Chapitre 2

Raisonnements usuels

Dans le chapitre précédent, nous avons déjà vu comment rédiger des démonstrations de propositions faisant intervenir des conjonctions, des disjonctions, des implications, des équivalences et des propositions quantifiées. Il en existe de nombreux autres types de démonstration que nous allons lister dans ce chapitre.

Nous allons les illustrer avec des exemples tirés des mathématiques de lycée mais nous reprendrons toutes ces notions dans les prochains chapitres.

I Raisonnement direct

A l'exception du raisonnement par double implication pour démontrer une équivalence, tous les raisonnements vus dans la dernière partie du chapitre précédent peuvent être qualifiés de « directs » puisque l'on montre la proposition en utilisant directement la définition des connecteurs logiques.

Exemple : *Montrons que, pour tout entier naturel n, la somme S_n des entiers de 0 et n est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$.*

Une légende raconte que Carl Friedrich Gauss aurait découvert cette démonstration à l'âge de 9 ans. Son maître d'école lui aurait proposé de calculer cette somme pensant que ça l'aurait occupé pendant un long moment. Mais avec cette astuce Gauss ne mit que quelques minutes...

On appelle aussi raisonnement direct, tout raisonnement consistant à montrer une proposition à l'aide d'une ou plusieurs implications préalablement connues. Cela s'appuie sur le résultat suivant (intuitif) :

modus signifie *mode* en latin et *ponens* est le participe présent du verbe latin *ponere*, qui signifie *poser*.

Proposition (règle du modus ponens). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des propositions. On a*

$$(\mathcal{A} \text{ et } (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})) \Rightarrow \mathcal{B}.$$

$\leadsto$ Démonstration laissée en exercice.

Exemple : *Montrons que 18429 est divisible par 3.*

La somme $1+8+4+2+9=24$ est divisible par 3. Or tout entier dont la somme des chiffres est divisible par 3 est divisible par 3. Par conséquent 18429 est divisible par 3.

II Raisonnement par contraposée

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des propositions. Pour prouver que $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie, on peut aussi prouver que la contraposée $\text{non}(\mathcal{B}) \Rightarrow \text{non}(\mathcal{A})$ est vraie. En effet une implication et sa contraposée sont équivalentes. On peut donc rédiger ainsi :

Rédaction type de la preuve de $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ par contraposée.

Raisonnons par contraposée : supposons que $\mathcal{B}$ est fausse (Montrons que $\mathcal{A}$ est fausse.) [...] Ainsi $\mathcal{A}$ est fausse.

Par contraposée, on en déduit que $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie.

Exemple : *Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrons que, si n^2 est pair, alors n est pair.*

III Raisonnement par l'absurde

Montrer une proposition $\mathcal{A}$ par l'absurde consiste à supposer que $\mathcal{A}$ est fausse et à aboutir à une contradiction, c'est-à-dire à une proposition fausse. On en déduit alors que $\mathcal{A}$ est vraie. On peut rédiger ainsi :

Rédaction type de la preuve de $\mathcal{A}$ par l'absurde.
Raisonnons par l'absurde. Supposons que $\mathcal{A}$ est fausse (et montrons que cela conduit à une contradiction).
[...]
C'est absurde. On en déduit que $\mathcal{A}$ est vraie.

Exemple : *Un grand classique : montrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel.*

On dit que a et b sont premiers entre eux, cf. chapitre 12.

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des propositions. Démontrer par l'absurde l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ consiste donc à la supposer fausse. Or la négation de $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est équivalent à $\mathcal{A}$ et $\mathrm{non}(\mathcal{B})$. On peut donc rédiger ainsi :

Rédaction type de la preuve de $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ par l'absurde.
Raisonnons par l'absurde. Supposons que $\mathcal{A}$ est vraie et que $\mathcal{B}$ est fausse. (Montrons que cela conduit à une contradiction.)
[...]
C'est absurde. On en déduit que $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie.

C'est assez proche du raisonnement par contraposée à ceci près que, dans un raisonnement par l'absurde, en plus de supposer que $\mathcal{B}$ est fausse, on suppose aussi que $\mathcal{A}$ est vraie. Cet ajout apporte parfois une information cruciale permettant de faire la preuve (cf. exemple ci-contre où la connaissance que $a \neq b$ est nécessaire pour avancer).

Exemple : *Soient a et b deux réels positifs. Montrons que, si $\frac{b}{1+a} = \frac{a}{1+b}$, alors $a = b$.*

IV Raisonnement par disjonction des cas

Proposition (La disjonction des cas). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. Si les implications $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ et $(\mathrm{non}\ \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B}$ sont vraies, alors la proposition $\mathcal{B}$ est vraie.*

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Exemples :

- *Montrons que, pour tout réel x, $|x-1| \leqslant x^2 - x + 1$.*

On ne fait jamais un raisonnement par disjonction de cas pour le plaisir de faire des cas. De plus, lorsque l'on fait des cas, ils ne sont jamais arbitraires. Les cas surgissent naturellement lorsque l'on a à faire avec un objet mathématique (comme la valeur absolue), un interdit mathématique (comme le fait de ne pas pouvoir diviser par 0) ou un théorème l'exigeant.

- *Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.*

Il n'y a pas de raison de se limiter à deux cas. Plus généralement, on a

Proposition. *Soit $\mathcal{B}$ une proposition. Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 2. Soient $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ des propositions dont l'une (au moins) est vraie. Si les n implications*

$$\mathcal{A}_1 \Rightarrow \mathcal{B}, \qquad \mathcal{A}_2 \Rightarrow \mathcal{B}, \qquad \cdots \qquad \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}$$

sont vraies, alors $\mathcal{B}$ est vraie.

V Raisonnement par double implication

On en a déjà parlé dans le chapitre précédent, exemple à l'appui. Rappelons la méthode de rédaction :

Rédaction type de la preuve par double implication de $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$.

- Supposons que $\mathcal{A}$ est vraie (Montrons que $\mathcal{B}$ est vraie.) [...] Ainsi $\mathcal{B}$ est vraie. On en déduit que $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie.
- Supposons que $\mathcal{B}$ est vraie (Montrons que $\mathcal{A}$ est vraie.) [...] Ainsi $\mathcal{A}$ est vraie. On en déduit que $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ est vraie.

Par double implication $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est donc vraie.

Une variante consiste à remplacer la preuve d'une des deux implications par la preuve de sa contraposée :

Rédaction type de la preuve par double implication de $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ (variante).

Procédons par double implication.

- Supposons que $\mathcal{A}$ est vraie (Montrons que $\mathcal{B}$ est vraie.) [...] Ainsi $\mathcal{B}$ est vraie. On en déduit que $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie.
- Supposons que $\mathcal{A}$ est fausse (Montrons que $\mathcal{B}$ est fausse.) [...] Ainsi $\mathcal{B}$ est fausse. On en déduit que $\mathrm{non}(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathrm{non}(\mathcal{B})$ est vraie.

Par double implication $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est donc vraie.

Exemple : *Le théorème de la division euclidienne (cf. chapitre 12) assure que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, il existe un unique $(q,r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$. Montrons à l'aide de ce théorème que $b|a$ si et seulement si $r = 0$.*

VI Raisonnement par analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse est utilisé généralement lorsqu'on désire prouver l'existence (ou la non existence) de solutions à un problème donné (typiquement vérifier une propriété) et d'identifier la ou les solutions éventuelles.

On se donne P une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E. Le raisonnement par analyse-synthèse consiste à déterminer $A = \{x \in E \,|\, P(x)\}$. Pour cela on s'appuie sur le principe de la double implication : pour tout $x \in E$, on a $P(x) \Leftrightarrow x \in A$.

Ce raisonnement se déroule en trois étapes :

Pour tout $x \in E$, dans l'analyse, on trouve une condition **nécessaire** à $P(x)$. Dans la synthèse, on montre que la condition nécessaire trouvée est une condition **suffisante** à $P(x)$.

- **Analyse.** On suppose que le problème admet une solution : il existe $x \in E$ tel que $P(x)$. On procède par conditions nécessaires, en accumulant suffisamment de renseignements pour dégager un ou plusieurs candidats (des éléments de E) à être la solution du problème (à vérifier P).
- **Synthèse.** On vérifie que les candidats (s'il y en a) sont effectivement solutions du problèmes.
- **Conclusion.** On donne la ou les solutions du problème (s'il y en a).

Si, à l'issue de l'étape d'analyse, on trouve un unique candidat à être la solution et que ce candidat s'avère être effectivement solution, alors on a prouvé aussi l'unicité.

Voici comment on peut rédiger :

Rédaction type de raisonnement par analyse-synthèse pour trouver l'ensemble des éléments de E vérifiant P.

Raisonnons par analyse-synthèse.

- **Analyse.** Soit $x \in E$. Supposons que $P(x)$ est vraie.
  [...]
  Par conséquent $x \in A$ (un ensemble que l'on vient de déterminer et poser).
- **Synthèse.** Soit $x \in A$. Vérifions que $P(x)$ est vraie.
  [...]
- **Conclusion.** A est l'ensemble des éléments de E qui vérifient P.

A l'étape de synthèse, il se peut que certains candidats ne soient pas en fait solution (on n'a sans doute pas été assez précis lors de l'étape d'analyse). On les exclut alors de l'ensemble des solutions.

Exemple : *Résolvons l'équation $x = \sqrt{x^3 + x^2 - x}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.*

On fait une analyse-synthèse lorsque l'on résout une équation ou inéquation par double inclusion. Ici on ne peut pas procéder directement par des équivalents successifs puisque passer au carré est irréversible (on ne connaît pas le signe de x).

Exemple : *Montrons que toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.*

VII Raisonnement par récurrence

1) Récurrence simple

Nous montrerons le théorème suivant dans le prochain chapitre :

Théorème (principe de récurrence). *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit P une propriété portant sur les entiers naturels. On suppose que*

- *$P(n_0)$ est vraie.*
- *Pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.*

Alors, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, la proposition $P(n)$ est vraie.

Le deuxième point s'écrit mathématiquement :

$\forall n \geqslant n_0, P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

C'est l'outil principal pour montrer une propriété portant sur les entiers naturels. La première chose à faire est d'introduire la propriété P proprement :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant n_0\text{, posons } P(n) : \text{« ...... ».}}$$

On ne montre pas non plus toute propriété portant sur les entiers naturels par récurrence. Si par exemple, on ne voit aucun lien évident entre $P(n)$ et $P(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il faut essayer autre chose.

Exemple : *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $P(n)$: « $0+1+2+3+4+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. »*

⚠ Si la lettre P est déjà prise, on choisit autre chose : Q, H, etc.

⚠ Une erreur classique et très grave consiste à mettre le $\forall$ dans la proposition, comme ceci : Posons $P(n)$: « $\forall n \geqslant n_0$, ... ». Cela n'a aucun sens ! Puisque le n d'un $\forall$ est muet, on pourrait l'écrire $P(n)$: « $\forall k \geqslant n_0$, ... ». Dans ce cas la proposition $P(n)$ ne dépend plus de n...

Il n'est pas obligatoire d'introduire la propriété si elle est courte et bien identifiée précédemment. Mais cela demande du recul ! Pour le moment, on le fera systématiquement.

Cela consiste à montrer une proposition universelle dans laquelle il y a une implication. Il n'y a qu'une seule façon de rédiger !

Il faut impérativement utiliser $P(n)$ pour montrer $P(n+1)$. Si on arrive à montrer $P(n+1)$ directement, c'est qu'il ne fallait pas raisonner par récurrence. Dans ce cas, on recommence une autre rédaction

Autre erreur classique de rédaction, écrire : Pour tout $n \geqslant n_0$, $P(n)$: « ... ». Vous affirmez alors que la propriété est vraie donc il n'y a plus rien à montrer !

Ensuite il y a deux étapes à respecter :

- **Initialisation.** On vérifie que $P(n_0)$ est vraie, c'est-à-dire que l'entier n_0 satisfait bien à la propriété. C'est le pas initial de la récurrence (dans la pratique on a souvent $n_0 = 0$ ou 1).
- **Hérédité.** On se donne $n \geqslant n_0$ et on suppose que $P(n)$ est vraie. C'est l'hypothèse de récurrence. On montre que $P(n+1)$ est vraie en utilisant l'hypothèse de récurrence. On dit alors que la propriété P est héréditaire.

Rédaction type de la preuve par récurrence de « $\forall n \geqslant n_0,\ P(n)$ ».

- **Initialisation.** [...] Donc $P(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \geqslant n_0$. Supposons $P(n)$ vraie. (Montrons que $P(n+1)$ est vraie).
  [...]
  Ainsi $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion.** Par récurrence, pour tout $n \geqslant n_0$, $P(n)$ est vraie.

TOUT AUTRE RÉDACTION EST EXCLUE !

Exemple : *On a déjà montré (avec un raisonnement direct) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme S_n des entiers de 0 et n est égale à $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Montrons-la par récurrence.*

L'étape d'hérédité commence toujours ainsi : « Soit $n \geqslant n_0$. Supposons $P(n)$ est vraie. »

Quelques erreurs à ne jamais faire :

- Il n'y a aucune raison que le rang initial s'appelle n_0. Si on veut l'appeler ainsi, il faut le dire. C'est inutile en général (il vaut souvent 0 ou 1 d'ailleurs).
- Dans l'hérédité, il ne faut surtout pas démarrer par : « Supposons que, pour tout $n \geqslant n_0$, $P(n)$ soit vraie ». Dans ce cas, c'est fini ! On suppose ce qu'on veut prouver !
- Dans l'hérédité, il ne faut pas démarrer par : « Supposons qu'il existe $n \geqslant n_0$ tel que $P(n)$ soit vraie ». En effet, le n choisi n'est pas alors quelconque alors qu'il faut prouver l'hérédité pour toutes les valeurs de n supérieures ou égales à n_0 : il peut y avoir des trous dans le raisonnement par récurrence !
  Écrire « Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain n » est la même erreur !
- Dans l'hérédité, on doit prendre n supérieur ou égal à la dernière valeur pour laquelle on a montré l'initialisation.

  Ci-dessus, on a prouvé $P(0)$ donc on suppose $n \in \mathbb{N}$. Il ne faut pas supposer $n \in \mathbb{N}^*$ (nous verrons une illustration de cette erreur dans l'exercice 5 du TD n° 2). Si cela ne suffit pas, on peut prouver l'initialisation pour une valeur supplémentaire.

Une récurrence c'est comme des dominos : si le premier tombe et si on sait que la chute de n'importe quel domino provoque la chute du suivant, alors ils vont tous tomber...

... Si on sait que la premier tombe mais qu'on ne suppose pas qu'il entraîne le deuxième (l'erreur est ici) dans sa chute alors, on ne peut pas conclure qu'ils vont tous tomber.

On rappelle qu'utiliser un équivalent est très contraignant : il faut être sûr que l'on peut bien revenir en arrière.

De façon générale, il est conseillé de toujours rédiger une récurrence si on n'est pas sûr de soi. Si la récurrence est vraiment immédiate, la rédiger prendra moins de cinq minutes (ce qui est peu sur une épreuve de quatre heures).

- Lorsque la propriété est une formule, il ne faut pas l'écrire, constater qu'elle est vraie et annoncer que l'initialisation est vraie. En effet, on ne peut pas encore l'écrire puisqu'on ne sait pas encore qu'elle est vraie (c'est le but de cette étape).

  Ci-dessus il ne faut pas écrire « $S_0 = \dfrac{0(0+1)}{2} = 1$ donc $P(0)$ est vraie » ! En effet, on ne sait pas encore que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$! C'est ce qu'on veut prouver ! Il faut calculer les deux termes séparément et prouver qu'ils sont égaux.
- Il faut aussi éviter (mais ce n'est pas non plus interdit) d'utiliser des équivalences dans l'étape d'hérédité d'une récurrence. En effet l'étape d'hérédité est la preuve d'une implication : il n'y a donc pas besoin de devoir revenir en arrière et c'est prendre un risque inutile que d'utiliser des équivalents.

Parfois on écrira « par récurrence immédiate ». Un candidat aux concours a le droit de dire cela dans une copie, à deux conditions :

- Avoir déjà rédigé une récurrence dans sa copie (il ne faut donc pas parler de récurrence immédiate pour la première récurrence du sujet). En effet, le correcteur veut voir si le candidat sait rédiger. Une fois qu'il a montré patte blanche, il peut aller plus vite sur les suivantes.
- Que la récurrence soit vraiment immédiate (les correcteurs sont chatouilleux à propos des tentatives d'arnaque). Montrer que le résultat est vrai aux rangs $0, 1, 2, 3$ etc. en faisant apparaître l'argument qui permet de passer du rang 1 au rang 2 (par exemple), en faisant bien comprendre qu'il se généralise, suffit en général à convaincre le correcteur.

Exemple :

2) Récurrence double

Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ ne suffit pas pour montrer $P(n+1)$ mais que l'on a besoin aussi de $P(n-1)$, alors on doit recourir à une récurrence double.

Ici, on suppose l'hypothèse aux deux derniers rangs. Attention, il faut montrer l'initialisation pour deux valeurs ! On généralise sans peine à une récurrence triple ou à une récurrence d'ordre k pour $k \geqslant 3$. Attention, il ne faut pas oublier de montrer l'initialisation pour k valeurs !

Théorème (principe de récurrence double). *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit P une propriété portant sur les entiers naturels. On suppose que*

- *$P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies.*
- *Pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, si $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies, alors $P(n+2)$ est vraie.*

Alors, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, la proposition $P(n)$ est vraie.

Exemple : *Notons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que $x_0 = 5$, $x_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{u_n}{4}$. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{5-3n}{2^n}$.*

Ici u_{n+2} est exprimé en fonction de u_{n+1} et de u_n. Nous avons impérativement besoin d'avoir une information sur u_{n+1} ET sur u_n. C'est la raison d'être de cette récurrence double.

3) Récurrente forte

Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ ne suffit pas pour montrer $P(n+1)$ mais que l'on a besoin de savoir que P est vraie à un certain rang mystère inférieur à n, voire à tous les rangs inférieurs à n alors on doit recourir à une récurrence forte.

Théorème (principe de récurrence forte). *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit P une propriété portant sur les entiers naturels. On suppose que*

- *$P(n_0)$ est vraie.*
- *Pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, si $P(n_0)$, $P(n_0+1)$, $\ldots$ et $P(n)$ sont vraies, alors $P(n+1)$ est vraie.*

Alors, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, la proposition $P(n)$ est vraie.

Exemple : *Montrons par récurrence forte que tout entier naturel supérieur ou égale à 2 possède un diviseur premier.*

Ici, on ne sait pas du tout qui est précisément d qui est le rang auquel on applique l'hypothèse de récurrence. On sait juste qu'il est inférieur à n. C'est le raison d'être de cette récurrence forte.

4) Récurrence finie, récurrente descendante

La seule différence avec la récurrence simple est ce point : le n choisi arbitrairement dans la première phrase de l'hérédité est inférieur ou égal à $N-1$ (attention pas à N puisque $P(N+1)$ n'est pas défini).

Si la propriété P que l'on veut démontrer porte sur tous les entiers jusqu'à un certain rang, alors on opte pour une récurrence finie.

Théorème (principe de récurrence finie). *Soit $(n_0, N) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n_0 < N$. Soit P une propriété portant sur les entiers naturels. On suppose que*

- *$P(n_0)$ est vraie.*
- *Pour tout entier naturel n tel que $n_0 \leqslant n \leqslant N-1$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n-1)$ est vraie.*

Alors, pour tout entier naturel n tel que $n_0 \leqslant n \leqslant N$, la proposition $P(n)$ est vraie.

Pour tout entier naturel n tel que $n \leqslant n_0$, posons $Q(n) = P(n_0 - n)$. La récurrence descendante prouvant P est exactement la récurrence finie qui prouve Q pour les entiers de 0 à n_0.

Théorème (principe de récurrence descendante). *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit P une propriété portant sur les entiers naturels. On suppose que*

- *$P(n_0)$ est vraie.*
- *Pour tout entier naturel n tel que $1 \leqslant n \leqslant n_0$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n-1)$ est vraie.*

Alors, pour tout entier naturel n tel que $n \leqslant n_0$, la proposition $P(n)$ est vraie.

Remarque : Il y a encore de nombreuses autres variantes, notamment on peut mixer plusieurs types de récurrence :

- des récurrences descendantes sur $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}^*$ (mais alors autant faire une récurrence simple sur $\mathbb{N}$ en remplaçant n par $-n$).
- des mélanges de plusieurs récurrences. Par exemple des récurrences doubles finies, ou doubles descendantes.

Pour tout $k \in [\![3\,;n]\!]$, $x_k + x_{k-2} = 2x_{k-1}$. Cette relation de récurrence double nous pousse vers une récurrence double. De plus, puisque l'on part de x_n et que l'on descend, il faudra une récurrence descendante.

Exemple : *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de réels solutions du système suivant :*

$$\left\{\begin{array}{ccccc} & & x_n & = & 1 \\ & & x_{n-1} & = & 2x_n \\ x_n & + & x_{n-2} & = & 2x_{n-1} \\ x_{n-1} & + & x_{n-3} & = & 2x_{n-2} \\ & \vdots & & \vdots & \\ x_4 & + & x_2 & = & 2x_3 \\ x_3 & + & x_1 & = & 2x_2 \end{array}\right.$$

Donner la valeur de $x_1, \ldots, x_n$.