Chapitre 1

Logique, ensembles et quantificateurs

Nous allons illustrer ces notions par des exemples tirés des mathématiques de lycée mais nous reprendrons tout dans les prochains chapitres.

Le but de ce premier chapitre est de donner quelques éléments de logique permettant d'articuler les propositions mathématiques entre elles. Ils sont indispensables pour effectuer des raisonnements mathématiques corrects.

I Éléments de logique

1) Propositions

Définition. *Une proposition (ou assertion, ou prédicat) est un énoncé qui est soit vrai, soit faux.*

Par convention, quand on énonce une proposition, c'est que l'on affirme qu'elle est vraie.

Exemples :

- *Quelques propositions vraies : « La Terre fait partie du système solaire », « L'entier 24 est un multiple de 3 », « La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ ».*
- *Quelques propositions fausses : « Tous les chats sont gris », « L'entier 25 est un multiple de 3 », « Il existe un réel x tel que $x^2 = -1$ ».*

À part les axiomes, la véracité (ou la fausseté) d'une proposition doit résulter d'une démonstration (ou preuve) : elle s'appuie sur des hypothèses, sur des axiomes, sur des propositions démontrées précédemment et sur les règles de logique (que nous allons voir en détail dans ce chapitre).

Définition.

- *Un axiome est une proposition que l'on suppose vraie a priori (et que l'on ne cherche pas à démontrer).*
- *Un théorème est une proposition vraie qui désigne en général une proposition particulièrement importante.*
- *Un lemme est une proposition vraie qui est un résultat préliminaire utile à la démonstration d'une proposition plus importante.*
- *Un corollaire est une proposition vraie qui est la conséquence (souvent immédiate) d'une autre proposition vraie.*
- *Une conjecture est une proposition dont on pense qu'elle est vraie, sans en avoir de preuve.*

Exemples :

- *La proposition « Par un point extérieur à une droite, il passe une et une seule droite parallèle à cette droite » est un axiome appelé cinquième axiome d'Euclide.*
- *Le théorème de Pythagore est la proposition : « Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés adjacents à l'angle droit ». Il en existe de nombreuses démonstrations.*
- *La conjecture de Goldbach est la proposition non démontrée qui s'énonce comme suit : « Tout nombre entier pair strictement supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers » (par exemple, $20 = 7 + 13$ et $2000 = 3 + 1997$).*

En 2014, cette conjecture a été vérifiée pour tous les entiers jusqu'à 4×10^{18}... de quoi penser qu'elle doit être vraie, mais il n'y a pas de preuve à ce jour.

Définition (propositions équivalentes). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La proposition « $\mathcal{A}$ est équivalente à $\mathcal{B}$ » est la proposition notée $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ qui est vraie si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont simultanément vraies ou bien simultanément fausses et qui est fausse sinon.*
Si la proposition $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est vraie, on dit que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont équivalentes.

Remarques :

- L'équivalence joue pour les propositions le rôle que joue l'égalité pour les nombres.

  Par exemple les expressions $1+2$ *et* 3 *sont différentes et pourtant* $1+2=3$. *De façon analogue, si* x *est un réel, les propositions « $x=1$ ou $x=-1$ » et « $x^2=1$ » ne sont pas identiques et pourtant* $(x^2=1) \iff (x=1 \text{ ou } x=-1)$.
- Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des propositions. On a :
  - ⋆ $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}$ (réflexivité).
  - ⋆ Si $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est vraie, alors $\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A}$ est vraie (symétrie).
  - ⋆ Si $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}$ sont vraies, alors $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{C}$ est vraie (transitivité).
- Une table de vérité est un tableau comportant plusieurs colonnes : dans les colonnes de gauche, on donne les différentes valeurs possibles des différentes propositions entrant en ligne de compte ($\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ etc.) et dans la colonne de droite, on donne la valeur de vérité, vraie (V) ou fausse (F), correspondante de la proposition étudiée ($\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ ci-contre). Par exemple, $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est fausse si $\mathcal{A}$ est vraie et $\mathcal{B}$ est fausse (deuxième ligne). La valeur de vérité d'une proposition est la dernière colonne de sa table de vérité, et deux propositions sont équivalentes quand elles ont même valeur de vérité (donc la même dernière colonne). Le nombre de lignes (sans compter la première) de la table est le nombre de configurations possibles pour les valeurs de vérité des propositions en jeu :
  - ⋆ $4 = 2^2$ lignes s'il y a 2 propositions (VV,VF,FV,FF).
  - ⋆ $8 = 2^3$ lignes s'il y a 3 propositions (VVV,VVF,VFV,VFF,FVV,FVF,FFV,FFF).

L'équivalence est définie par la table de vérité :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

On dit aussi que deux propositions équivalentes sont deux propositions qui ont les mêmes valeurs de vérité, dans la table de vérité.

Dans la pratique, on n'utilise jamais de table de vérité. Nous les introduisons dans ce chapitre uniquement pour aider à appréhender les opérations sur les propositions.

Si $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, il y a 2^n lignes si il y a n propositions.

2) Négation, conjonction, disjonction

Définition. *La négation d'une proposition $\mathcal{A}$ est la proposition notée* $\text{non}\,\mathcal{A}$ *qui est vraie quand $\mathcal{A}$ est fausse et qui est fausse quand $\mathcal{A}$ est vraie.*

Elle est définie par la table de vérité :

$\mathcal{A}$	non $\mathcal{A}$
V	F
F	V

Exemples :

.

Définition. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La conjonction* $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ *est la proposition qui est vraie quand les propositions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont vraies toutes les deux et qui est fausse quand l'une des deux au moins est fausse.*

Elle est définie par la table de vérité :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple : *Soit x un réel. La proposition « $3 \leqslant x < 9$ » est équivalente à la proposition « $(x \geqslant 3)$ et $(x<9)$ ».*

Définition. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La disjonction* $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ *est la proposition qui est vraie quand l'une des propositions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, ou les deux, sont vraies et qui est fausse quand les deux sont fausses.*

Elle est définie par la table de vérité :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemples :

En clair, en mathématiques, ce n'est pas « fromage ou dessert », c'est « au moins l'un des deux parmi le fromage et le dessert » !

Remarque : Le ou mathématique est le « ou inclusif » : ($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$) est vraie quand au moins l'une des deux est vraie, et même si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont vraies en même temps (contrairement au « ou exclusif » qui signifie « soit l'un, soit l'autre, mais pas les deux » et qui est celui utilisé dans le langage courant).

Les assertions de la proposition suivante sont immédiates :

Proposition. *Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois propositions. Les propositions suivantes sont vraies :*

1. $\mathrm{non}(\mathrm{non}\ \mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A}$,
2. $\mathcal{A}$ ou (non $\mathcal{A}$),
3. $(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A}$,
4. $(\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A}$
5. $(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{A})$,
6. $(\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{A}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B})$,
7. $((\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \text{ et } \mathcal{C}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \text{ et } (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C}))$,
8. $((\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \text{ ou } \mathcal{C}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \text{ ou } (\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{C}))$.

Le point 2 s'appelle le « tiers exclu ». Les points 5 et 6 sont des propriétés dites de « commutativité ». Les points 7 et 8 sont des propriétés dites d'« associativité ».

Proposition (distributivité). *Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois propositions.*

- $(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \text{ ou } \mathcal{C} \iff (\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{C}) \text{ et } (\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{C})$.
- $(\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \text{ et } \mathcal{C} \iff (\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{C}) \text{ ou } (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C})$.

$\rightsquigarrow$ DÉMONSTRATION LAISSÉE EN EXERCICE.

Proposition (lois de Morgan). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions.*

- $\mathrm{non}(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \iff (\mathrm{non}\ \mathcal{A}) \text{ ou } (\mathrm{non}\ \mathcal{B})$.
- $\mathrm{non}(\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \iff (\mathrm{non}\ \mathcal{A}) \text{ et } (\mathrm{non}\ \mathcal{B})$.

DÉMONSTRATION. On vérifie que les propositions ((non $\mathcal{A}$) ou (non $\mathcal{B}$)) et non($\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$) ont la même table de vérité :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathrm{non}(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B})$	non $\mathcal{A}$	non $\mathcal{B}$	(non $\mathcal{A}$) ou (non $\mathcal{B}$)

L'autre est analogue et laissé en exercice. □

Exemple : *On lance un dé à 6 faces et on considère $\mathcal{A}$ la proposition « obtenir un chiffre pair » et $\mathcal{B}$ la proposition « obtenir un chiffre strictement supérieur à 3 ».*

3) Implication

a) Définition de l'implication

Définition. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La proposition « $\mathcal{A}$ implique $\mathcal{B}$ » est la proposition notée $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ qui est n'est fausse que lorsque $\mathcal{A}$ est vraie et $\mathcal{B}$ est fausse simultanément.*

Pour exprimer que la proposition $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie, on dit indifféremment :

- *Si $\mathcal{A}$ (est vraie), alors $\mathcal{B}$ (est vraie).*
- *$\mathcal{A}$ est une condition suffisante de $\mathcal{B}$.*

Elle est définie par la table de vérité :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- $\mathcal{B}$ *est une condition nécessaire de* $\mathcal{A}$.
- *Pour que* $\mathcal{B}$ *(soit vraie), il suffit que* $\mathcal{A}$ *(soit vraie).*
- *Pour que* $\mathcal{A}$ *(soit vraie), il faut que* $\mathcal{B}$ *(soit vraie).*

$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie dans le cas où $\mathcal{A}$ est fausse. Par exemple la proposition « Si $\sqrt{2} \in \mathbb{N}$, alors $\sqrt{2} \geqslant 0$ » est vraie. Cela peut sembler curieux et déroutant au premier abord alors que, lorsque $x \in \mathbb{R}$, la proposition « Si $x \in \mathbb{N}$, alors $x \geqslant 0$ » ne pose de problème à personne. Ce qui peut porter à confusion vient en fait de l'usage courant du *Si... alors...*. Une implication est le *Si... alors...* que l'on utilise pour exprimer une règle. Prenons l'exemple des propositions $\mathcal{A}$: « acheter de l'alcool » et $\mathcal{B}$: « avoir plus de 18 ans ». La règle « Si tu achète de l'alcool, alors tu as plus de 18 ans » est l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$. La règle n'est enfreinte que dans le cas où $\mathcal{A}$ est vraie et $\mathcal{B}$ est fausse. Dans les autres cas elle est respectée. En particulier, elle est respectée si n'achète pas d'alcool ! Pour la proposition « Si $x \in \mathbb{N}$, alors $x \geqslant 0$ », la règle n'est pas enfreinte lorsque $x \notin \mathbb{N}$.

Exemples :

- *Considérons les propositions* $\mathcal{A}$ *: « Il pleut » et* $\mathcal{B}$ *: « Le sol (de la rue) est mouillé ». On est d'accord que si « il pleut », alors « le sol est mouillé ». Ainsi la proposition* $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ *est vraie. On peut dire aussi :*
  - ⋆ *« Il pleut » est une condition* ________ *pour que le sol de la rue soit mouillé. Mais elle n'est pas* ________ *(car le sol sera aussi mouillé si un employé municipal vient de le nettoyer ou s'il a plu peu de temps auparavant...).*
  - ⋆ *« Le sol est mouillé » est une condition* ________ *pour qu'il pleuve.*
  - ⋆ *Pour que le sol soit mouillé, il* ________ *qu'il pleuve.*
  - ⋆ *Pour qu'il pleuve, il* ________ *que le sol soit mouillé.*

  Mais $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ *ne signifie pas « il pleut donc le sol est mouillé ».*
- *Soit* f *une fonction définie sur un intervalle* I *est à valeurs réelles. Si* f *est dérivable sur* I*, alors* f *est continue sur* I*. On peut dire aussi :*
  - ⋆ *La proposition «* f *est continue » est une condition nécessaire de la proposition «* f *est dérivable ». Mais elle n'est pas suffisante (car la fonction racine carrée est continue sur* $\mathbb{R}_+$ *mais pas dérivable en* 0*).*
  - ⋆ *La proposition «* f *est dérivable » est une condition* ________ *de la proposition «* f *est continue ». Mais elle n'est pas* ________ *.*
  - ⋆ *Pour que* f *soit continue, il* ________ *que* f *soit dérivable.*
  - ⋆ *Pour que* f *soit dérivable, il* ________ *que* f *soit continue.*
- *Soient* A, B *et* C *trois points du plan. Considérons les propositions* $\mathcal{P}$ *: « Le triangle* ABC *est rectangle en* A *» et* $\mathcal{Q}$ *: «* $BC^2 = AC^2 + AB^2$ *». L'implication* $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ *est vraie (il s'agit du théorème de Pythagore).*

La proposition $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ **ne signifie pas** « $\mathcal{A}$ est vraie donc $\mathcal{B}$ est vraie ».

Par exemple la proposition « s'il pleut, alors le sol de la rue est mouillée » est vraie même s'il ne pleut pas.

Contrairement à ce que peut le laisser penser le premier exemple ci-dessus, il n'y a pas particulièrement de notion de temporalité ou de cause à effet dans une implication. D'ailleurs on peut tout à fait avoir $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ alors que $\mathcal{B}$ est la cause de $\mathcal{A}$.

Par exemple la proposition « S'il pleut, alors il y a des nuages » est vraie alors que c'est la présence de nuage qui a causé la pluie.

Et il peut aussi n'exister aucun rapport entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ puisque seules les valeurs de vérité comptent.

Par exemple la proposition « Si l'un des albums des Beatles s'appelle Abbey Road, alors $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$ *» est vraie.*

Savoir qu'une implication est vraie ou fausse ne nous dit absolument rien sur la véracité de sa réciproque. Par exemple toute fonction dérivable est continue mais la réciproque est fausse.

Définition. *Soient* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *deux propositions. L'implication* $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ *est appelée la réciproque de l'implication* $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.

Proposition. *Soient* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *deux propositions. La proposition* $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ *est équivalente à la proposition* $(\text{non } \mathcal{A})$ ou $\mathcal{B}$.

DÉMONSTRATION. On vérifie que $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ et de $((\text{non } \mathcal{A}) \text{ ou } \mathcal{B})$ ont la même table de vérité :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	non $\mathcal{A}$	(non $\mathcal{A}$) ou $\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$

□

Si $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie mais $\mathcal{A}$ est fausse, alors cela ne dit rien sur $\mathcal{B}$. En revanche, si $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie et si $\mathcal{B}$ est fausse, alors $\mathcal{A}$ est forcément fausse.

Proposition (transitivité de l'implication). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La proposition $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ et $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}))$ implique la proposition $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$.*

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Exemple : *Soient x et y deux réels. Par croissance des fonctions carré et exponentielle sur $\mathbb{R}_+$, les implications « $(0 \leqslant x \leqslant y) \Rightarrow (x^2 \leqslant y^2)$ » et « $(x^2 \leqslant y^2) \Rightarrow (\mathrm{e}^{x^2} \leqslant \mathrm{e}^{y^2})$ » sont vraies. Par transitivité de l'implication « $(0 \leqslant x \leqslant y) \Rightarrow (\mathrm{e}^{x^2} \leqslant \mathrm{e}^{y^2})$ » est vraie.*

b) Négation et contraposée d'une implication

C'est intuitif ! $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vérifiée si $\mathcal{B}$ est vraie dès que $\mathcal{A}$ l'est. Ainsi, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ n'est pas vérifiée dès que $\mathcal{A}$ est vérifiée sans que $\mathcal{B}$ le soit : $\mathcal{A}$ et (non $\mathcal{B}$).

Proposition (négation d'une implication). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La négation de $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est équivalente à la proposition $\mathcal{A}$ et (non $\mathcal{B}$).*

Démonstration. Nous avons :

□

Ainsi, la contraposée d'une implication lui est équivalente : c'est le principe du raisonnement par contraposée, cf. chapitre suivant. Attention à ne pas la confondre avec sa réciproque ! La véracité d'une implication est indépendante de la véracité de sa réciproque : l'une peut être vraie et l'autre fausse !

Proposition (contraposée d'une implication). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La proposition (non $\mathcal{B}$) $\Rightarrow$ (non $\mathcal{A}$) est équivalente à la proposition $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$. On l'appelle la contraposée de la proposition $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.*

Démonstration. Nous avons :

□

Exemples :

- *La négation de « s'il pleut, alors le sol de la rue est mouillée » est « il pleut et le sol de la rue n'est pas mouillé » (ce qui est faux bien sûr).*
- *La contraposée de « s'il pleut, alors le sol de la rue est mouillée » est « si le sol de la rue n'est pas mouillé, c'est qu'il n'a pas plu » (ce qui est vrai bien sûr).*
- *Soient A, B et C trois points du plan. La contraposée du théorème de Pythagore est : « Si $BC^2 \neq AC^2 + AB^2$, alors le triangle ABC n'est pas rectangle en A ».*

c) Double implication

Pour montrer que $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est vraie, on procède soit par équivalences intermédiaires, soit par double implication, cf. paragraphe IV.1.d

Proposition (double implication). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La proposition $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est équivalente à la proposition $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ et $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$.*

Démonstration. On vérifie que $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ et $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}))$ et $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ ont la même table de vérité :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$	$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ et $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$

□

Définition. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. Pour exprimer que la proposition $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est vraie, on dit aussi indifféremment :*

- *$\mathcal{A}$ est une condition nécessaire et suffisante de $\mathcal{B}$.*
- *$\mathcal{A}$ (est vraie) si et seulement si $\mathcal{B}$ (est vraie).*
- *Pour que $\mathcal{A}$ (soit vraie), il faut et il suffit que $\mathcal{B}$ (soit vraie).*

Et donc on évite à tout prix d'utiliser des équivalences lorsqu'elles ne sont pas requises. C'est prendre un risque inutile de se tromper.

Une erreur classique est de confondre implication et équivalence. Montrer une équivalence est bien plus contraignant : il faut montrer en plus que l'on peut revenir en arrière (c'est-à-dire montrer l'implication réciproque). Heureusement la majorité du temps en mathématiques, on a seulement besoin de montrer des implications (les équivalences ne sont requises essentiellement que lorsqu'on résout des équations ou inéquations ou lorsque l'énoncé le demande explicitement).

Les symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ ne sont pas des abréviations et ne doivent pas être utilisées comme telles. On ne mélange pas des phrases écrites en français et des phrases utilisant ces symboles. Cela peut créer des ambiguïtés.

Dans tous les cas relisez-vous : une phrase mathématique, qu'elle soit écrite symboliquement ou avec des phrases, doit toujours avoir un sens sans ambiguïté lorsqu'on la relit à voix haute.

Prenons l'exemple de la proposition :

II Vocabulaire ensembliste

Dans cette partie, nous introduisons les notions d'ensembles et éléments. Nous y reviendrons plus longuement dans le chapitre 15.

1) Notion d'ensemble et d'éléments

Dans ce cours, on travaille avec une notion intuitive des ensembles.

Définition.

- *Un ensemble E est une collection d'objets appelés éléments de E.*
- *On note $x \in E$ pour dire que l'élément x appartient à E. On note $x \notin E$ pour dire que l'élément x n'appartient pas à E.*
- *On dit que deux ensembles E et F sont égaux, et on note $E = F$, si ils ont les mêmes éléments.*
- *On appelle ensemble vide, et on note $\varnothing$, l'ensemble ne contenant aucun élément.*
- *On dit qu'un ensemble E est fini s'il admet un nombre fini d'éléments. Le nombre d'éléments de E est alors appelé cardinal de E et noté $\mathrm{card}(E)$.*

On se contente pour l'instant d'une définition intuitive d'un ensemble fini mais nous y reviendrons dans le chapitre 30.

Il y a plusieurs façons de définir un ensemble, c'est l'objet des paragraphes suivantes.

2) Différentes façons de définir un ensemble

a) Définition par extension

Mettre des points virgules est particulièrement indiqué si on met dans l'ensemble des réels écrits sous forme décimale... avec une virgule.

Définir un ensemble par extension consiste à donner explicitement tous ses éléments entre accolades et séparés par des virgules ou des points virgules. Par convention un élément ne figure qu'une seule fois dans la liste et l'ordre dans lequel ils sont listés ne compte pas.

Par exemple :

- ⋆ $\{0;1\}$ *est l'ensemble à deux éléments contenant uniquement* 0 *et* 1.
- ⋆ $\{1;2;3;4;5;6\}$ *est l'ensemble à six éléments contenant les entiers de* 1 *à* 6. *On le note également* $[\![1\,;6]\!]$ *(cf. chapitre 3).*
- ⋆ $\{0\}$ *est l'ensemble à un élément contenant uniquement* 0.

Un ensemble à un élément est appelé un singleton. Si on note x cet élément, cet ensemble (noté donc $\{x\}$) est appelé « singleton x ».

Il y a deux inconvénients à ce mode de définition :

- Il nécessite de connaître tous les éléments de l'ensemble.
- Il est difficilement maniable avec un grand nombre d'éléments : on le voit rien qu'avec 6 éléments !

b) Définition par compréhension

Définir un ensemble par compréhension consiste à définir l'ensemble par une propriété caractérisant ses éléments.

Plus précisément, si P désigne une propriété portant sur les élément de E, on note $P(x)$ la proposition « x vérifie la propriété P ».

Si un élément x de E vérifie la propriété P, on écrit « $P(x)$ est vraie » ou simplement « $P(x)$ ».

Exemple : *Si* P *est la propriété « être un nombre impair » portant sur les éléments de* $\mathbb{Z}$, *on note* $P(n)$ *la proposition «* n *est impair » quel que soit* $n \in Z$.

Un élément appartient donc à l'ensemble $\{x \in E \mid P(x)\}$ si et seulement si il vérifie la propriété P.

On note alors $\{x \in E \mid P(x)\}$ l'ensemble des éléments de E qui vérifient la propriété P. Détaillons cette notation :

$$\underbrace{\{}_{\text{accolade}}\quad \underbrace{\cdots}_{\substack{\text{Nature des éléments}\\ \text{de l'ensemble}\\ \text{(réels, entiers etc.)}}}\quad \underbrace{\mid}_{\substack{\text{barre verticale}\\ \text{de séparation :}\\ \text{lire « tels que »}}}\quad \underbrace{\cdots}_{\substack{\text{Propriété(s) vérifiée(s)}\\ \text{par les éléments}\\ \text{de l'ensemble}}}\quad \underbrace{\}}_{\text{accolade}}$$

Par exemple :

Ci contre, lorsque $x \in \mathbb{R}$,

$x \in S \Longleftrightarrow x^5 - 3x - 1 = 0$

Une étude de fonction permet de montrer que cet ensemble comporte trois éléments car l'équation $x^5 - 3x - 1 = 0$ a trois solutions. Cependant, on ne les connaît pas, ce qui n'empêche pas de définir S !

Il y a deux avantages de ce mode de définition :

- Il permet de définir et de manipuler facilement des ensembles infinis.
- Il n'est pas nécessaire de connaître explicitement tous les éléments de l'ensemble pour le définir. C'est particulièrement frappant avec les deux derniers exemples ci-dessus : on serait particulièrement en peine de donner toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f'(0) = f'(1) = 0$, et on ne sait pas résoudre l'équation $x^5 - 3x - 1 = 0$. On ne sait même pas, au premier abord, combien de solutions cette équation possède !

3) Application d'un ensemble dans un autre

On parle aussi de fonction (même s'il y a une subtilité dont on parlera plus tard).

Définition. *Soient A et E deux ensembles non vides. Une application f de A dans E est la donnée pour chaque élément x de A d'un unique élément de E, appelé image de x par f et noté $f(x)$. L'ensemble E est appelé ensemble de départ. L'ensemble F est appelée ensemble d'arrivée de F.*

Tout élément de l'ensemble E d'arrivée n'est pas forcément l'image d'un élément de A (on dira qu'un tel élément n'admet pas d'antécédent par f).

Par exemple, si f désigne l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui à tout entier naturel n associe $2n$, alors les entiers impairs ne sont pas des images par f.

Cela motive la définition :

En d'autres termes, un élément appartient à l'ensemble

$$\{f(x)\,|\,x \in A\}$$

si et seulement si il s'écrit sous la forme $f(x)$ avec $x \in A$.

Définition. *Soit f une application de A dans E. On note $\{f(x)\,|\,x \in A\}$ l'ensemble des images par f des éléments de E.*

On peut lire : « $\{f(x)\,|\,x \in A\}$ est l'ensemble formé des $f(x)$ quand x parcourt A ». Là aussi, détaillons cette notation :

$$\underbrace{\{}_{\text{accolade}}\quad \underbrace{f(x)}_{\substack{\text{Éléments de}\\ \text{l'ensemble : images}\\ \text{d'un paramètre}\\ x \text{ par } f}}\quad \underbrace{|}_{\substack{\text{barre verticale}\\ \text{de séparation}}}\quad \underbrace{x \in A}_{\substack{\text{Le paramètre}\\ \text{et l'ensemble}\\ \text{qu'il parcourt}}}\quad \underbrace{\}}_{\text{accolade}}$$

Dans cette notation, on peut remplacer la lettre x par n'importe quelle lettre non déjà utilisée. C'est une variable dite muette (on en reparle dans les paragraphes III.1 et IV.1).

Exemples :

Il y a beaucoup à dire sur les applications. Le chapitre 4 va explorer le cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et le chapitre 15 reviendra plus longuement sur les applications dans leur généralité. Nous avons juste donné du vocabulaire dans ce paragraphe.

4) Inclusion et parties

Définition. *Soient E et F deux ensembles. On dit que E est inclus dans F, et on note $E \subset F$, lorsque tous les éléments de E sont aussi des éléments de F. On dit aussi que E est une partie (ou un sous-ensemble) de F.*

Il s'agit donc de montrer que

$$x \in E \longleftrightarrow x \in F.$$

La double inclusion découle donc de la propriété de double implication.

Proposition (double inclusion). *Deux ensembles E et F sont égaux si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.*

Définition (différence et complémentaire). *Soit E un ensemble.*

- *Si A et B sont deux parties de E, on appelle différence de A dans B et on note $B\backslash A$ l'ensemble $\{x \in E\,|\,x \in B \text{ et } x \notin A\}$ des éléments de E qui sont dans B mais pas dans A.*
- *Si A est une partie de E, alors $E\backslash A$ est appelé complémentaire de A et noté $\overline{A}$ ou A^c.*

On ne réserve la notation $\overline{A}$ que s'il n'y a aucune ambiguïté sur l'ensemble E dans lequel on travail.

Exemples :

5) Union et intersection d'ensembles

Définition. *Soit E et F deux ensembles. On note*

- *$E \cap F$ l'intersection de E et F, c'est-à-dire l'ensemble formé des éléments qui sont à la fois dans E et dans F.*
- *$E \cup F$ la réunion de E et F, c'est-à-dire l'ensemble formé des éléments qui sont dans l'un au moins des ensembles E et F.*

On dit que E et F sont disjoints si $E \cap F = \varnothing$. Dans ce cas, on dit que $E \cup F$ est une union disjointe.

Dire que $E \cap F = \varnothing$ signifie qu'il n'y a pas d'éléments dans $E \cap F$.

Exemples :

6) Produit cartésien d'ensembles

Soient E et F des ensembles non vides.

Définition. *On appelle couple d'éléments de E et F la donnée d'un élément x de E puis d'un élément y de F, dans cet ordre. On le note (x, y).*

On appelle produit cartésien de E et F, et on note $E \times F$, l'ensemble des couples d'éléments de E et F.

Le produit cartésien $E \times F$ se prononce « E croix F ».

Exemples :

- *Si $E = \{0; 1\}$ et $F = \{0; 2; 4\}$, alors*
- *Le produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des cordonnées des points du plan dans un repère orthonormé.*

Comme on le voit sur cet exemple, $E \times F \neq F \times E$ en général !

Soient $(x, y) \in E \times F$ et $(a, b) \in E \times F$. On a $(x, y) = (a, b)$ si et seulement si $x = a$ et $y = b$.

Plus généralement, donnons-nous $n \in \mathbb{N} \backslash \{0; 1\}$ et n ensembles $E_1, \ldots, E_n$.

Définition. *On appelle n-uplet d'éléments de $E_1, \ldots, E_n$ la donnée d'un élément x_1 de E_1, puis d'un élément x_2 de E_2, ... et d'un élément x_n de E_n, dans cet ordre. On le note $(x_1, \ldots, x_n)$.*

On appelle produit cartésien de $E_1, \ldots, E_n$, et on note $E_1 \times \cdots \times E_n$, l'ensemble des n-uplet d'éléments de $E_1, \ldots, E_n$.

Si $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = E$, alors le produit est noté E^n plus simplement.

Si $n = 2$, on parle de couple. Si $n = 3$, on parle de triplet. Si $n = 4$, on parle de quadruplet.

Ne pas confondre $(x_1, \ldots, x_n)$ avec l'ensemble $\{x_1; \ldots; x_n\}$. Par exemple le triplet $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 2)$ n'est pas l'ensemble $\{x_1; x_2; x_3\} = \{1; 2\}$.

Exemple : *On note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets de réels, avec $n \in \mathbb{N}^*$.*

Remarque : La notion de produit cartésien permet aussi un raccourci de notations. Par exemple on pourra écrire « $\forall (x, y, z) \in E^2 \times F$ » au lieu de « $\forall x \in E$, $\forall y \in E, \forall z \in F$ ». Idem avec les $\exists$.

7) Famille d'éléments d'un ensemble

Définition. *Soit I un ensemble non vide (appelé ensemble d'indices) et E un autre ensemble non vide. On appelle famille d'éléments de E indexée par I la donnée, pour tout $i \in I$, d'un unique élément x_i de E (appelé terme d'indice i). On la note $(x_i)_{i\in I}$.*

Exemple :

Remarques :

> On peut remplacer la lettre i par n'importe quelle lettre non déjà utilisée. C'est une variable dite muette (on en reparle dans les paragraphes III.1 et IV.1).

- Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $I = \{1; 2; \cdots; n\}$, alors $(x_i)_{i\in I}$ est le n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$.
- Si $I = \mathbb{N}$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée suite d'éléments de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est appelé terme de rang n. Le chapitre 14 entier sera consacré aux suites.
- Ne pas confondre :
  - ⋆ la famille $(x_i)_{i\in I}$,
  - ⋆ le terme x_i d'indice i qui est un élément de E (qui nécessite d'introduire i),
  - ⋆ l'ensemble $\{x_i \,|\, i \in I\}$ qui est l'ensemble de touts les termes constituant la famille. Il n'y a pas d'ordre dans un ensemble contrairement à une famille. Par ailleurs, un élément de E peut être répété plusieurs fois dans une famille mais pas dans un ensemble.

III Quantificateurs

1) Quantificateurs $\forall$ et $\exists$

> Le quantificateur universel $\forall$ se lit « *Pour tout* » ou « *Quel que soit* ». Le quantificateur existentiel $\exists$ se lit « *Il existe* » (sous-entendu « *Il existe au moins un* »).

Définition. *Soit P une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E.*

- *La proposition « $\forall x \in E,\ P(x)$ » signifie que tous les éléments de E vérifient la propriété P.*
  On dit que le symbole $\forall$ est le quantificateur universel.
- *La proposition « $\exists x \in E,\ P(x)$ » signifie qu'il existe au moins un élément de E qui vérifie la propriété P.*
  On dit que le symbole $\exists$ est le quantificateur existentiel.

Exemples :

> Si « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est vraie, alors P est vrai pour tout élément de E et donc on peut substituer x par tout ce que l'on veut qui appartient à E. Par exemple si P porte sur les réels, que « $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x)$ » est vraie et que $x \in \mathbb{R}$ (ce x là est libre tandis que celui de « $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x)$ » est lié), alors $P(x)$ est vrai mais aussi $P(2x)$, $P(x+1)$, etc. On peut remplacer x par *truc* quelque soit la valeur de *truc* réel.

Remarques :

- Le x dans « $\forall x \in E,\ P(x)$ » et dans « $\exists x \in E,\ P(x)$ » est une variable dite muette (ou liée). Cela signifie qu'elle est locale, interne à la proposition. En particulier :
  - ⋆ On peut remplacer x par une autre « lettre » (qui n'est pas déjà utilisée pour définir un autre objet).

    On peut écrire « $\forall y \in E,\ P(y)$ » au lieu de « $\forall x \in E,\ P(x)$ ». Ou même « $\forall \heartsuit \in E,\ P(\heartsuit)$ » pourquoi pas !
  - ⋆ Le x n'est pas utilisable dans la suite en tant qu'objet précis (il est *lié* au quantificateur). Notamment si on sait que la proposition « $\exists x \in E,\ P(x)$ » est vraie et que l'on veut l'utiliser pour démontrer une autre proposition, on commencera par écrire

    Dans ce cas le x n'est plus une variable muette mais un object précis qui vérifie P (on dit aussi que la variable est *libre*). Avoir écrit « Il existe $x \in E$ tel que $P(x)$ »

au lieu de « $\exists x \in E,\ P(x)$ » permet aussi d'affirmer l'existence et de rendre x utilisable pour la suite de l'argument.

- Le quantificateur $\forall$ est une généralisation de la conjonction (du et) : si $E = \{a; b; c; d; \dots\}$, alors « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est vraie si et seulement si

$$P(a) \text{ et } P(b) \text{ et } P(c) \text{ et } P(d) \text{ et } \cdots$$

Le quantificateur $\exists$ est une généralisation de la disjonction (du ou) : si $E = \{a; b; c; d; \dots\}$, alors « $\exists x \in E,\ P(x)$ » est vraie si et seulement si

$$P(a) \text{ ou } P(b) \text{ ou } P(c) \text{ ou } P(d) \text{ ou } \cdots$$

Donnons un exemple issu de la vie quotidienne illustrant que l'on ne peut pas intervertir $\forall/\exists$ en général : si on dit « il existe un film que tous les élèves de cette classe préfèrent », cela signifie que tous les élèves ont le même film préféré (ce qui est sans doute faux), tandis que si on dit « pour tous les élèves de cette classe, il existe un film qu'ils préfèrent », cela signifie que tous les élèves ont un film préféré, pas forcément le même (ce qui est sans doute vrai). Morale de l'histoire : on ne peut pas intervertir $\exists$ et $\forall$ (sauf cas particulier, mais cela découle alors d'un argument mathématique).

- La conjonction est commutative, tout comme la disjonction. Il s'ensuit que l'on peut échanger deux quantificateurs universels et que l'on peut échanger deux quantificateurs existentiels : si P est une propriété portant sur les éléments de deux ensembles E et F alors les propositions

$$\text{« } \forall x \in E,\ \forall y \in F,\ P(x,y) \text{ »} \qquad \text{et} \qquad \text{« } \forall y \in F,\ \forall x \in E,\ P(x,y) \text{ »}$$

sont équivalentes. Et les propositions

$$\text{« } \exists x \in E,\ \exists y \in F,\ P(x,y) \text{ »} \qquad \text{et} \qquad \text{« } \exists y \in F,\ \exists x \in E,\ P(x,y) \text{ »}$$

⚠ En revanche, en général, on ne peut absolument pas intervertir un quantificateur universel et un quantificateur existentiel, c'est-à-dire que les propositions

$$\text{« } \forall x \in E,\ \exists y \in F,\ P(x,y) \text{ »} \qquad \text{et} \qquad \text{« } \exists y \in F,\ \forall x \in E,\ P(x,y) \text{ »}$$

ne sont pas équivalentes en général. Elle n'ont même pas le même sens : la première signifie que, pour chaque élément x de E, il existe y dans F (dépendant éventuellement de x) tel que $P(x,y)$ est vrai. La seconde signifie qu'il existe un y dans F tel que, quel que soit x dans E, $P(x,y)$ est vrai (le y universel : c'est le même pour tous les x).

Illustrons-cela avec un exemple :

Notons toutefois que, si « $\exists y \in F,\ \forall x \in E,\ P(x,y)$ » est vraie, alors « $\forall x \in E,\ \exists y \in F,\ P(x,y)$ » aussi.

- Le fait que $\forall$ généralise et et que $\exists$ généralise ou assure que, si P et Q sont deux propriétés portant sur les éléments d'un ensemble E, alors
  - ⋆ « $(\forall x \in E,\ P(x)) \text{ et } (\forall x \in E,\ Q(x))$ » et « $\forall x \in E,\ (P(x) \text{ et } Q(x))$ » sont équivalentes. Elles signifient en effet toutes les deux que P et Q sont vraies pour tous les éléments de E.
  - ⋆ « $(\exists x \in E,\ P(x)) \text{ ou } (\exists x \in E,\ Q(x))$ » et « $\exists x \in E,\ (P(x) \text{ ou } Q(x))$ » sont équivalentes. Elles signifient en effet toutes les deux qu'il existe un élément de E qui satisfait P ou Q.

Mais les choses ne se passent pas si bien entre $\forall$ et ou et entre $\exists$ et et :

⋆ « $(\forall x \in E,\ P(x))$ ou $(\forall x \in E,\ Q(x))$ » et « $\forall x \in E,\ (P(x)$ ou $Q(x))$ » ne sont pas équivalentes en général. La première signifie que P est vérifiée pour tous les éléments de E ou que Q est vérifié pour les éléments de E. La deuxième signifie que tout élément de E vérifie P ou Q (mais pas forcément la même contrairement à la première proposition).

⋆ « $(\exists x \in E,\ P(x))$ et $(\exists x \in E,\ Q(x))$ » et « $\exists x \in E,\ (P(x)$ et $Q(x))$ » ne sont pas équivalentes en général. La première signifie qu'un élément de E vérifie P et un élément (mais pas forcément le même !) vérifie E. La deuxième signifie qu'un élément vérifie à la fois P et Q.

- Les quantificateurs $\forall$, $\exists$ et $\exists!$ ont un usage très strict (celui décrit ci-dessus). En particulier :
  ⋆ Ils ne doivent JAMAIS être placés en fin de proposition (on n'écrit ni « $P(x),\ \forall x \in E$ », ni « $P(x),\ \exists x \in E$ »).
  ⋆ Ils ne doivent pas être utilisés comme des abréviations dans une phrase écrite en français (au même titre que $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$). Pourquoi ? Et bien parce que c'est comme ça : cela ne se fait pas ! On peut toute fois inclure une phrase quantifiée dans une phrase écrite en français en l'annonçant avec deux points ou passant une ligne et la centrant.

Les seuls symboles tolérés dans une phrase écrite en français sont $\in$, $\subset$ et les symboles d'inégalité entre deux réels... à condition qu'ils ne servent pas d'abréviation.

2) Négation d'une proposition contenant des quantificateurs

Proposition. *Soit P une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E.*
- *La négation de la proposition « $\forall x \in E, P(x)$ » est « $\exists x \in E, \mathrm{non}(P(x))$ ».*
- *La négation de la proposition « $\exists x \in E, P(x)$ » est « $\forall x \in E, \mathrm{non}(P(x))$ ».*

Exemples :

Remarque : On peut nier une proposition contenant plus d'un quantificateur et plus d'une variable exactement de la même façon. Plus précisément, on cherche à nier une proposition du type :

$$\left\{\begin{array}{c}\forall\\ \exists\end{array}\right. x_1 \in E_1, \left\{\begin{array}{c}\forall\\ \exists\end{array}\right. x_2 \in E_2, \ldots, \left\{\begin{array}{c}\forall\\ \exists\end{array}\right. x_n \in E_n, \qquad P(x_1, \ldots, x_n)$$

(c'est-à-dire que devant chaque variable x_i se trouve soit un $\forall$ soit un $\exists$) où $P(x_1, \ldots, x_n)$ est une propriété dépendant des variables $x_1, \ldots, x_n$. **La négation est obtenue en interchangeant $\forall$ et $\exists$ et en niant $P(x_1, \ldots, x_n)$:**

$$\left\{\begin{array}{l}\exists\\ \forall\end{array}\right. x_1 \in E_1, \left\{\begin{array}{l}\exists\\ \forall\end{array}\right. x_2 \in E_2, \dots, \left\{\begin{array}{l}\exists\\ \forall\end{array}\right. x_n \in E_n, \qquad \mathrm{non}(P(x_1,\dots,x_n))$$

Exemple :

Attention, il ne faut nier que P et pas les appartenances préalables : la négation de « $\forall x \in E, \dots$ » n'est pas « $\exists x \notin E, \dots$ »). Il faut notamment faire attention car, parfois, on écrit ces appartenances sous une forme condensée lorsque P porte sur les réels (et il est alors facile de confondre les appartenances et la propriété P) :

On retrouve les mêmes formes condensées avec $\leqslant y$, $< y$ ou $> y$ à la place de $\geqslant y$.

- Lorsque $y \in \mathbb{R}$, on écrit parfois par abus de notation :
  - ⋆ « $\forall x \geqslant y,\ P(x,y)$ » pour « $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant y \ \Rightarrow\ P(x,y)$ ».
  - ⋆ « $\exists x \geqslant y,\ P(x,y)$ » pour « $\exists x \in \mathbb{R},\ x \geqslant y$ et $P(x,y)$ ».
- Les négations des deux propositions précédentes sont donc respectivement :
  - ⋆ « $\exists x \in \mathbb{R},\ x \geqslant y$ et $\mathrm{non}(P(x,y))$ » et donc « $\exists x \geqslant y,\ \mathrm{non}(P(x,y))$ ».
  - ⋆ « $\forall x \in \mathbb{R},\ (x \geqslant y \ \Rightarrow\ \mathrm{non}(P(x,y))$ » et donc « $\forall x \geqslant y,\ \mathrm{non}(P(x,y))$ ».

  En pratique, il n'est pas nécessaire de détailler autant, on peut donner la négation « version courte » directement.

Mais attention à ne pas aller trop vite et à ne pas nier ce qui ne relève pas de la proposition P.

Exemple :

3) Notation $\exists!$

Définition. *Soit P une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E. La proposition « $\exists!\, x \in E,\ P(x)$ » signifie qu'un et un seul élément de E vérifie la propriété P.*

Enfin $\exists!$ se lit « *Il existe un unique* ».

Exemple :

Remarque : $\exists!\ x \in E,\ P(x)$ » est en fait une notation condensée de la proposition

$$\exists x \in E,\ \big(P(x) \text{ et } (\forall y \in E,\ P(y) \ \Rightarrow\ x = y)\big)$$

signifiant deux choses :

- Il existe un unique élément x de E vérifiant P.
- Si un élément y de E vérifie P, alors $y = x$. Autrement dit x est le seul élément de E à vérifier P.

Sa négation est donc :

$$\forall x \in E,\ \big(\mathrm{non}(P(x)) \text{ ou } (\exists y \in E,\ P(y) \text{ et } x \neq y)\big)$$

signifiant que pour tout $x \in E$, soit x ne vérifie pas P, soit un autre (distinct de x) élément de E vérifie aussi P. Autrement dit, cela signifie qu'aucun élément de E ne vérifie P ou bien qu'il y en a (au moins) deux.

4) Union et intersection d'une famille de parties

Définition. *Soit E un ensemble. Soit I un ensemble non vide. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E indexée par I. On note*

- $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i$ *la partie de E définie par $\{x\in E\,|\,\forall i\in I,\ x\in A_i\}$. On l'appelle intersection des parties de la famille.*
- $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i$ *la partie de E définie par $\{x\in E\,|\,\exists i\in I,\ x\in A_i\}$. On l'appelle union des parties de la famille.*

Un élément appartient à l'intersection s'il appartient à toutes les parties de la famille. Il appartient à l'union s'il appartient à l'une (au moins) des parties de la famille.

Exemple :

IV Comment construire une démonstration

Dans cette partie, nous détaillons des méthodes de démonstration de conjonction, disjonction, implication, équivalence et de propositions quantifiées qui découlent directement des leurs définitions. Dans le prochain chapitre, nous verrons d'autres types de démonstration.

1) Avant de commencer...

a) Il faut écrire les mathématiques en français

Lorsque l'on rédige une démonstration mathématique, il faut pouvoir la lire (et donc on l'écrit) dans un français correct d'un point de vue de la syntaxe notamment. En particulier :

- On n'utilise pas $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ comme abréviations. Si on veut insérer une proposition quantifiée dans une phrase écrire en français, on revient à la ligne ou on la fait précéder de « : ».
- On n'aligne jamais de propositions mathématiques sans connecteurs logiques ou conjonctions de coordinations. La plupart du temps, nous utiliserons « donc » entre chaque proposition mais on peut varier avec : « ainsi », « d'où », « par conséquent », « on en déduit », « dès lors », « alors », « si bien », etc. C'est aussi très important pour bien mettre en évidence sans ambiguïté le lien de cause à effet entre deux propositions. S'il y a équivalence, on pourra utiliser « si et seulement si ».

Ne pas abuser de l'usage de « c'est-à-dire » à la place de « si et seulement si » ou, pire, de « donc ».

On évite aussi de commencer une phrase par un symbole mathématique. On commence souvent par « on a ».

Mais on évite d'écrire « on a que »...

b) Il faut introduire les objets

Tout objet mathématique doit être introduit !

Soyons plus précis :

- Certains symboles mathématiques sont définis dans le cours et désignent des objets bien précis que l'on appelle des constantes. Il peut s'agir :
  - ⋆ de réels : 7, π, $\sqrt{2}$, e, etc.
  - ⋆ de fonctions : $\exp$, $\ln$, $\cos$, etc.
  - ⋆ d'ensembles : $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathscr{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) etc.

  Ces objets là n'ont pas besoin d'être introduits.

- Il est tout à fait possible de définir ses propres constantes mathématiques (surtout lorsque leur expression est compliquée et leur usage répété) et de leur donner un nom : une lettre (ou plusieurs), un symbole non déjà utilisés. Pour faire cela on écrit :

Posons/notons NOM=EXPRESSION.

Par exemple, si on écrit « Posons $C = \sqrt{2\pi}$ », alors on vient d'introduire un objet qu'il s'appelle C et qui désigne le réel $\sqrt{2\pi}$.
Si n a été introduit et si on écrit « Notons $f_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}$ », alors on vient d'introduire un objet qu'il s'appelle f_n et qui désigne la fonction qui à tout réel x associe $x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}$.

- Quand on se donne un x quelconque appartenant à un certain ensemble E (déjà introduit lui...), on dit que x est une variable. Elle n'a pas de valeur définie et représente n'importe quel élément de E. Pour l'introduire, on utilise la phrase « Soit $x \in E$ ». A partir de ce moment là, x désigne un élément quelconque (mais fixé) de E et tout ce qui sera prouvé sur x sera valable pour tous les éléments de E. En général on peut considérer que, une fois la preuve terminée, la variable meurt (on peut donc l'utiliser de nouveau pour autre chose ensuite).

Si on a écrit « $\forall x \in E,\ P(x)$ » ou « $\exists x \in E,\ P(x)$ », alors x n'a pas été introduit (elle est muette). On ne peut pas en parler dans la suite. Il faut l'introduire.

Si dans l'énoncé, il y a déjà écrit « Soit $x \in E$ », il ne faut pas introduire x car c'est déjà fait ! En revanche si l'énoncé est « Montrer que, pour tout $x \in E$, ... », alors on doit commencer par écrire « Soit $x \in E$ » (cf. paragraphe IV.4.b).

On ne confond pas l'usage de « Soit » et l'usage de « Notons/Posons » décrit ci-dessus.

Par exemple, on n'écrit pas « Soit $x = 2$ » ou « Soit $f : x \longmapsto x^2$ ».

Certaines variables sont introduites directement dans des symboles mathématiques. C'est pas exemple le cas de :

- x dans $\{x \in E \,|\, P(x)\}$.
- i dans $(x_i)_{i \in I}$.
- n dans $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2+1}{2n^3+7n+5}$,
- x dans $f : x \longmapsto 2x^2+1$,
- k dans $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1+2^2+3^2+\cdots+n^2$ (mais par contre n doit avoir été introduit lui),
- t dans $\displaystyle\int_0^1 t^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Ce sont des variables muettes (internes aux objets ci-dessus) donc elles n'existent pas en dehors de l'expression. Ainsi il ne faut surtout pas les introduire. On peut aussi librement changer de lettre (à condition qu'elle ne doit pas déjà utilisée).

Ne pas confondre « posons » et « supposons ». Ça n'a pas du tout le même sens.

Puisque la fonction f_n dépend du paramètre n, il est recommandé vivement de l'appeler f_n et non pas f afin de ne pas perdre de vue qu'il y a un paramètre.

On peut aussi écrire « Donnons-nous » ou « Considérons » au lieu de « Soit ». En revanche, on évite désormais d'utiliser « Soit » pour autre chose que ce sens précis (introduire un objet), par exemple en tant que synonyme de « c'est-à-dire » ou dans l'expression « soit ... soit ... » (on préférera « ou bien ... ou bien ... »).

On n'appelle pas son chat Médor... enfin on a le droit mais ce serait source de confusion. En mathématiques, il est vivement recommandé de donner des noms usuels aux objets selon leurs types (pour éviter des erreurs de type justement) :
- $x, y, t\ldots$ pour désigner un réel,
- $n, k, p\ldots$ pour désigner un entier,
- $f, g, h\ldots$ pour désigner une fonction,
- $E, F, G\ldots$ pour désigner un ensemble,
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... pour désigner une suite numérique.

2) Preuve d'une conjonction, disjonction, implication, équivalence

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des propositions. Reprenons les tables de vérités et regardons les valeurs de vérités de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ qui conduisent à ce que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ et $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ soient vraies.

a) Preuve d'une conjonction

Pour montrer que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est vraie, on montre que $\mathcal{A}$ est vraie et que $\mathcal{B}$ est vraie. On peut donc rédiger ainsi :

> **Rédaction type de la preuve de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.**
>
> - (Montrons que $\mathcal{A}$ est vraie.) [...] Donc $\mathcal{A}$ est vraie.
> - (Montrons que $\mathcal{B}$ est vraie.) [...] Donc $\mathcal{B}$ est vraie.
>
> Ainsi $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est vraie.

Si on veut montrer que la conjonction $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est fausse, cela revient à montrer que $\mathrm{non}(\mathcal{A})$ ou $\mathrm{non}(\mathcal{B})$ est vraie (d'après les lois de Morgan). Il s'agit donc de montrer une disjonction. On utilise alors la méthode du point suivant.

b) Preuve d'une disjonction

On peut bien sûr aussi supposer que $\mathcal{B}$ est fausse et montrer qu'alors $\mathcal{A}$ est (forcément) vraie

Pour montrer que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est vraie, on suppose que $\mathcal{A}$ est fausse et on montre que $\mathcal{B}$ est alors (forcément) vraie.En effet, sous l'hypothèse que $\mathcal{A}$ est vraie, la conjonction est vraie. On peut donc rédiger ainsi :

> **Rédaction type de la preuve de $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$.**
>
> Supposons que $\mathcal{A}$ est fausse. (Montrons que $\mathcal{B}$ est vraie.) [...] Ainsi $\mathcal{B}$ est vraie.
>
> On en déduit que $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ est vraie.

Exemple : *Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $x \leqslant 1$ ou $x^2 + x + 1 > 3$.*

Si on veut montrer que la disjonction $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ est fausse, cela revient à montrer que $\mathrm{non}(\mathcal{A})$ et $\mathrm{non}(\mathcal{B})$ est vraie (d'après les lois de Morgan). Il s'agit donc de montrer que $\mathcal{A}$ est fausse et que $\mathcal{B}$ est fausse (cf. point précédent).

c) Preuve d'une implication

Pour montrer que l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie, il suffit de se rappeler qu'elle est équivalente à $\mathrm{non}(\mathcal{A})$ ou $\mathcal{B}$. Il s'agit donc de prouver une conjonction : on suppose que $\mathcal{A}$ est vraie et on montre que $\mathcal{B}$ est vraie. On peut donc rédiger ainsi :

> **Rédaction type de la preuve directe de $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.**
>
> Supposons que $\mathcal{A}$ est vraie (Montrons que $\mathcal{B}$ est vraie.) [...] Ainsi $\mathcal{B}$ est vraie.
>
> On en déduit que $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie.

Exemple : *Soient n et p deux entiers. Montrons que, si n et p sont impairs, alors $n+p$ est pair.*

Si on veut montrer que l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est fausse, cela revient à montrer que $\mathcal{A}$ et $\mathrm{non}(\mathcal{B})$ est vraie. Il s'agit donc de montrer que $\mathcal{A}$ est vraie mais que $\mathcal{B}$ est fausse.

d) Preuve d'une équivalence

Pour montrer que $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est vraie. Il y a deux possibilités :

- Soit on raisonne directement par équivalences successives en changeant peu à peu $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$. On peut donc rédiger ainsi :

> **Rédaction type de la preuve par équivalence successives de $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$.**
> On a :
> $$\mathcal{A} \iff \cdots \iff \cdots \iff \cdots \iff \mathcal{B}.$$

- Soit on raisonne par double implication en montrant que $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ sont vraies. On peut donc rédiger ainsi :

> **Rédaction type de la preuve par double implication de $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$.**
>
> ⋆ Supposons que $\mathcal{A}$ est vraie (Montrons que $\mathcal{B}$ est vraie.) [...] Ainsi $\mathcal{B}$ est vraie. On en déduit que $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie.
>
> ⋆ Supposons que $\mathcal{B}$ est vraie (Montrons que $\mathcal{A}$ est vraie.) [...] Ainsi $\mathcal{A}$ est vraie. On en déduit que $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ est vraie.
>
> Par double implication $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est donc vraie.

Cette méthode est plus rapide mais très exigeante : à chaque transformation, il faut absolument s'assurer que l'on peut bien « revenir en arrière », c'est-à-dire qu'il s'agit bien d'une équivalence et non seulement d'une implication. Il n'est par ailleurs pas toujours possible de procéder ainsi.

Cette méthode est plus longue mais plus prudente : à chaque étape, il n'est pas indispensable de ne faire que des actions « réversibles »

Exemple : *Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $\sqrt{2x^2+2} = 3 + x$ si et seulement si $x \in \{-1; 7\}$.*

Bien sûr, on a commencé par se rassurer en remarquant que $2x^2 + 2 \geqslant 0$ et donc que $\sqrt{2x^2+2}$ a un sens.

Remarques :

- La plupart du temps, cette année, nous allons montrer des implications et non des équivalences. Même quand l'implication demandée est aussi une équivalence, il ne faut pas être trop zélé : si on ne demande que l'implication, on ne montre que l'implication (encore une fois montrer une équivalence directement est contraignant). Essentiellement, il y a trois cas de figure où l'on peut essayer de raisonner par équivalences :
  - ⋆ Quand on veut résoudre une équation ou une inéquation (cf. paragraphe IV.5).
  - ⋆ Quand l'énoncé demande clairement de prouver une équivalence.
  - ⋆ Quand on commence un raisonnement par la conclusion (c'est-à-dire par ce que l'on veut démontrer) pour aboutir, à la suite d'équivalences successives, à quelque chose de vrai (néanmoins il y a alors souvent moyen de raisonner de façon plus élégante) directement.

Avez-vous constaté que l'on n'a utilisé ni $\Rightarrow$, ni $\Leftrightarrow$ dans les rédactions types ci-dessus et ci-dessous. C'est normal : ces symboles ne sont pas des abréviations qui signifieraient « donc » ou « est équivalent à ». Je ne veux voir aucune flèche dans vos raisonnements (à part si vous procédez par équivalences successives). On les réserve exclusivement aux propositions écrites en langage mathématique, typiquement quantifiées (et, comme on l'a dit, on n'utilise pas non plus $\forall$ et $\exists$ comme abréviations dans une phrase écrite en français).

- **Raisonnement par implications multiples**. Si on dispose d'une troisième proposition $\mathcal{C}$ et que l'on désire montrer que $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}$, on peut bien sûr montrer que $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}$ sont vraies. Mais on peut aussi raisonner par implications multiples en montrant que $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ et $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A}$ sont vraies (ce raisonnement se justifie aisément en utilisant la propriété de transitivité de l'implication et le principe de double implication). Ce type de raisonnement se généralise bien sûr à un nombre fini de propositions équivalentes.

3) Preuve d'une inclusion ou d'une égalité ensembliste

Soient E et F des ensembles.

a) Preuve d'une inclusion

Dire que $E \subset F$ signifie que tout élément de E est un élément de F. Il s'agit donc de montrer une proposition universelle :

Rédaction type de la preuve de $E \subset F$.
Soit $x \in E$. (Montrons que $x \in F$.) [...] Ainsi $x \in F$.

On en déduit que $E \subset F$.

Si on sait que $E = A \cap B$ (respectivement $A \cup B$) avec A et B des ensembles, alors le fait que $x \in E$, se traduit par la connaissance que $x \in A$ et $x \in B$ (respectivement $x \in A$ ou $x \in B$). Si on sait que $F = A \cap B$ (respectivement $A \cup B$) avec A et B des ensembles, alors il s'agit de montrer que $x \in A$ et $x \in B$ (respectivement que, si $x \notin A$, alors $x \in B$), comme on l'a vu dans les paragraphes précédents).

Exemple : *Montrons que* $\mathbb{Z} \subset \{x \in \mathbb{R} \,|\, \sin(4\pi x) = 0\}$.

b) Preuve d'une égalité d'ensembles

Dire que $E = F$ signifie que tout élément appartient à E si et seulement si il appartient à F. Cela signifie aussi que $E \subset F$ et $F \subset E$. Comme pour montrer une équivalence, il y a donc deux façons de procéder :

- Soit on raisonne directement par équivalences successives :

  Rédaction type de la preuve de $E = F$ par équivalences.
  On a : $x \in E \iff \cdots \iff \cdots \iff \cdots \iff x \in F$.

  Ainsi $E = F$.

- Soit on raisonne par double inclusion :

  Rédaction type de la preuve de $E = F$ par double inclusion.
  Procédons par double inclusion :
  - ⋆ Soit $x \in E$. (Montrons que $x \in F$.) [...] Donc $x \in F$.
    Ainsi $E \subset F$.
  - ⋆ Soit $x \in F$. (Montrons que $x \in E$.) [...] Donc $x \in E$.
    Ainsi $F \subset E$.

  Par double inclusion $E = F$.

Exemples :

4) Preuve d'une phrase quantifiée

Soit P une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E.

a) Preuve de l'existence d'un objet

Se contenter de donner un élément qui vérifie P n'est pas une preuve. Il faut, le cas échéant, prouver que cet élément vérifie P.

Pour montrer que « $\exists x \in E,\ P(x)$ » est vraie, il suffit d'exhiber un élément de E qui vérifie la propriété P. Mais comment le trouver quand aucun ne nous vient rapidement ? Et bien c'est tout un programme et ce type de problème va nous occuper toute l'année. Lorsque l'on a un exemple en tête, il suffit de le poser et de vérifier qu'il satisfait la propriété. Mais nous verrons qu'il n'est parfois pas possible d'en trouver un explicitement et que l'existence est parfois garantie par de gros théorèmes mathématiques.

Exemple : *Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Justifier qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|x| > \varepsilon$.*

Pour montrer que « $\exists x \in E,\ P(x)$ » est fausse, on montrer que « $\forall x \in E,\ \mathrm{non}(P(x))$ » est vraie. Cela revient donc à montrer une proposition universelle, cf. paragraphe suivant.

b) Preuve d'une proposition universelle

Pour montrer que « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est vraie, il s'agit de montrer que tout élément x de E vérifie la propriété P, c'est-à-dire qu'à chaque fois que l'on se donne un élément de E, alors on peut montrer que celui-ci vérifie P. On rédige donc ainsi (et il n'y a aucune autre manière qui vaille) :

On peut remplacer « Soit x » par « Considérons x » ou « Donnons-nous x ». Le fait de fixer un élément de x n'est pas restrictif tant que cet élément est quelconque dans E.

Rédaction type de la preuve de $\forall x \in E,\ P(x)$.
Soit $x \in E$. (Montrons que $P(x)$ est vraie). [...] Ainsi $P(x)$ est vraie.

On en déduit que « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est vraie.

(*Alternative de conclusion.* On en déduit que, pour tout $x \in E$, $P(x)$ est vraie.)

Exemple : *Montrons que, pour tout $p \in\,]0\,;1[$, $p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$.*

Méfiance toutefois avec « Soit $x \in E$ ». Pour écrire une telle chose, il faut impérativement avoir montré au préalable l'existence de l'objet x que l'on a introduit. Cela ne va pas de soi (par exemple une dérivée, une limite, une somme infinie, une solution d'une équation) ! Sinon cela peut conduire à des failles logiques.

La faille du raisonnement faux ci-contre est qu'il n'existe pas de plus grand entier naturel donc on n'avait pas le droit d'écrit « Soit n le plus grand entier naturel ». En effet la conclusion est fausse donc c'est que l'hypothèse d'existence l'est. Nous venons de faire notre premier raisonnement par l'absurde (cf. chapitre suivant), mal rédigé toutefois.

Par exemple :

Pour montrer que « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est fausse, on montre que « $\exists x \in E,\ \mathrm{non}(P(x))$ » est vraie. Cela revient donc à trouver un élément de x qui ne vérifie pas P. Un tel élément est appelé un **contre-exemple**. La recherche d'un contre-exemple peut également être ardue et ne pas pouvoir se faire explicitement (cf. paragraphe précédent).

Exemple : *Montrons que « Tout entier naturel est la somme de trois carrés d'entiers » est fausse.*

On ne demande jamais de théoriser tous les éléments qui sont des contre-exemples :
UN CONTRE-EXEMPLE EXPLICITE SUFFIT.

c) Preuve de l'unicité d'un object

Pour montrer qu'il existe **au plus** (c'est-à-dire qu'il n'y en a pas ou bien qu'il n'y en a qu'un) un élément x qui vérifie la propriété P revient à montrer la proposition :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \big((P(x) \text{ et } P(y)) \implies x = y\big)$$

Il s'agit donc de montrer une proposition universelle (on se donne x et y dans E) puis une implication. On peut donc rédiger ainsi :

Inutile de supposer que $x \neq y$ puis de raisonner par l'absurde (cf. prochain chapitre) : on suppose que deux éléments (pas forcément distincts) vérifient la propriété et on montre que ce sont forcément les mêmes.

Rédaction type de la preuve qu'au plus un élément de E vérifie P.
Soient $x \in E$ et $y \in E$. Supposons que $P(x)$ et $P(y)$ sont vraies. (Montrons que $x = y$.) [...] Donc $x = y$.
Ainsi il existe au plus un élément de E vérifiant P.

Exemple : *Montrons qu'il existe au plus une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = -f$, $f(0) = 2$ et f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.*

Il existe d'ailleurs une telle fonction, il s'agit de

$$f : x \longmapsto 2\mathrm{e}^{-x}.$$

Nous en reparlerons dans le chapitre 4.

Cette démonstration est correcte même quand aucun élément ne vérifie la propriété. On peut en effet tout à fait supposer que quelque chose de faux est vrai (on ne s'est pas gêné pour faire ça de nombreuses fois dans ce chapitre).

5) Notion d'équation et d'inéquation

Plus précisément, s'il y a deux inconnues, on cherche l'ensemble des couples d'inconnues. S'il y en a trois, l'ensemble des triplets, etc.

On appelle équation (respectivement inéquation) toute égalité (respectivement inégalité) faisant intervenir une ou plusieurs variables, appelées inconnues, pour lesquelles on cherche la ou les valeurs la rendant vraie. Il peut s'agir d'égalités faisant intervenir des réels ou bien des fonctions ou bien des ensembles, etc.

Résoudre une équation (respectivement une inéquation) consiste donc à déterminer l'ensemble des valeurs des inconnues rendant vraie l'égalité (respectivement l'inégalité). On l'appelle l'ensemble des solutions. Plus précisément il s'agit de trouver l'ensemble A tel que, pour tout uplet x d'inconnues,

$$x \text{ solution} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in A.$$

⚠ Résoudre une équation ou une inéquation consiste donc à montrer une équivalence.

Annexe : alphabet grec

Nous allons vite nous trouver à court de lettres avec celles de l'alphabet latin. On utilisera donc beaucoup de lettres grecs :

À cause de leur similitude avec les lettres latines, on évitera cependant d'utiliser les minuscules grecques ι (iota) et o (omicron) et les majuscules grecques A, B, E, Z, H, I, K, M, N, O, P, T et X.

nom	minuscule	majuscule	équivalent latin
alpha	α	A	a
bêta	β	B	b
gamma	γ	Γ	g
delta	δ	Δ	d
epsilon	ε	E	e
zêta	ζ	Z	z
êta	η	H	ê
thêta	θ ou ϑ	Θ	th
iota	ι	I	i
kappa	κ	K	k
lambda	λ	Λ	l
mu	μ	M	m
nu	ν	N	n
xi	ξ	Ξ	x
omicron	o	O	o
pi	π	Π	p
rho	ρ ou ϱ	P	r
sigma	σ	Σ	s
tau	τ ou τ	T	t
upsilon	υ	Υ	y
phi	ϕ ou φ	Φ	ph
chi	χ	X	kh
psi	ψ	Ψ	ps
omega	ω	Ω	ô