Chapitre 3

Propriétés des nombres réels

I Les ensembles de nombres réels

1) Existence admise des ensembles de nombres réels

Nous admettons l'existence et les principales propriétés des ensembles de nombres suivants :

- L'ensemble $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$ des nombres entiers naturels.
- L'ensemble $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$ des nombres entiers relatifs.
- L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.
- L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

On dit que l'ensemble E est strictement inclus dans l'ensemble F, si $E \subset F$ et $E \neq F$. On note alors $E \subsetneq F$.

Nous avons les inclusions strictes suivantes : $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

Ces ensembles contiennent 0 et on note $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ et $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

L'ensemble $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ des réels qui ne sont pas rationnels et appelé ensemble des nombres irrationnels.

2) Opérations algébriques dans $\mathbb{R}$

a) Addition, soustraction, multiplication et division

Définir une opération sur un ensemble E consiste à associer à toute paire d'éléments de E un autre élément de E. Par exemple l'addition (resp. la multiplication) sur $\mathbb{R}$ associe à deux réels x et y leur somme (resp. leur produit), notée $x + y$ (noté $x \cdot y$).

On admet les propriétés suivantes, qui découlent de la construction (hors programme) de l'ensemble des réels :

Proposition.

- *L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une opération, appelée addition, notée $+$, et qui vérifie :*
  - ⋆ *Pour tous réels x et y, $x + y = y + x$ (commutativité).*
  - ⋆ *Pour tous réels x, y et z, $x + (y + z) = (x + y) + z$ (associativité).*
  - ⋆ *Pour tout réel x, $0 + x = x + 0 = x$ (0 est l'élément neutre pour l'addition).*
  - ⋆ *Tout réel x admet un unique opposé, noté $-x$: $x + (-x) = (-x) + x = 0$.*
- *Pour tous réels x et y, on note $x - y = x + (-y)$ la soustraction de x par y.*
- *L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une opération appelée multiplication, notée $\cdot$ ou $\times$, et qui vérifie :*
  - ⋆ *Pour tous réels x et y, $x \cdot y = y \cdot x$ (commutativité).*
  - ⋆ *Pour tous réels x, y et z, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (associativité).*
  - ⋆ *Pour tout réel x, $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ (1 est l'élément neutre pour la multiplication).*
  - ⋆ *Tout réel x non nul admet un inverse, noté x^{-1} ou $\dfrac{1}{x}$: $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.*
  - ⋆ *Pour tous réels x, y et z, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (la multiplication est distributive par rapport à l'addition).*
- *Si $y \neq 0$, on note $\dfrac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$ la division (ou quotient) de x par y.*

Pour tous réels x et y, s'il n'y a pas d'ambiguité, on note plutôt xy au lieu de $x \cdot y$ ou de $x \times y$.

On ne divise JAMAIS par 0. A chaque fois que l'on divise, on doit avoir ça en tête.

Ces propriétés permettent d'en obtenir beaucoup d'autres :

Proposition. *Pour tout réel x, $0 \cdot x = 0$ et $(-1) \cdot x = -x$.*

Nous referons ce type de preuve dans le chapitre 28.

Démonstration. Soit x un réel. On a

- $0x = (0+0)x = 0x + 0x$ donc $0x = 0x - 0x = 0$.
- $0 = 0x = (1 + (-1))x = 1x + (-1)x = x + (-1)x$ donc $-x = (-1)x$. $\square$

On aura l'occasion de le redire mais en mathématiques, la plupart du temps on cherche à factoriser et non à développer.

Proposition (développement/factorisation). *Soient x, y, z et t des réels. On a*

- $xy - xz = x(y - z)$.
- $xz + xt + yz + yt = (x + y)(z + t)$.
- $xz - xt - yz + yt = (x - y)(z - t)$.
- $xz + xt - yz - yt = (x - y)(z + t)$.

Par convention, les opérations ont un ordre de priorité (d'abord les **P**arenthèses, puis les **E**xposants, puis les **M**ultiplications/**D**ivisions de gauche à droite et enfin les **A**dditions/**S**oustractions de gauche à droite).

Démonstration.

- $xy = x(y - z + z) = x(y - z) + xz$ donc $xy - xz = x(y - z)$.
- $xz + xt + yz + yt = x(z + t) + y(z + t) = (x + y)(z + t)$.
- $xz - xt - yz + yt = x(z - t) - y(z - t) = (x - y)(z - t)$.
- $xz + xt - yz - yt = x(z + t) - y(z + t) = (x - y)(z + t)$. $\square$

Proposition (simplification de termes). *Soient x, y et z des réels. On a*

- *Si $x + y = x + z$, alors $y = z$.*
- *Si $xy = xz$, alors $\underline{x = 0}$ ou $y = z$.*

Ne surtout pas oublier le cas où $x = 0$! En effet, on ne simplifie (en divisant) par x que s'il est non nul.

Démonstration. Pour le premier point, on soustrait z de chaque côté. Pour le deuxième, ou bien $x = 0$, ou bien $x \neq 0$ et alors on divise par x de chaque côté. $\square$

Corollaire. *Si x et y sont deux réels tels que $xy = 0$, alors $x = 0$ ou $y = 0$.*

On admet la proposition suivante qui découle là encore de la construction (hors-programme) de $\mathbb{N}$, de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Q}$:

Proposition (stabilité des ensembles de nombres).

- *L'ensemble $\mathbb{N}$ est stable par addition et multiplication, i.e. pour tous x et y dans $\mathbb{N}$, $x + y \in \mathbb{N}$ et $xy \in \mathbb{N}$.*
- *L'ensemble $\mathbb{Z}$ est stable par addition, soustraction et multiplication, i.e. pour tous x et y dans $\mathbb{Z}$, $x + y \in \mathbb{Z}$, $x - y \in \mathbb{Z}$ et $xy \in \mathbb{Z}$.*
- *L'ensemble $\mathbb{Q}$ est stable par addition, soustraction et multiplication, i.e. pour tous x et y dans $\mathbb{Q}$, $x + y \in \mathbb{Q}$, $x - y \in \mathbb{Q}$ et $xy \in \mathbb{Q}$. L'ensemble $\mathbb{Q}^*$ est également stable par division, i.e. pour tous x et y dans $\mathbb{Q}^*$, $\dfrac{x}{y} \in \mathbb{Q}^*$.*

$\mathbb{N}$ n'est pas stable par soustraction (par exemple : $2 - 3 = -1 \notin \mathbb{N}$). $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Z}^*$ ne sont pas stables par division (par exemple : $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$). $\mathbb{Q}^*$ et $\mathbb{R}^*$ ne sont pas stables par division car, encore une fois, on ne peut pas diviser par 0.

b) Le cas des entiers

Définition (diviseurs et multiples). *Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. On dit que a divise b s'il existe $c \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ac$. On note alors $a|b$. On dit aussi que a est un diviseur de b ou encore que b est un multiple de a.*

On note $a \nmid b$ lorsque a ne divise pas b.

Définition (parité d'un entier). *Un nombre entier n est dit pair si $2|n$ (c'est-à-dire il existe un entier k tel que $n = 2k$) et impair si $2 \nmid n$.*

Tous les résultats de ce paragraphe seront démontrés dans le chapitre 12.

Nous admettons provisoirement les résultats suivants :

Théorème (division euclidienne). *Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$. On dit que q est le quotient de la division euclidienne de a par b et r le reste.*

Corollaire. *Un nombre entier n est impair si et seulement si il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$.*

Définition (entiers premiers entre eux). *On dit que deux entiers a et b non tous nuls sont premiers entre eux si 1 est leur seul diviseur positif commun.*

Exemple : *5 et 8 sont premiers entre eux.*

1 n'est pas premier par définition.

Définition (nombre premier). *On dit qu'en entier naturel p supérieur ou égal à 2 est premier si 1 et p sont ses seuls diviseurs. Sinon on dit qu'il est composé.*

Exemple : *Les dix premiers nombres premiers sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29 et 31.*

On verra qu'il y a une infinité de nombres premiers

Théorème (décomposition en produits de facteurs premiers). *Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, il existe $r \in \mathbb{N}^*$, $p_1, \dots, p_r$ des nombres premiers distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des entiers naturels non nuls tels que*

$$n = p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_r^{\alpha_r} = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}.$$

Cette écriture est unique à l'ordre près des termes et on l'appelle la décomposition de n en produit de facteurs premiers.

0 et 1 n'admettent pas une telle décomposition.

Exemples :

c) Le cas des rationnels

Les deux propositions suivantes sont admises et découlent de la construction (hors programme) de l'ensemble des rationnels :

Proposition. *Tout rationnel r s'écrit sous la forme $r = \dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$. On dit que a est le numérateur de q et b le dénominateur de q.*

Proposition (opérations dans $\mathbb{Q}$). *Soient a, c des entiers et b, d des entiers non nuls. Nous avons*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \text{et} \quad \left(\frac{b}{d}\right)^{-1} = \frac{d}{b}.$$

La proposition suivante sera démontrée dans le chapitre 12 :

Théorème (Forme irréductible d'un rationnel). *Soit $r \in \mathbb{Q}$. Il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que a et b sont premier entre eux et $r = \dfrac{a}{b}$. Cette écriture est appelée forme irréductible du rationnel r. De plus, si $r \neq 0$, alors toute écriture de r est de la forme $\dfrac{ac}{bc}$ avec $c \in \mathbb{Z}^*$.*

Nous n'utiliserons par la calculatrice cette année. Il est temps d'apprendre à simplifier une somme de fractions « à la main ». Pour cela, on met au dénominateur non pas le produit des dénominateurs mais le plus grand multiple commun (PPCM pour les intimes) des dénominateurs. Pour cela on commence par décomposer chaque terme en produit de facteurs premiers. Ensuite, on essaie de factoriser au maximum.

> Hors de question de tout mettre sur $6 \cdot 35 \cdot 10 \cdot 21$. Ces quatre termes ont plusieurs facteurs communs.

Simplifions $x = \frac{1}{6} - \frac{9}{35} + \frac{3}{10} - \frac{8}{21}$.

> Patience avant de tout développer. On essaie de factoriser au maximum et seulement à la fin on simplifiera.

d) Puissances entières

Définition (puissance entière). *Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on appelle puissance $n^{\text{ième}}$ de x, et note x^n, le réel $x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ termes}}$. On pose $x^0 = 1$.*

Si $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$ et $x \neq 0$, on définit $x^n = \underbrace{\frac{1}{x} \times \frac{1}{x} \times \cdots \times \frac{1}{x}}_{-n \text{ termes}}$.

> En particulier, on pose aussi $0^0 = 1$

> Vous avez bien lu : le produit ci-contre contient $-n$ termes (on suppose que $n < 0$). Par exemple, si $n = -2$, alors $x^{-2} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}$, et ce produit contient $2 = -(-2)$ termes.

Remarque : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^1 = x$.

Par construction des puissances entières, on a :

Proposition. *Pour tous $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$, $x^{n+1} = x^n \cdot x = x \cdot x^n$ (valable également si $x = 0$ et $n \in \mathbb{N}$).*

Par récurrence (que je vous laisse rédiger en exercice) :

Proposition. *Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x^n = 0$ si et seulement si $x = 0$.*

> La convention $x^0 = 1$ est naturelle : si $x \neq 0$ alors, pour passer de x^3 à x^2 on divise par x, puis pour passer de x^2 à x^1 on divise encore par x, donc pour passer de x^1 à x^0, il est naturel de vouloir diviser par x et on obtient alors $x^0 = 1$.

Proposition. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$*

Remarque : En particulier, si $n \in \mathbb{Z}$, alors $(-1)^{2n+1} = -1$, $(-1)^{2n} = 1$,

$$(-1)^{n-1} = (-1)^{n+1} = -(-1)^n \quad \text{et} \quad (-1)^n = \frac{1}{(-1)^n}.$$

Proposition. *Soient n et p deux entiers relatifs et x et y deux réels non nuls. Nous avons :*

- $(xy)^n = x^n y^n$
- $x^{n+p} = x^n x^p$
- $(x^n)^p = x^{np} = (x^p)^n$
- $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$
- $x^{n-p} = \frac{x^n}{x^p}$
- $x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n}$.

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Il est essentiel de ne pas apprendre ces formules par coeur sans les comprendre. Elles sont très simples : par exemple

> Et surtout pas $x^n x^p = x^{np}$ ou $(x^n)^p = x^{n^p}$.

$$x^n x^p = \underbrace{\underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ termes}} \times \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{p \text{ termes}}}_{n+p \text{ termes}} = x^{n+p}.$$

$$\begin{aligned}(x^n)^p &= \underbrace{x^n \times x^n \times \cdots \times x^n}_{p \text{ termes}} \\ &= \underbrace{\underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ termes}} \times \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ termes}} \times \cdots \times \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ termes}}}_{p \text{ fois}} \\ &= \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{np \text{ termes}} = x^{np}.\end{aligned}$$

Exemple : *Soit $n \in \mathbb{Z}$. Simplifions $x = (-1)^{3n+1789} - \dfrac{1}{(-1)^{3-2n}}$.*

Quelques identités très remarquables : si x est un réel, alors : $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$ $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ $4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$ $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$

Proposition (identités remarquables pour deux termes). *Soient x et y deux réels. Nous avons*

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2, \quad x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2, \quad x^2 - y^2 = (x+y)(x-y).$$

Proposition (identités remarquables pour trois termes). *Soient x et y deux réels. Nous avons*

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3, \quad (x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2), \quad x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2).$$

3) Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

a) Définitions et premières propriétés

La proposition suivante est admise et découle de la construction (hors programme) de l'ensemble des réels :

Nous verrons dans le chapitre 16, d'autres types de relations entre les éléments d'un ensemble qui ont une propriété de réflexivité, d'antisymétrie et de transitivité. On les appelle des relations d'ordre

Proposition. *L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre, notée $\leqslant$ qui vérifie :*

- *Pour tout réel a, $a \leqslant a$ (réflexivité).*
- *Pour tous réels a et b, $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$ (ordre total).*
- *Pour tous réels a, b et c :*
  - ⋆ *Si $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$, alors $a = b$ (antisymétrie).*
  - ⋆ *Si $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$, alors $a \leqslant c$ (transitivité).*
  - ⋆ *Si $a \leqslant b$, alors $a + c \leqslant b + c$ (compatibilité avec l'addition).*
  - ⋆ *Si $a \leqslant b$ et $0 \leqslant c$, alors $ac \leqslant bc$ (compatibilité avec la multiplication).*

En mathématiques françaises, lorsqu'on dit « x est inférieur (resp. supérieur) à y », il est toujours sous-entendu « x est inférieur (resp. supérieur) ou égal à y ».

Définition. *Soient x et y des réels. On dit que*

- *x est inférieur (ou égal) à y lorsque $x \leqslant y$.*
- *x est supérieur (ou égal) à y, et on note $x \geqslant y$, lorsque $y \leqslant x$.*
- *x est strictement inférieur à y, et on note $x < y$, lorsque $x \leqslant y$ et $y \neq x$.*
- *x est strictement supérieur à y, et on note $x > y$, lorsque $x \geqslant y$ et $y \neq x$.*

Définition (signe d'un réel). *Un réel x est dit :*

- *positif si $x \geqslant 0$,*
- *négatif si $x \leqslant 0$,*
- *strictement positif si $x > 0$,*
- *strictement négatif si $x < 0$.*

• Si $x < y$, alors $x \leqslant y$ (mais la réciproque est fausse).
• Si $x > y$, alors $x \geqslant y$ (mais la réciproque est fausse).
• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant x$ et $x \geqslant x$.

On en déduit les règles suivantes :

Multiplier par un réel négatif de chaque côté d'une inégalité change le sens de l'inégalité.

Proposition. *Soient a, b, c et d des réels.*

- *Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a + c \leqslant b + d$.*
  En particulier la somme de deux réels positifs (respectivement négatifs) est positive (respectivement négative).
- *Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant 0$, alors $ac \geqslant bc$.*
  En particulier $a \leqslant b$ si et seulement si $-a \geqslant -b$.
- *On a $ab \geqslant 0$ (respectivement $ab \leqslant 0$) si et seulement si a et b ont le même signe (respectivement sont de signe contraire).*
- *Si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$, alors $ac \leqslant bd$.*
- *Si $(a > 0$ et $b > 0)$ ou $(a < 0$ et $b < 0)$, alors $a \leqslant b$ si et seulement si $\dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{1}{b}$.*

On ne peut passer à l'inverse dans une inégalité que si les deux termes ont le même signe (et sont non nuls bien sûr). Dans tous les cas, cela change le sens de l'inégalité.

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

⚠ On a le droit d'additionner deux inégalités membre à membre si elles sont dans le même sens. On peut aussi les multiplier dans le cas où **TOUT EST POSITIF**. Par contre soustraire, multiplier quand tout n'est pas positif ou diviser des inégalités membre à membre n'est pas permis :

Par exemple, pour $a = -1$, $b = 1$, $c = -4$ et $d = 2$, on a $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ alors que $a - c = 3 \geqslant -1 = b - d$, $ac = 4 \geqslant 2 = bd$ et $\dfrac{c}{a} = 4 \geqslant 2 = \dfrac{d}{b}$.

On peut néanmoins s'en sortir si on se ramène à des additions ou des multiplications de termes positifs. Par exemple :

- Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $-d \leqslant -c$ et donc $a - d \leqslant b - c$.
- Si $0 < a \leqslant b$ et $0 < c \leqslant d$, alors $0 < \dfrac{1}{d} \leqslant \dfrac{1}{c}$ et donc $\dfrac{a}{d} \leqslant \dfrac{b}{c}$.

Moralité : lorsqu'on additionne membre à membre une inégalité large et une inégalité stricte, on obtient une inégalité stricte. Lorsqu'on multiplie membre à membre une inégalité large et une inégalité stricte, **et que tout est strictement positif**, on obtient une inégalité stricte (sauf si l'inégalité large est $0 \leqslant 0$ bien sûr).

Proposition. *Soient a, b, c et d des réels.*

- *Si $(a < b$ et $b \leqslant c)$ ou $(a \leqslant b$ et $b < c)$, alors $a < c$.*
- *Si $a < b$ et $c \leqslant d$, alors $a + c < b + d$.*
- *Si $a < b$ et $0 < c$ (respectivement $c < 0$), alors $ac < bc$ (respectivement $ac > bc$).*
  En particulier, $a < b$ si et seulement si $-a > -b$.
- *$ab > 0$ si et seulement si $(a > 0$ et $b > 0)$ ou $(a < 0$ et $b < 0)$.*
- *$ab < 0$ si et seulement si $(a < 0$ et $b > 0)$ ou $(a > 0$ et $b < 0)$.*
- *Si $0 < a < b$ et $0 < c \leqslant d$, alors $ac < bd$.*
- *$a > 0$ (respectivement $a < 0$) si et seulement si $1/a > 0$ (respectivement $1/a < 0$).*
- *Si $(a > 0$ et $b > 0)$ ou $(a < 0$ et $b < 0)$, alors $a < b$ si et seulement si $1/a > 1/b$.*

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Lorsque l'on veut déterminer le signe (au sens strict) d'un produit de termes dépendant d'un paramètre (c'est le cas lorsque l'on veut résoudre une inéquation), il ne faut pas hésiter à faire un tableau de signe où l'on fait apparaître les valeurs de ce paramètre pour lesquelles les différents termes sont non définis (avec une double barre), nuls (avec un 0), strictement positifs (avec un $+$) ou strictement négatifs (avec un $-$). On conclut en se rappelant que le produit de deux termes de même signe (respectivement de signes contraires) est positif (respectivement négatif) et qu'un produit est nul si et seulement si l'un des termes du produit est nul.

Exemple : *Déterminons le signe de* $\dfrac{2x-1}{2+x-3x^2}$ *pour tout réel* x *tel que ce quotient est bien défini.*

Cette factorisation se devine bien mais sinon on reconnaît un trinôme du second degré, on calcule le discriminant et on trouve que $-\dfrac{2}{3}$ et 1 sont racines (cf. paragraphe III.2).

b) Relation d'ordre et puissances entières

Par récurrence, on montre que :

Moyen mnémotechnique : la règle dans le cas où $n=1$ est la même pour tous les n entiers naturels impairs. La règle dans le cas où $n=2$ (fonction carré) est la même que pour tous les n entiers naturels pairs. La règle dans le cas où $n=-1$ (fonction inverse) est la même que pour tous les n entiers négatifs impairs. Ces résultats deviendront un réflexe une fois que nous aurons revu les fonctions du type $x\mapsto x^n$ et leur monotonie, cf. chapitre 4.

Proposition. *Soient* x *et* y *deux réels.*

- *Soit* $n\in\mathbb{N}^*$.
  - ⋆ *Si* n *est pair et* $0\leqslant x<y$, *alors* $x^n<y^n$.
  - ⋆ *Si* n *est pair et* $x<y\leqslant 0$, *alors* $x^n>y^n$.
  - ⋆ *Si* n *est impair et* $x<y$, *alors* $x^n<y^n$.
- *Soit* $n\in\mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$.
  - ⋆ *Si* n *est pair et* $0<x<y$, *alors* $x^n>y^n$.
  - ⋆ *Si* n *est pair et* $x<y<0$, *alors* $x^n<y^n$.
  - ⋆ *Si* n *est impair et* $0<x<y$, *alors* $x^n>y^n$.
  - ⋆ *Si* n *est impair et* $x<y<0$, *alors* $x^n>y^n$.

⇝ Démonstration laissée en exercice.

⚠ Élever à une puissance entière les termes d'une inégalité n'est pas permis s'ils sont de signe contraire (à part si la puissance en question est un entier naturel impair).

Par exemple, on a $-3<5$ *et* $(-3)^2<5^2$ *mais* $-4<2$ *et* $(-4)^2>2^2$.

Exemple : *Si* x *est un réel tel que* $-1\leqslant x\leqslant 2$, *alors* $0\leqslant x^2\leqslant 4$ *(pour démontrer cela, on traite séparément le cas où* $-1\leqslant x\leqslant 0$, *auquel cas* $0\leqslant x^2\leqslant 1$, *et le cas où* $0\leqslant x\leqslant 2$ *auquel cas* $0\leqslant x^2\leqslant 4$*).*

⚠ On ne conclut surtout pas $1\leqslant x^2\leqslant 4$!!

Corollaire. *Soient* $x\in\mathbb{R}^*$ *et* $n\in\mathbb{Z}$.

- *Si* n *est pair, alors* $x^n>0$.
- *Si* n *est impair, alors* x^n *et* x *ont le même signe.*

Exemple : *Pour tout* $x\in\mathbb{R}$, $-\dfrac{2}{3}\leqslant\dfrac{4x+1}{2x^2+3}\leqslant 1$. *En effet :*

> Technique importante à retenir : pour montrer une inégalité entre deux termes, il est parfois (mais pas toujours non plus) plus simple d'étudier le signe de la différence. Il faut y penser !

c) Parties de $\mathbb{R}$ définies par une relation d'ordre

Définition (intervalles). *Pour tous réels a et b tels que $a \leqslant b$, nous notons*

$[a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x \leqslant b\}$ *(intervalle fermé borné ou segment),*

$]a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leqslant b\}$ *si $a < b$ (intervalle semi-ouvert borné),*

$[a\,;b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x < b\}$ *si $a < b$ (intervalle semi-ouvert borné),*

$]a\,;b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$ *si $a < b$ (intervalle ouvert borné),*

$]-\infty\,;a] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leqslant a\}$ *(intervalle fermé non borné),*

$]-\infty\,;a[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < a\}$ *(intervalle ouvert non borné),*

$[a\,;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geqslant a\}$ *(intervalle fermé non borné),*

$]a\,;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > a\}$ *(intervalle ouvert non borné),*

$]-\infty\,;+\infty[= \mathbb{R}$ *(intervalle ouvert et fermé non borné).*

Les réels a et b sont appelés les extrémités de l'intervalle.

> Pour tout réel a, l'intervalle $[a\,;a]$ est le singleton $\{a\}$. Les intervalles $]a\,;a]$, $[a\,;a[$ et $]a\,;a[$ sont vides. L'ensemble vide est donc considéré comme étant un intervalle de $\mathbb{R}$.

> Une intersection d'intervalles est un intervalle mais pas une union en général. Nous verrons dans le chapitre 13 une caractérisation des intervalles : ce sont les parties de $\mathbb{R}$ qui n'ont pas de « trous ».

Remarque : Si $a > b$, alors l'intervalle $[a\,;b]$ (respectivement $[a\,;b[$, $]a\,;b]$ et $]a\,;b[$) désigne souvent, par abus de notation, l'intervalle $[b\,;a]$ (respectivement $]b\,;a]$, $[b\,;a[$ et $]b\,;a[$). Mais attention, certains ouvrages prennent la convention que ces intervalles sont vides.

Définition. *On note*

- $\mathbb{R}_+ = [0\,;+\infty[$ *l'ensemble des réels positifs.*
- $\mathbb{R}_+^* =]0\,;+\infty[$ *l'ensemble des réels strictement positifs.*
- $\mathbb{R}_- =]-\infty\,;0]$ *l'ensemble des réels négatifs.*
- $\mathbb{R}_-^* =]-\infty\,;0[$ *l'ensemble des réels strictement négatifs.*

> Ne pas confondre les notations $[p\,;n]$ et $[\![p\,;n]\!]$. Ce dernier n'est PAS un intervalle.

Définition. *Si p et n sont deux entiers tels que $p \leqslant n$, alors on note $[\![p\,;n]\!] = \{p; p+1; \ldots; n-1; n\}$ l'ensemble des entiers compris (au sens large) entre p et n.*

4) Valeur absolue d'un réel

Définition. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la valeur absolue de x, noté $|x|$, par*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0, \\ -x & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

> Autrement dit, si un nombre est strictement négatif, pour obtenir sa valeur absolue, on met un moins devant.

> En particulier, si $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \max(x, -x)$. Ainsi, un moyen simple de montrer une inégalité du type $|\alpha| \leqslant A$ est de montrer que $\alpha \leqslant A$ et $-\alpha \leqslant A$.

Exemples : $|-3| = 3$, $|-\pi| = \pi$, $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$.

Remarque : Pour tout réel x, on a

$$|-x| = |x|, \qquad \big||x|\big| = |x|, \qquad x^2 = |x|^2, \qquad x \leqslant |x| \qquad -x \leqslant |x|.$$

De plus, $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Pour montrer les trois propositions suivantes, on distingue les cas selon que les réels x ou y qui interviennent sont positifs ou négatifs (cela fait quatre cas) :

Insistons lourdement sur ce point : lorsque $x = y$, on peut toujours passer au carré et dire que $x^2 = y^2$. Mais pour revenir en arrière, sans précision sur le signe, on peut uniquement conclure que $|x| = |y|$. Nous verrons plusieurs exemples dans le paragraphe III.2.

Proposition. *Soient x et y deux réels. Nous avons :*

De plus

Proposition. *Soient x et y deux réels. Nous avons :*

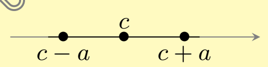
- $|x \times y| = |x| \times |y|$,
- *Si* $y \neq 0$, *alors* $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.
- *Si* $x \neq 0$ *et* $n \in \mathbb{Z}$, *alors* $|x^n| = |x|^n$.

Il faut impérativement savoir jongler entre ces équivalences.

Proposition. *Soient $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Nous avons*

- $|x| \leqslant a \iff \qquad \iff$
- $|x| < a \iff \qquad \iff$
- $|x| \geqslant a \iff \qquad \iff$
- $|x| > a \iff \qquad \iff$

On en déduit que, pour tous $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$,



L'intervalle ci-dessus est centré en c et contient tous les x qui sont à une distance de c qui est inférieure à a (cf. illustration ci-contre). Ce type d'intervalles jouera un rôle central dans les chapitres 14 et 21.

Proposition (inégalité triangulaire). *Pour tous réels x et y,*

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

L'inégalité triangulaire est une égalité si et seulement si $xy = |xy|$ si et seulement si x et y ont le même signe.

Démonstration.

$\square$

Notons qu'il y a égalité si et seulement si $xy = |xy|$ si et seulement si x et y ont même signe.

Corollaire (inégalité triangulaire renversée). *Pour tous réels x et y,*

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|.$$

Démonstration.

En d'autres termes, sous forme moins condensée : $|x|-|y| \leqslant |x-y|$ et $|y|-|x| \leqslant |x-y|$, les deux sont justes, tout dépend de laquelle on a besoin !

□

Remarque : Soient x et y des réels. Puisque $|-y| = |y|$, on en déduit :

Exemples :

Technique importante à retenir : pour montrer une inégalité entre deux termes, il est parfois (mais pas toujours non plus) plus simple d'étudier le signe de la différence. Il faut y penser !

- *Une inégalité très classique à connaître et savoir redémontrer en une ligne :*

Il est totalement faux d'affirmer que, puisque $x-4 \leqslant x+2$, alors $|x-4| \leqslant |x+2|$. La valeur absolue fait perdre toute notion de signe. Avant de résoudre toute équation faisant intervenir une valeur absolue, il faut donc penser à faire plusieurs cas (passer au carré est aussi parfois une bonne idée comme dans l'exemple ci-contre).

- *Résolvons l'inéquation $|x-4| \leqslant |x+2|$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, avec deux méthodes différentes :*

II Majorants, minorants, maximum, minimum

1) Parties majorées, parties minorées de $\mathbb{R}$

a) Majorants et minorants

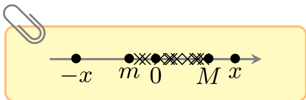
Définition. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

- *On dit qu'un réel M est un majorant de A si, pour tout $a \in A$, $a \leqslant M$.*
  Si A admet un majorant, alors on dit qu'elle est majorée.
- *On dit qu'un réel m est un minorant de A si, pour tout $a \in A$, $a \geqslant m$.*
  Si A admet un minorant, alors on dit qu'elle est minorée.
- *Si A est minorée et majorée, alors on dit qu'elle est bornée.*

Exemples :

Proposition. *Une partie non vide A de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement si la partie $\{|a| \mid a \in A\}$ est majorée, autrement dit si et seulement si :*

$$\exists x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \forall a \in A, \qquad |a| \leqslant x.$$



DÉMONSTRATION.

□

b) Comment trouver un majorant/minorant d'une partie

Et bien c'est tout un programme ! Si A est une partie non vide, pour la majorer, on peut commencer par se donner un élément quelconque a et chercher un réel M qui ne dépend pas de l'élément a que l'on s'est donné et tel que $a \leqslant M$. Pour cela, on s'aide des propriétés du paragraphe précédent et que l'on peut résumer selon les grands principes suivants :

- pour majorer une somme, on majore chacun de ses termes.
- pour majorer une différence, on majore le premier terme et on MINORE le second.
- pour majorer un produit de termes strictement positifs, on majore chacun de ses termes.
- pour majorer un quotient de termes strictement positifs, on majore le numérateur et on MINORE le dénominateur.

Même chose pour les minorants :

- pour minorer une somme, on minore chacun de ses termes.
- pour minorer une différence, on minore le premier terme et on MAJORE le second.
- pour minorer un produit de termes strictement positifs, on minore chacun de ses termes... par des termes positifs.
- pour minorer un quotient de termes strictement positifs, on minore le numérateur et on MAJORE le dénominateur... par des termes strictement positifs

Dans le chapitre suivante, nous dirons que A est l'ensemble image de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{4x+1}{2x^2+3}$ et que l'on cherche ici à majorer et minorer f.

Exemples : *Considérons* $A = \left\{ \dfrac{4x+1}{2x^2+3} \,\middle|\, 0 \leqslant x \leqslant 3 \right\}$.

En revanche ce ne sont pas du tout des majorants et minorants optimaux (on a vu dans le paragraphe I.3.b que 1 *est aussi un majorant de* A *et on peut montrer que* $\dfrac{1}{3}$ *est un minorant).*

Mais parfois, on ne peut trouver de majorants/minorants directement. Autre problème les majorations/minorations proposées « à la main » sont souvent grossières. On souhaiterait plutôt faire un choix optimal et trouver, s'ils existent, le plus petit des majorant et le plus grand des minorants. Nous commeçons à explorer cela dans le prochain paragraphe.

2) Maximum et minimum

a) Définitions et exemples

En d'autres termes, un maximum est un majorant qui appartient à l'ensemble et un minimum est un minorant qui appartient à l'ensemble.

Proposition. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$*

- *On dit que le réel x est un maximum de A si $x \in A$ et, pour tout $a \in A$, $a \leqslant x$.*
  Si A admet un maximum x, alors il est unique et on l'appelle le maximum (ou le plus grand élément) de A. Dans ce cas, on note $x = \max A$.
- *On dit que le réel x est un minimum de A si $x \in A$ et, pour tout $a \in A$, $a \geqslant x$.*
  Si A admet un minimum x, alors il est unique et on l'appelle le minimum (ou le plus petit élement) de A. Dans ce cas, on note $x = \min A$.

Démonstration.

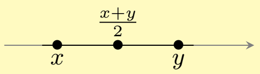
□

Exemples :

La preuve ci-contre que la partie A n'admet pas de minimum est assez technique pour quelque chose qui semble évident. Maintenant qu'on a vu comment faire, on pourra conclure directement pour un intervalle de ce type. D'ailleurs pour tous les intervalles, on pourra directement « lire » s'il y a un maximum ou un minimum, cf. tableau du paragraphe suivant.

Là encore, cela semble évident puisque 0 n'est pas « atteint » par les termes de la suite $(1/n)_{n\geqslant 1}$. Avec des arguments de limites (cf. chapitre 14), on pourra conclure plus directement.

L'astuce du milieu est à retenir : c'est très pratique lorsqu'on a besoin de trouver un élément qui se trouve strictement entre deux autres, cf. exemples ci-dessus et proposition ci-dessous.



Le réel b n'est pas le maximum de $[a\,;b[$, de $]a\,;b[$ ou de $]-\infty\,;b[$ mais c'est le plus petit de ses majorants. On dira dans le chapitre 13 que b est leur borne supérieure. Le réel a n'est pas le minimum de $]a\,;b]$, de $]a\,;b[$ ou de $]a\,;+\infty[$ mais c'est le plus grand de ses minorants. On dira dans le chapitre 13 que a est leur borne inférieur.

Remarques :

- Notons $-A = \{-x \,|\, x \in A\}$. La partie $-A$ admet un maximum (resp. un minimum) si et seulement si A admet un minimum (resp. un maximum).
- Si une partie de $\mathbb{R}$ admet un minimum (respectivement un maximum), elle est minorée (respectivement majorée). Par contraposée, si une partie de $\mathbb{R}$ est non minorée (respectivement non majorée), alors elle n'admet pas de minimum (respectivement de maximum).
- Si x et y sont des réels tels que $x < y$, alors $m = \dfrac{x+y}{2}$ vérifie $x < m < y$. Le réel m est le milieu de segment $[x; y]$.
- Si x et y sont des réels, alors $|x| = \max\{x; -x\}$,

$$\min\{x; y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2} \qquad \text{et} \qquad \max\{x; y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}.$$

Le deuxième exemple ci-dessus se généralise à tout type d'intervalle :

Proposition.

A	$\min A$	$\max A$
$[a\,;b]$	a	b
$[a\,;b[$	a	X
$]a\,;b]$	X	b
$]a\,;b[$	X	X
$[a\,;+\infty[$	a	X
$]a\,;+\infty[$	X	X
$]-\infty\,;b]$	X	b
$]-\infty\,;b[$	X	X
$]-\infty\,;+\infty[$	X	X

Démonstration. Prouvons par exemple que $A =]-\infty\,;a[$ n'a ni maximum ni minimum (les autres sont analogues).

> C'est intuitif : dire que le plus grand des éléments est inférieur à x revient au même que dire que tous les éléments sont inférieurs à x. Par exemple dire que le plus grand élève de la classe mesure moins de 2m revient exactement à dire que tout les élèves mesurent moins de 2m.

Proposition. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.*

- *Si A admet un maximum M, alors*

$$M \leqslant x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a \in A, \quad a \leqslant x.$$

- *Si A admet un minimum m, alors*

$$m \geqslant x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a \in A, \quad a \geqslant x.$$

Démonstration. Supposons que A admette un maximum M. Si $M \leqslant x$ alors, pour tout $a \in A$, $a \leqslant M \leqslant x$. Réciproquement, si pour tout $a \in A$, $a \leqslant x$, alors $M \leqslant x$ puisque $M \in A$. Le cas du minimum est analogue. □

Définition. *Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de réels indexée par un ensemble I non vide.*

- *Si $A = \{x_i \,|\, i \in I\}$ est majorée, on note $\max\limits_{i \in I} x_i$ le maximum de A.*
- *Si $A = \{x_i \,|\, i \in I\}$ est minorée, on note $\min\limits_{i \in I} x_i$ le minimum de A.*

b) Théorèmes d'existence de maximum ou de minimum

> Les résultats de ce paragraphe sont des théorèmes d'existence : ils nous disent qu'il existe un maximum ou un minimum. Mais en aucun cas ils nous disent comment les trouver.

Les assertions du théorème suivant sont admises (elles découlent de la construction de $\mathbb{N}$, de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{R}$, qui sont hors-programme) et peuvent être considérées comme des axiomes.

Théorème.

- *Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum.*
- *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un maximum.*
- *Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un minimum.*
- *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un maximum.*

> Par partie majorée/minorée de $\mathbb{Z}$, on entend ici qu'il existe un majorant/minorant **entier**. En fait le résultat reste vrai si l'on suppose l'existence d'un majorant/-minorant quelconque mais cela demande d'avoir vu la propriété de la borné supérieure (cf. chapitre 13).

Ce théorème permet de montrer le principe de récurrence :

Théorème (principe de récurrence). *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit P une propriété portant sur les éléments de $\mathbb{N}$ telle que*

- *$P(n_0)$ est vraie.*
- *Pour tout $n \geqslant n_0$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.*

Alors, pour tout $n \geqslant n_0$, $P(n)$ est vraie.

Démonstration.

□

On démontre par récurrence sur le cardinal de l'ensemble :

Théorème. *Tout ensemble fini non vide admet un maximum et un minimum.*

Exemple :

c) Comment trouver le maximum/minimum d'une partie

Encore une fois c'est tout un programme. On peut bien sûr chercher un majorant/minorant « à la main » (cf. paragraphe II.1.b) puis prouver qu'il appartient à la partie. Dans la pratique, on utilise souvent des études de fonctions. C'est l'objet du prochain chapitre.

d) Borne supérieure/inférieure

Lorsqu'une partie A est majorée (respectivement minorée) et qu'elle admet un plus petit majorant (rspectivement un plus grand minorant), celui-ci n'est pas forcément le maximum (respectivement le minimum) comme le montrent les exemples des intervalles. Le cas échéant, on parle de borne supérieure (respectivement inférieure). Nous y reviendrons dans le chapitre 13.

3) Partie entière d'un réel

Il est important de bien comprendre à la fois que l'existence et l'unicité de $\lfloor x \rfloor$ sont assurées par les deux inégalités de la proposition.

Proposition (partie entière d'un réel). *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$. L'entier n est appelé la partie entière de x et noté $\lfloor x \rfloor$.*

Exemples : $\lfloor 17,89 \rfloor = 17$, $\lfloor -3,2 \rfloor = -4$, $\lfloor 7/3 \rfloor = 2$, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$.

⚠ Prendre la partie entière d'un réel ne consiste pas à effacer les chiffres après la virgule dans son expression décimale. Ceci n'est vrai que si le réel est positif.

DÉMONSTRATION. Nous montrerons l'existence (qui semble pourtant tout à fait évidente) dans le chapitre 13. Montrons l'unicité :

□

Remarque : Tout ce qu'il faut retenir sur la partie entière d'un réel $x \in \mathbb{R}$ est que :

- $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.
- Si $m \in \mathbb{Z}$ vérifie $m \leqslant x < m+1$, alors $m = \lfloor x \rfloor$.
- Si $(m,p) \in \mathbb{Z}^2$ vérifie $m \leqslant x < m+1$ et $p \leqslant x < p+1$, alors $m = p$.

En inversant le point de vue du premier point, on a :

Proposition. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$.*

Remarque : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note aussi $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. On dit qu'il s'agit de la partie fractionnaire de x.

- On a $\{x\} \in [0\,;1[$.
- ⚠ $\{x\}$ n'est pas l'expression de x à laquelle on a enlevé le chiffre des unités : ceci n'est vrai que lorsque $x \geqslant 0$.

⚠ Si $n \notin \mathbb{Z}$, c'est faux car $\lfloor x \rfloor + n \notin \mathbb{Z}$ tandis que $\lfloor x + n \rfloor \in \mathbb{Z}$. Il est faux aussi que $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ ($x = 0,8$ et $y = 1,9$ fournissent un contre-exemple).

Proposition. *Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$*

Démonstration.

□

Remarque : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Que vaut $\lfloor nx \rfloor$? A quelle condition a-t-on $\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor$?

Par exemple, si $n = 5$ alors $\lfloor 5x \rfloor = 5\lfloor x \rfloor$ si et seulement si $\{x\} < \frac{1}{5} = 0,2$. Lorsque $x \geqslant 0$, c'est le cas si et seulement si le premier chiffre après la virgule est 0 ou 1.

Exemple : *Résolvons l'équation $\lfloor 3x + 4 \rfloor = 6 + \lfloor x \rfloor$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.*

Si $n = 2$ et x est un réel positif, alors on note simplement $\sqrt{x}$ la racine carrée de x. On pourrait aussi noter $\sqrt[1]{x} = x^{1/1}$ mais cela présente peu d'intérêt.

III Racines d'un réel positif

1) Racine $n^{\text{ième}}$ d'un réel positif

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Pour tout réel positif x, il existe un unique réel positif y tel que $y^n = x$. Ce réel est appelé racine $n^{\text{ième}}$ de x et noté $x^{\frac{1}{n}}$ ou $\sqrt[n]{x}$.*

Démonstration. Nous montrerons l'existence dans le chapitre 4 avec un argument de continuité. Montrons l'unicité :

Attention à ne pas confondre $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ avec $x^{3/2}$ (ce qui n'a pas encore de sens à ce stade de l'année mais voudra bientôt dire $\sqrt{x}^3$.

Exemples : $\sqrt[3]{8} = 2$ *car* $2^3 = 8$, $\sqrt[6]{729} = 3$ *car* $3^6 = 729$, $\sqrt[5]{32} = 2$ *car* $2^5 = 32$, $\sqrt[3]{729} = 9$ *car* $9^3 = 729$.

Remarques :

- On a $(-2)^3 = -8$ donc on pourrait être tenté de noter $-8 = \sqrt[3]{-2}$. On ne le fait pas : **on ne prend JAMAIS la racine d'un nombre strictement négatif !**
- Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a $\sqrt[n]{0} = 0$ et $\sqrt[n]{1} = 1$.
- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
  - ⋆ Si x est un réel positif, alors $(\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$.
  - ⋆ Si x est un réel quelconque et si n est pair, alors $x^n \geqslant 0$ et $\sqrt[n]{x^n} = |x|$.
- Ne pas confondre le fait que $\sqrt{x} \geqslant 0$ (c'est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+$) et le fait que x doit appartenir à $\mathbb{R}_+$ pour pouvoir définir $\sqrt{x}$.

On a $\sqrt{2} \approx 1,414$ et $\sqrt{3} \approx 1,732$. Nous verrons ultérieurement des méthodes pour obtenir de telles approximations.

Proposition. *Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soient x et y deux réels positifs. Nous avons :*

1. $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$

2. Si $y \neq 0$, alors $\sqrt[n]{\dfrac{1}{y}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{y}}$ *et* $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$.

3. Si $p \in \mathbb{Z}$ et $x \neq 0$, alors $(\sqrt[n]{x})^p = \sqrt[n]{x^p}$.

4. Si $p \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$, alors $\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[np]{x} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{x}}$.

Avec l'autre notation :
1. $(xy)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}}y^{\frac{1}{n}}$.
2. $\left(\dfrac{1}{y}\right)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{y^{\frac{1}{n}}}$ et $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{x^{\frac{1}{n}}}{y^{\frac{1}{n}}}$.
3. $(x^{\frac{1}{n}})^p = (x^p)^{\frac{1}{n}}$.
4. $(x^{\frac{1}{p}})^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{np}} = (x^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{p}}$.

La notation $x^{\frac{1}{n}}$ est donc plus facile à utiliser que la notation $\sqrt[n]{x}$ car on peut remarquer que ces formules sont analogues à celles des puissances entières. Dans le chapitre 4, nous généraliserons encore davantage la notion de puissance.

Démonstration.

□

Remarque : Un grand classique à connaître : si x et y sont des réels strictement positifs,

L'expression $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ s'appelle la quantité conjuguée de $\sqrt{x}-\sqrt{y}$.

2) Trinômes du second degré

Il ne faut pas apprendre par coeur cette manipulation algébrique mais la comprendre et savoir la refaire sur tout exemple : on factorise par a, on fait apparaître un double produit, on compense pour faire apparaît le carré manquant d'une identité remarquable.

Soient a, b et c des réels, avec $\underline{a \neq 0}$. Notons $\Delta = b^2-4ac$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

Définition. *L'expression ax^2+bx+c est appelée trinôme du second degré (en x). Le nombre $\Delta = b^2-4ac$ est appelé discriminant du trinôme.*

L'expression $a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$ est appelée forme canonique du trinôme.

Pour être parfaitement rigoureux, il faudrait parler du trinôme

$$P : x \mapsto ax^2+bx+c$$

avec le formalisme des fonctions (cf. chapitre suivant). Cette approche va parfaitement convenir pour le moment : on sous-entend que a, b et c sont fixés et que x est l'inconnue qui varie.

Exemple : *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, mettons $5x^2-4x+3$ sous forme canonique.*

Théorème (factorisation des trinômes du second degré).

- *Si $\Delta = 0$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ax^2+bx+c = a(x-r_0)^2$ avec $r_0 = -\dfrac{b}{2a}$.*
  On dit que r_0 est racine double du trinôme.
- *Si $\Delta > 0$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ax^2+bx+c = a(x-r_1)(x-r_2)$ avec*

$$r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

On dit que r_1 et r_2 sont les racines du trinôme.

Si $\Delta < 0$, on ne peut pas factoriser ax^2+bx+c comme produit de polynômes de degré 1… à moins d'utiliser des nombres complexes, cf. chapitre 6.

DÉMONSTRATION.

□

Remarque : Lorsque $\Delta = 0$, $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = -\dfrac{b}{2a}$. On voit donc que, dans le théorème ci-dessus, les deux cas peuvent se fusionner en un seul et même cas, à ceci près que les deux racines r_1 et r_2 sont confondues lorsque $\Delta = 0$.

Proposition (relations coefficients/racines). *Supposons que $\Delta \geqslant 0$ et notons r_1 et r_2 les racines de $ax^2 + bx + c$ (on a $r_1 = r_2$ si $\Delta = 0$). Alors*

$$r_1 r_2 = \frac{c}{a} \qquad \text{et} \qquad r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}.$$

DÉMONSTRATION.

□

Nous déduisons aussi de la démonstration précédente les deux théorèmes suivants :

Théorème. *Considérons l'équation $(E)\ :\ ax^2 + bx + c = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.*

- *Si $\Delta = 0$, alors (E) admet r_0 pour unique solution.*
- *Si $\Delta > 0$, alors (E) admet deux solutions : r_1 et r_2.*
- *Si $\Delta < 0$, alors (E) n'admet pas de solution.*

Théorème.

- *Si $\Delta > 0$ alors, en notant r_1 la plus petit racine et r_2 la plus grande, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c$ a le signe (au sens strict) de*

$$\begin{cases} a & \text{si} \quad x \in \left]-\infty\,;r_1\right[\cup \left]r_2\,;+\infty\right[\\ -a & \text{si} \quad x \in \left]r_1\,;r_2\right[\end{cases}$$

- *Si $\Delta < 0$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c$ a le signe (au sens strict) de a.*
- *Si $\Delta = 0$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-\frac{b}{2a}\}$, $ax^2 + bx + c$ a le signe (au sens strict) de a.*

Il suffit de retenir que le trinôme a le signe de a sauf « entre ses racines » éventuelles.

En particulier, si le trinôme est positif ou nul, alors $\Delta \leqslant 0$. Ceci sera utile dans la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le chapitre 38

Exemples :

- *Résoudre l'équation $25x^2 + 40x + 16 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.*

- *Résoudre l'inéquation $-5x^2 + 7x \leqslant 2$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.*

Ici on aurait pu remarquer directement que 1 est racine évidente. Et on trouve que l'autre racine est $\dfrac{2}{5 \times 1}$ avec la formule vue plus haut, cf. remarque en fin de paragraphe.

- *Montrer que, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $13x^2 - 11x + 19 > 0$.

- *Résoudre l'inéquation* $2x - 7 < \sqrt{4x - 11}$ *d'inconnue* $x \in \mathbb{R}$.

On a envie de passer au carré pour faire disparaitre la racine. Bonne idée mais attention : on ne peut passer au carré dans une inégalité que si les deux termes ont le même signe (on change le sens de l'inégalité si tout est négatif). Ici $\sqrt{4x - 11}$ est toujours positif, mais pas $2x - 7$... On fait deux cas !

- *Résoudre l'inéquation* $x^6 + \dfrac{36}{x^2} > 13x^2$ *d'inconnue* $x \in \mathbb{R}$.

Remarque : La méthode du discriminant fonctionne à tous les coups... pourtant, dans de nombreux cas, on peut aller beaucoup plus vite :

- Si $c = 0$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$ax^2 + bx + c = ax^2 + bx = ax\left(x + \frac{b}{a}\right).$$
Cette quantité est nulle si et seulement si $x = 0$ ou $x = -\frac{b}{a}$.

Les cas où $b = 0$ ou $c = 0$ sont donc tellement immédiats qu'il serait vraiment dommage de calculer le discriminant... prenez un peu de recul !

- Si $b = 0$ et $c \neq 0$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$ax^2 + bx + c = ax^2 + c = a\left(x^2 + \frac{c}{a}\right).$$
  - ⋆ ou bien a et c sont de signe contraire et alors $\frac{-c}{a} > 0$ si bien que
$$ax^2 + bx + c = ax^2 + c = a\left(x - \sqrt{\frac{-c}{a}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{-c}{a}}\right).$$
Cette quantité est nulle si et seulement si $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$.
  - ⋆ ou bien a et c ont le même signe et alors $\frac{-c}{a} < 0$ et on ne peut pas factoriser davantage (du moins pas tant que nous n'aurons pas les nombres complexes). Par ailleurs le trinôme n'est jamais nul.

On n'a pas mis 0 dans la liste puisque 0 est racine si et seulement si $c = 0$... ce qui saute au yeux et renvoie au point précédent.

- Si $b \neq 0$ et $c \neq 0$ alors, avant de calculer le discriminant on peut chercher une « racine évidente » (parmi $-3, -2, -1, 1, 2, 3$ au moins). Soit l'autre racine est aussi évidente, soit on la trouve grâce aux relations coefficients/racines vues plus haut. Plus précisément :
  - ⋆ Si on a trouvé $r \neq 0$ tel que $ar^2 + br + c = 0$, il suffit de considérer $s = \dfrac{c}{ar}$ et alors :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad ax^2 + bx + c = a(x - r)(x - s).$$
Cette conclusion est très classique et ne demande pas de justifications en pratique (on le reverra de façon formelle dans les chapitres 4, 6 et 18) mais prouvons-là une bonne fois pour toute dans ce cas particulier : pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} a(x-r)(x-s) &= ax^2 - a(r+s)x + ars \\ &= ax^2 - a\left(r + \frac{c}{ar}\right) + c \\ &= ax^2 - \frac{ar^2 + c}{r}x + c \\ &= ax^2 + bx + c. \end{aligned}$$

On a vu plus haut que les racines du trinôme ax^2+bx+c sont solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$. On montre ci-contre que les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ sont racines du trinôme. Ces notions sont donc très proches mais attention de ne pas les confondre (c'est-à-dire ne pas parler de racines d'une équation ou de solution d'un trinôme).

  - ⋆ Si on a trouvé r et s non nuls et distincts tels que $ar^2+br+c = 0$ et $as^2+bs+c = 0$, alors :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad ax^2 + bx + c = a(x - r)(x - s).$$
Cette conclusion est très classique et ne demande pas de justifications en pratique (on le reverra de façon formelle dans les chapitres 4, 6 et 18) mais prouvons-là une bonne fois pour toute dans ce cas particulier : pour tout $x \in \mathbb{R}$, *on a déjà* $ar^2 + br = as^2 + bs$ *donc* $a(r^2 - s^2) = b(s - r)$ *donc* $a(r + s) = -b$ *en divisant par* $r - s \neq 0$. *On obtient donc*
$$\begin{aligned} a(x-r)(x-s) &= ax^2 - a(r+s)x + ras \\ &= ax^2 + bx + r\left(-b - ar\right) \\ &= ax^2 + bx - \left(ar^2 + br\right) \\ &= ax^2 + bc + c. \end{aligned}$$

Exemple : *Factorisons $4x^2-3x-10$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ sans utiliser le discriminant.*

Proposition. *Lorsque $a>0$ (respectivement $a<0$), $\{ax^2+bx+c \,|\, x\in\mathbb{R}\}$ admet $-\dfrac{\Delta}{4a}$ pour minimum (respectivement maximum) mais n'est pas majoré (respectivement minoré).*

DÉMONSTRATION.

$\square$