d'équivalence de (A,B). Reste encore à prouver que toutes les propriétés attendues des l'ensemble des vecteurs sont bien vérifiées par l'ensemble ainsi construit (ce qui constituera un excellent exercice dans le chapitre 17).



- *Avec la notation $\approx_{lim}$ du paragraphe III.2, pour toute suite réelle convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathrm{cl}((u_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est l'ensemble des suites ayant la même limite que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par exemple, on a*

Et on a notamment

$$\mathrm{cl}((0)_{n\in\mathbb{N}}) = \mathrm{cl}\,(\mathrm{e}^{-n})_{n\in\mathbb{N}}.$$

$$\mathrm{cl}((0)_{n\in\mathbb{N}}) = \left\{(0)_{n\in\mathbb{N}}; (\mathrm{e}^{-n})_{n\in\mathbb{N}}, \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}; \dots\right\}.$$

- *Les classes d'équivalence de la relation « être né le même jour du mois » sont les ensembles de personnes nées le même jour du mois : l'ensemble des personnes nées le 1er du mois, l'ensemble des personnes nées le 2 du mois, etc. Il y a donc 31 classes d'équivalences.*

- ***Un exemple très important.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Rappelons que la relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.*

Mentionnons que l'ensemble des classes d'équivalence d'un ensemble E par une relation d'équivalence $\sim$ s'appelle l'ensemble quotient de E par $\sim$ et se note $E/_\sim$. Il s'agit d'un objet de grande important en mathématiques (les ensembles $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, en sont des exemples, ainsi que les ensembles $\mathbb{Q}$ et des vecteurs du plan tels qu'on les a construits dans les exemples ci-dessus). Cette notion est toutefois hors-programme.

Une mise au point s'impose concernant ce dernier exemple. Nous venons d'introduire des ensembles qui sont au programme de deuxième année : les $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Ils ne sont pas au programme de première année (c'est le programme officiel qui le dit) mais ils fournissent un exemple tellement important pour le chapitre 17 que nous allons tout de même en parler. Toutefois nous en parlerons en tant qu'exemple et non pas en tant que résultats du cours à connaître (mais vous finirez pas devoir les connaître l'an prochain).