Chapitre 18

Limites et continuité

> Ce chapitre va avoir comme un goût de déjà vu puisque les premiers paragraphes vont reprendre la même trame que la partie B du chapitre 14 sur les limites de suites. De nombreux résultats sont en effet analogue.

L'objectif de ce chapitre est de définir rigoureusement les notions de limites et continuité d'une fonction de la variable réelle et à valeurs réelles. Nous allons aussi montrer tous les résultats que nous avons admis sur le sujet dans le chapitre 4.

On se donne une partie D de $\mathbb{R}$ qui est une union d'intervalles non vides et non réduits à un point. Soient f, g et h des fonctions définies sur D et à valeurs réelles. Dans tout ce chapitre I désigne un **intervalle** non vide et non réduit à un point inclus dans D (et donc sur lequel f est définie).

Pour éviter de longues phrases dans l'énoncé des résultats, nous utiliserons la notion de point adhérent introduite dans le chapitre 13 mais hors programme de première année : on dit que $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est un point adhérent à D si, pour tout voisinage V_a de a, $V_a \cap D \neq \varnothing$.

> Étant donnée la forme de D, les points adhérents à D sont les éléments de D, les bornes finies des intervalles dont D est l'union, de $+\infty$ si A n'est pas majorée et de $-\infty$ si A n'est pas minorée.

I Notion de limite d'une fonction

1) Limite en $\pm\infty$

a) Limite finie en $\pm\infty$

> Pour une suite, le rang ne peut que tendre vers $+\infty$.

La définition d'une fonction f qui admet une limite finie ℓ en $+\infty$ est exactement la même que celle d'une suite : quelle que soit la précision ε voulue, l'écart entre $f(x)$ et ℓ finit, pour tout réel x dépassant un seuil B, par être plus petit que ε. Cela justifie la définition suivante :

> ⚠ La seule grande différence est que l'on précise que $x \in D$ sinon $f(x)$ pourrait ne pas être défini. Sinon on se contente de remplacer n par x, u_n par $f(x)$ et n_0 par B.

Définition (limite finie en $+\infty$). *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Supposons que $+\infty$ soit adhérent à D. On dit que f tend vers ℓ (ou admet ℓ pour limite) en $+\infty$ si :*

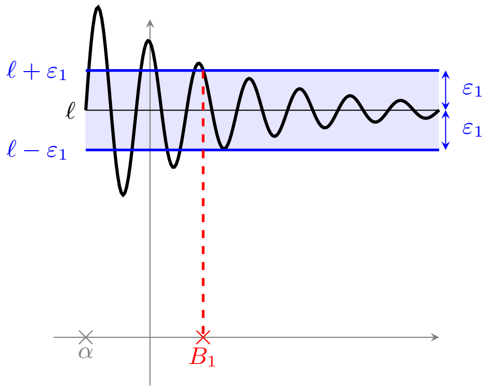
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B > 0, \quad \forall x \in D, \quad x \geqslant B \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

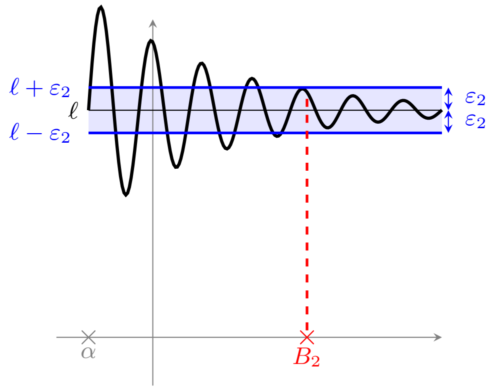
On note alors $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$.

> ⚠ Mais on doit absolument avoir $\varepsilon > 0$.

Remarques :

- Comme on l'a vu dans les chapitres 13 et 14, on peut remplacer $x \geqslant B$ par $x > B$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ par $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ et aussi $B > 0$ par $B \in \mathbb{R}$, ou encore $B \geqslant 1$ (l'important est que les valeurs de x puissent devenir aussi grande que possible). On peut aussi conclure en ayant $|f(x) - \ell| \leqslant 2\varepsilon$, $|f(x) - \ell| \leqslant 3\varepsilon$, etc. On en reparlera dans le paragraphe I.3.
- Illustrons cette définition :





Ci-dessus f est définie sur $I = [\alpha\,; +\infty[$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction f admet ℓ pour limite en $+\infty$. À gauche, nous avons choisi $\varepsilon_1 = 1$ et nous avons trouvé $B_1 > 0$ tel

Rien ne dit que B est la plus petite valeur à partir de laquelle toutes les images sont à distance inférieure à ε de ℓ.

que, pour tout $x \geqslant B_1$, les valeurs de $f(x)$ se retrouvent dans la bande bleue (i.e. $[\ell - \varepsilon_1 \,; \ell + \varepsilon_1]$). À droite, nous avons choisi $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{2}$ et nous avons trouvé $B_2 > 0$ tel que, pour tout $x \geqslant B_2$ (un intervalle plus resserré autour de ℓ que dans la figure de gauche), les valeurs de $f(x)$ se retrouvent dans la bande bleue (i.e. $[\ell - \varepsilon_2 \,; \ell + \varepsilon_2]$).

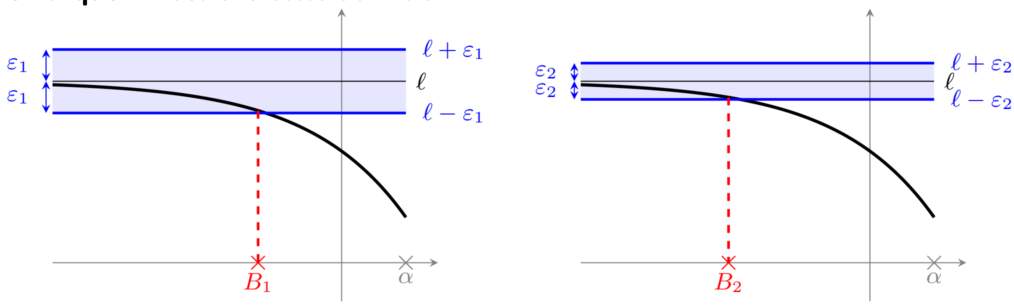
On généralise aisément à une limite finie en $-\infty$, en regardant plutôt les valeurs en dessous d'un certain seuil B :

Définition (limite finie en $-\infty$). *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Supposons que $-\infty$ soit adhérent à D. On dit que f tend vers ℓ (ou admet ℓ pour limite) en $-\infty$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B < 0, \quad \forall x \in D, \quad x \leqslant B \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} \ell$.

Remarque : Illustrons cette définition :



b) Limite infinie en $\pm\infty$

Pour une suite, le rang ne peut que tendre vers $+\infty$.

La définition d'une fonction f qui tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) en $+\infty$ est exactement la même que celle d'une suite : quel que soit le niveau A voulu, $f(x)$ finit, pour tout réel x dépassant un seuil B, par être plus grand (respectivement plus petit) que A. Cela justifie la définition suivante :

La seule grande différence est que l'on précise que $x \in D$ sinon $f(x)$ pourrait ne pas être défini. Sinon on se contente de remplacer n par x, u_n par $f(x)$ et n_0 par B.

Définition (limite infinie en $+\infty$). *. Supposons que $+\infty$ soit adhérent à D.*

- *On dit que f tend vers $+\infty$ (ou admet $+\infty$ pour limite) en $+\infty$ si :*

$$\forall A > 0, \quad \exists B > 0, \quad \forall x \in D, \quad x \geqslant B \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant A.$$

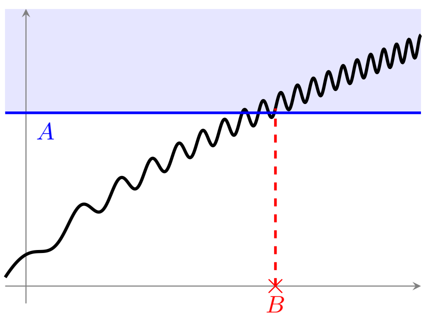
On note alors $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

- *On dit que f tend vers $-\infty$ (ou admet $-\infty$ pour limite) en $+\infty$ si :*

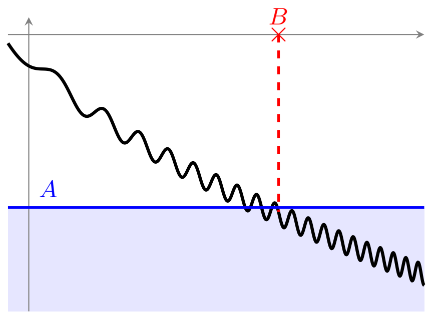
$$\forall A < 0, \quad \exists B > 0, \quad \forall x \in D, \quad x \geqslant B \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leqslant A.$$

On note alors $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$.

Remarque : Illustrons ces définitions :



limite $+\infty$ en $+\infty$



limite $-\infty$ en $+\infty$

On généralise aisément à une limite infinie en $-\infty$, en regardant plutôt les valeurs en dessous d'un certain seuil B :

Définition (limite infinie en $-\infty$). *Supposons que $-\infty$ soit adhérent à D.*

- *On dit que f tend vers $+\infty$ (ou admet $+\infty$ pour limite) en $-\infty$ si :*

$$\forall A > 0, \quad \exists B < 0, \quad \forall x \in D, \quad x \leqslant B \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant A.$$

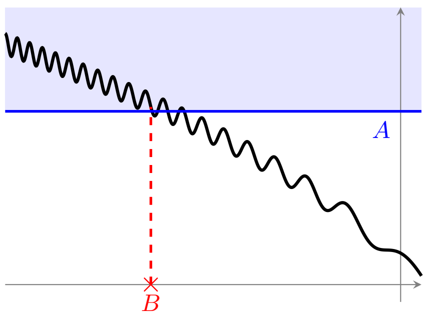
On note alors $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$.

- *On dit que f tend vers $-\infty$ (ou admet $-\infty$ pour limite) en $-\infty$ si :*

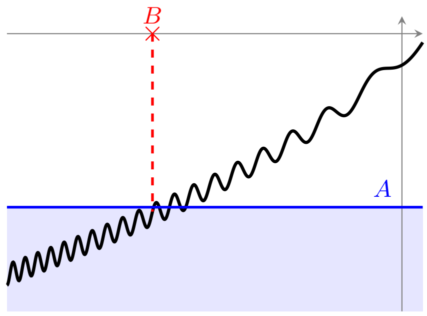
$$\forall A < 0, \quad \exists B < 0, \quad \forall x \in D, \quad x \leqslant B \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leqslant A.$$

On note alors $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$.

Remarque : Illustrons ces définitions :



limite $+\infty$ en $-\infty$



limite $-\infty$ en $-\infty$

Il n'y a pas de problème de « démonstration circulaire » puisque l'existence de la racine $n^{\text{ième}}$ a été prouvée dans les chapitres 13 et 14, indépendamment des notions de limite de fonctions.

Montrons enfin un des seuls résultats admis de la partie C du chapitre 4 :

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a*

$$x^n \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad x^n \xrightarrow[x\to-\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si} \quad n \text{ est impair} \end{cases}$$

Démonstration. • Soit $A > 0$. Posons $B = \sqrt[n]{A} > 0$. Pour tout $x \geqslant B$, par croissance de la fonction puissance $n^{\text{ième}}$ sur $\mathbb{R}_+$, on obtient $x^n \geqslant B^n = A$. Ainsi $x^n \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

- Supposons n pair. Soit $A > 0$. Posons $B = -\sqrt[n]{A} < 0$. Pour tout $x \leqslant B$, par décroissance de la fonction puissance $n^{\text{ième}}$ sur $\mathbb{R}_-$, on obtient $x^n \geqslant B^n = A$. Ainsi $x^n \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$.

- Supposons n impair. Soit $A < 0$. Posons $B = -\sqrt[n]{-A} < 0$. Pour tout $x \leqslant B$, par croissance de la fonction puissance $n^{\text{ième}}$ sur $\mathbb{R}_-$, on obtient $x^n \leqslant B^n = A$. Ainsi $x^n \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$. □

En effet, comme n est impair,

$$\begin{aligned}(-\sqrt[n]{-A})^n &= -(\sqrt[n]{-A})^n \\ &= -(-A) \\ &= A.\end{aligned}$$

2) Limite en un réel

a) Limite finie en un réel

C'est encore un peu la même idée : une fonction admet une limite finie ℓ en un réel a lorsque, quelle que soit la précision ε voulue, l'écart entre $f(x)$ et ℓ finit, pour tout réel x suffisamment proche de a (à une distance δ de a), par être plus petit que ε.

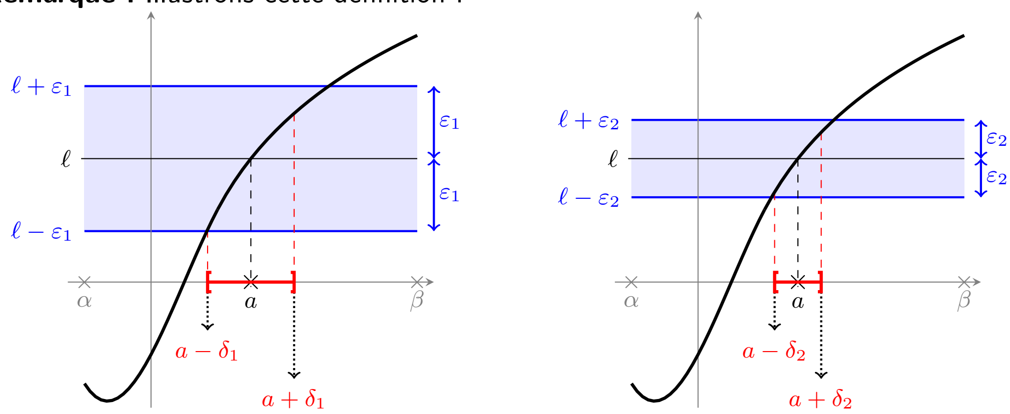
> Ainsi $a \in D$ ou a est une borne finie d'un des intervalles dont D est l'union.

Définition (limite finie en un réel). *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à D. On dit que f tend vers ℓ (ou admet ℓ pour limite) en a si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in D, \quad |x - a| \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

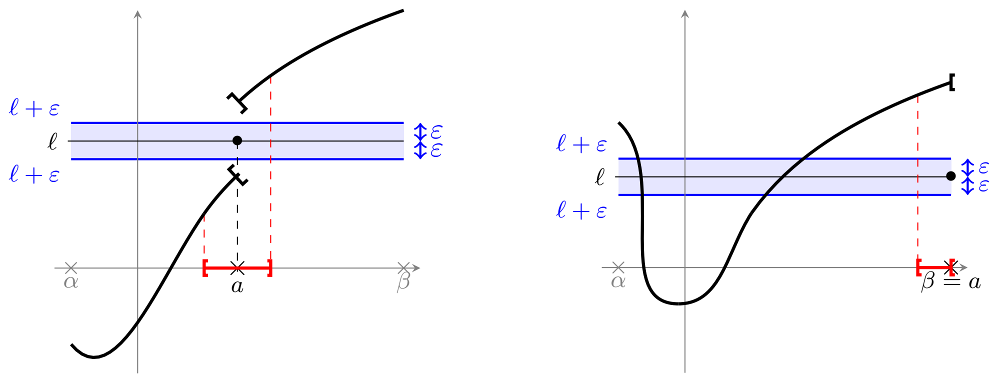
On note $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

Remarque : Illustrons cette définition :



Ci-dessus f est définie sur $I = [\alpha\,;\beta]$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha < \beta$. La fonction f admet ℓ pour limite en $a \in I$. À gauche, nous avons choisi $\varepsilon_1 = \dfrac{3}{2}$ et nous avons trouvé $\delta_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in [a - \delta_1\,; a + \delta_1]$, les valeurs de $f(x)$ se retrouvent dans la bande bleue (i.e. $[\ell - \varepsilon_1\,; \ell + \varepsilon_1]$). À droite, nous avons choisi $\varepsilon_2 = \dfrac{4}{5}$ et nous avons trouvé $\delta_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in [a - \delta_2\,; a + \delta_2]$ (un intervalle plus resserré autour de a que dans la figure de gauche), les valeurs de $f(x)$ se retrouvent dans la bande bleue (i.e. $[\ell - \varepsilon_2\,; \ell + \varepsilon_2]$).

> Dans les deux exemples ci-contre, l'absence de limite finie en a provient du fait que la courbe de la fonction présente un saut en a. Cela renvoie à l'approche intuitive de la notion de continuité (que l'on verra de façon rigoureuse dans les prochains paragraphes) : « une fonction est continue en a si l'on peut tracer sa courbe au voisinage de a sans lever le crayon. »



Ci-dessus à gauche, la fonction g n'admet pas de limite en a. En effet, si elle admettait une limite finie ℓ, alors on aurait $\ell = g(a)$ (cf. paragraphe ci-dessous). Mais si on prend $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ (bande bleue), on ne peut pas trouver de voisinage de a dont tous les éléments ont leur image par g dans la bande bleue. Ci-dessus à droite, la fonction h n'admet pas non plus de limite en $a = \beta$ (l'extrémité droite de I). En effet, si elle admettait une limite finie ℓ, alors on aurait $\ell = h(a)$ (cf. ci-dessous). Mais si on prend $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ (bande bleue), on ne peut pas trouver de voisinage de a dont tous les éléments ont leur image par h dans la bande bleue.

> Mais si on prive β du domaine de définition de h, alors celle-ci admet une limite en β.

Exemple : *Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$. Pour tout $x \in [-\delta\,; \delta]$, on a*

$$|x^2 - 0| = x^2 \leqslant \delta^2 = \varepsilon.$$

Ainsi, par définition, $x^2 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. On verra dans la paragraphe V.1.a que cela signifie que la fonction carré est continue en 0.

Avant de terminer notre tour d'horizon des différents types de limites, énonçons un résultat important sur les limites finies en un réel du domaine de définition de la fonction :

Ici a appartient à D !

Proposition. *Soit $a \in D$. Supposons que f admette pour limite finie ℓ en a. Alors $\ell = f(a)$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde : supposons que f admette pour limite ℓ en a et que $\ell \neq f(a)$. Pour $\varepsilon = |f(a) - \ell|/2 > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in D \cap [a - \delta\,; a + \delta]$. En particulier, c'est le cas pour $x = a$ (car $a \in D$) :

$$2\varepsilon = |f(a) - \ell| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui est absurde. Ainsi $\ell = f(a)$. □

Ainsi, pour prouver que f n'a pas de limite en a, il suffit de prouver que f ne tend pas vers $f(a)$.

b) Limite infinie en un réel

La définition d'une fonction f qui tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) en un réel a est encore analogue : quel que soit le niveau A voulu, $f(x)$ finit par être plus grand (respectivement plus petit) que A, pour tout réel « suffisamment proche » de a.

Étant donnée la définition ci-contre, il est obligatoire que a n'appartienne pas à D sinon $f(a)$ serait plus grand que tout valeur A, ce qui ne se peut pas bien sûr.

Définition (limite infinie en un réel). *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à D qui n'appartient par à D.*

- *On dit que f tend vers $+\infty$ (ou admet $+\infty$ pour limite) en a si :*

$$\forall A > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in D, \quad |x - a| \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant A.$$

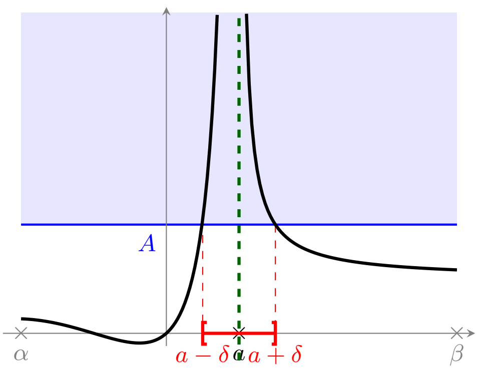
On note $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.

- *On dit que f tend vers $-\infty$ (ou admet $-\infty$ pour limite) en a si :*

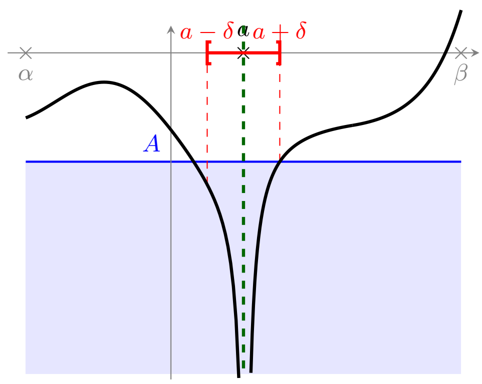
$$\forall A < 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in D, \quad |x - a| \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leqslant A.$$

On note $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$.

Remarque : Illustrons ces définitions :



limite $+\infty$ en $a \in \mathbb{R}$



limite $-\infty$ en $a \in \mathbb{R}$

3) Une définition universelle

Si on regarde de plus près, les neuf types de limites présentées ci-dessus possèdent des définitions analogues. On peut les unifier en une définition commune en utilisant la notion de voisinage (cf. chapitre 13) :

Proposition/Définition. *Soit $(a, \ell) \in \overline{\mathbb{R}}^2$. Supposons que a soit adhérent à D. La fonction f admet ℓ pour limite en a si et seulement si, pour tout voisinage V_ℓ de ℓ, il existe un voisinage V_a de a tel que, pour tout $x \in D \cap V_a$, $f(x) \in V_\ell$.*

Nous avons déjà évoqué ses variantes dans le chapitre 14, pour les limites de suits.

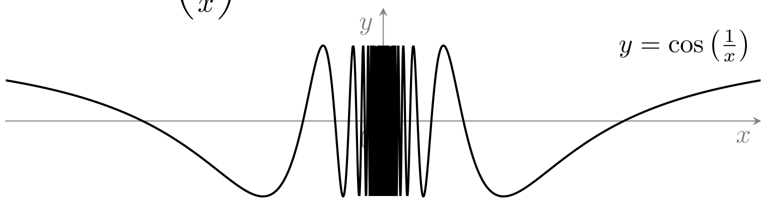
Mais on doit impérativement avoir $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$.

Remarque :

- Cette définition en terme de voisinages permet de justifier (comme nous l'avons vu dans le chapitre 13) de nombreuses variantes dans les définitions :
  - ⋆ On peut considérer des intervalles ouverts au lieu d'intervalles fermés et donc remplacer tous les $x \underset{\leqslant}{\geqslant} A$, $x \underset{\leqslant}{\geqslant} B$, $f(x) \underset{\leqslant}{\geqslant} A$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ par $x \underset{<}{>} A$, $x \underset{<}{>} B$, $f(x) \underset{<}{>} A$, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ respectivement.
  - ⋆ On peut conclure que ℓ est limite finie si on aboutit dans la démonstration à $|f(x) - \ell| \leqslant 3\varepsilon$ ou 2ε ou ε^2, etc. au lieu de $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$. On peut conclure que $\underset{-\infty}{+\infty}$ est limite si on aboutit dans la démonstration à $f(x) \underset{\leqslant}{\geqslant} A + 1$, $f(x) \underset{\leqslant}{\geqslant} A^2$, etc. au lieu de $f(x) \underset{\leqslant}{\geqslant} A$.
- Si D est un voisinage de a, alors, avec les notations de la définition universelle, $D \cap V_a$ est encore un voisinage de a (cf. chapitre 13) donc « il existe un voisinage V_a de a tel que, pour tout $x \in D \cap V_a$ » peut juste s'écrire « il existe un voisinage V_a de a tel que, pour tout $x \in V_a$ ». Autrement dit, dans la définition universelle, on peut se passer de mentionner D. Et donc, quand D est un voisinage de a, dans chacune des neuf définitions vues ci-dessus, on peut se passer d'écrire « $\forall x \in D$ ».
- ⚠ Le caractère universel de cette définition ne doit pas faire croire que toute fonction admet une limite en tout point adhérent à son domaine de définition. Il se peut qu'il n'y ait pas de limite !

  Cf. paragraphe III.2.b pour une preuve.

  Par exemple $x \longmapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *n'admet pas de limite en* 0.



- Puisqu'on en est à unifier les notions de limite, terminons ce paragraphe par deux résultats, l'un concernant toutes les fonctions admettant une limite en un réel et l'autre concernant toutes les fonctions admettant une limite finie :

Proposition. *Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à D. On a*

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(a+h) \xrightarrow[h \to 0]{} \ell.$$

Démonstration. Il suffit de remplacer x par $a + h$ dans la définition quantifiée pour l'obtenir. Puis de remplacer h par $x - a$ pour la réciproque. □

En particulier :
- Si $|f(x)| \xrightarrow[x \to a]{} 0$, alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.
- $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ si et seulement si $-f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\ell$.

Proposition. *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Soit a un point adhérent à D. On a :*

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) - \ell \xrightarrow[x \to a]{} 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |f(x) - \ell| \xrightarrow[x \to a]{} 0.$$

Démonstration. On constate que les définitions quantifiées de ces trois limites sont exactement les mêmes. □

4) Unicité de la limite

En d'autres termes, si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\ell = \ell'$.

Proposition (unicité de la limite). *Soit a un point adhérent à D. Si la fonction f admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors cette limite est unique. On appelle alors ℓ* **la** *limite de f et on note aussi $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ ou $\ell = \lim\limits_{a} f$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons que f admette deux limites réelles ℓ et ℓ' dans $\overline{\mathbb{R}}$. Puisque $\ell \neq \ell'$, il existe un voisinage V_ℓ de ℓ et un voisinage $V_{\ell'}$ de ℓ' tels que $V_\ell \cap V_{\ell'} = \varnothing$ (cf. paragraphe IV.1 du chapitre 13).

- Puisque $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$, il existe un voisinage V_a de a tel que, pour tout $x \in D \cap V_a$, $f(x) \in V_\ell$.
- Puisque $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell'$, il existe un voisinage V_a' de a tel que, pour tout $x \in D \cap V_a'$, $f(x) \in V_{\ell'}$.

Posons $V = V_a \cap V_a'$. Il s'agit d'un voisinage de a (cf. paragraphe IV.1 du chapitre 13). Pour tout $x \in D \cap V$, on a alors $f(x) \in V_\ell \cap V_{\ell'}$, ce qui est absurde. $\square$

On ne redira pas à quel point les notations $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ ou $\ell = \lim\limits_a f$ sont dangereuses. Nous renvoyons au chapitre 14 pour des exemples d'utilisations piégeuses.

5) Limite à gauche, limite à droite

Ainsi a est soit un point intérieur soit l'extrémité droite finie de l'un des intervalles dont D est l'union.

L'intervalle $]-\infty\,;a[$ doit bien être ouvert ! Une fonction peut être définie en a mais avoir une limite à gauche disctincte de $f(a)$!

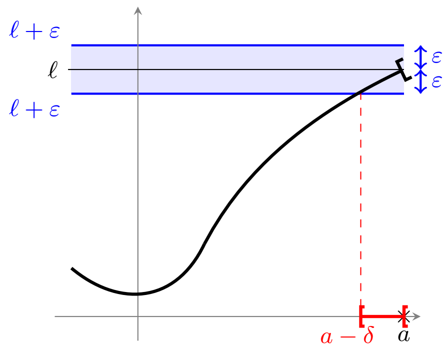
Définition (limite à gauche). *Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à $D \cap]-\infty\,;a[$. On dit que f admet ℓ pour limite à gauche si $f|_{D\cap]-\infty\,;a[}$ admet une limite en a. Autrement dit si,*

- *lorsque $\ell \in \mathbb{R}$:* $\quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D,\ a - \delta \leqslant x < a \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$
- *lorsque $\ell = +\infty$:* $\quad \forall A > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D,\ a - \delta \leqslant x < a \implies f(x) \geqslant A$
- *lorsque $\ell = -\infty$:* $\quad \forall A < 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D,\ a - \delta \leqslant x < a \implies f(x) \leqslant A$

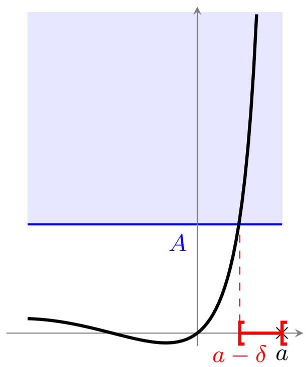
On note $f(x) \xrightarrow[x\to a^-]{} \ell$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{a^-} f = \ell$ ou encore $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \ell$.

Remarques :

- Illustrons cette définition :



limite finie à gauche en a



limite infinie à gauche en a

- Sous réserve d'existence, la limite à gauche d'une fonction étant définie comme la limite (tout court) d'une fonction (une restriction), il y a unicité de la limite à gauche. On peut donc bien parler de **la** limite à gauche et la notation avec le symbole $\lim$ est donc licite. Même remarque avec la limite à droite définie ci-dessous :

Ainsi a est soit un point intérieur soit l'extrémité gauche finie de l'un des intervalles dont D est l'union.

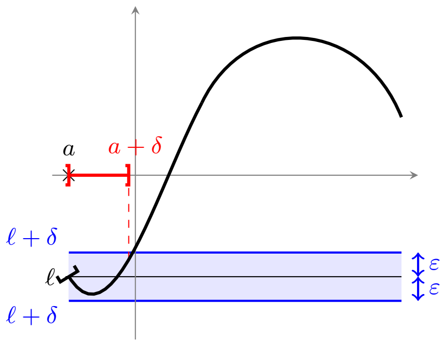
Définition (limite à droite). *Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à $D \cap]a\,;+\infty[$. On dit que f admet ℓ pour limite à gauche si $f|_{D\cap]a\,;+\infty[}$ admet une limite en a. Autrement dit si,*

- *lorsque $\ell \in \mathbb{R}$:* $\quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D,\ a < x \leqslant a + \delta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$
- *lorsque $\ell = +\infty$:* $\quad \forall A > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D,\ a < x \leqslant a + \delta \implies f(x) \geqslant A$
- *lorsque $\ell = -\infty$:* $\quad \forall A < 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D,\ a < x \leqslant a + \delta \implies f(x) \leqslant A$

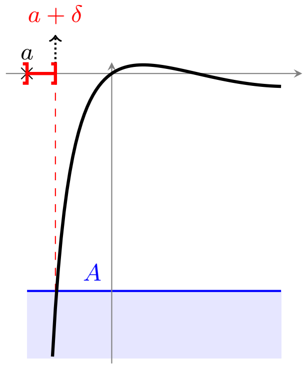
On note $f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} \ell$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{a^+} f = \ell$ ou encore $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \ell$.

Dans la définition, l'intervalle $]a\,;+\infty[$ doit bien être ouvert ! Une fonction peut être définie en a mais avoir une limite à gauche distincte de $f(a)$!

Remarque : Illustrons cette définition :



limite finie à droite en a



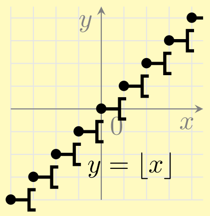
limite infinie à droite en a

Exemples :

- *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction $\tan$ admet $+\infty$ pour limite à gauche et $-\infty$ pour limite à droite en $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$*
- *La fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ admet des limites à gauche et à droite en chaque réel. Plus précisément, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,*

$$\lim_{x \to k^-} \lfloor x \rfloor = k - 1, \qquad \lim_{x \to k^+} \lfloor x \rfloor = k$$

et, pour tout $a \in]k\,;k+1[$ (c'est-à-dire quand $a \notin \mathbb{Z}$), $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \lfloor x \rfloor = \lim_{x \to a^-} \lfloor x \rfloor = a$.



Intuitivement, en recollant les intervalles $]-\infty\,;a[$ et $]a\,;+\infty[$, il faut que les courbes représentatives de f sur chacun de ces intervalles se « rejoignent ». Dans le cas où f est définie en a, il faut de plus qu'elle se « rejoignent » en $f(a)$.

Proposition. *Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à $D \cap]a\,;+\infty[$ et $D \cap]-\infty\,;a[$.*

- ***Cas où** $a \notin D$.*

$$\lim_a f = \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{a^+} f = \lim_{a^-} f = \ell.$$

- ***Cas où** $a \in D$ **et** $\ell \in \mathbb{R}$.*

$$\lim_a f = \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \displaystyle\lim_{a^+} f = \lim_{a^-} f = \ell, \\ \ell = f(a). \end{cases}$$

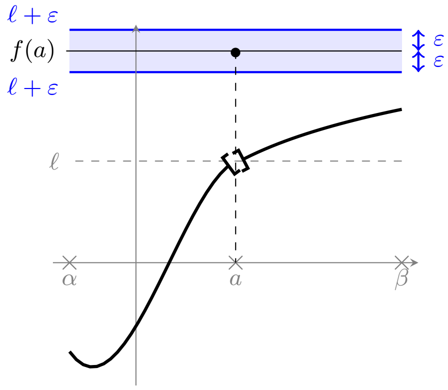
Démonstration. Le sens direct découle de la définition des limites à gauches et à droite et du fait que, lorsque $a \in D$ et f admet une limite finie en a, cette limite est égale à $f(a)$.

□

Exemple : *Notons* $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x)}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ x\ln(x) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$.

Remarque : ⚠ Ne surtout pas oublier d'ajouter la condition que la limite à gauche et à droite coïncident avec $f(a)$ dans le cas où $a \in D$.

⚠ Ici les courbes à gauche et à droite se « rejoignent » en une valeur commune mais qui n'est pas valeur en a. Il n'y a pas de limite !



Ci-contre la fonction est définie sur $I = [\alpha\,;\beta]$ avec α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$. Elle admet une limite à gauche et à droite en a qui sont égales (à ℓ ici). Cependant $\ell \neq f(a)$. La fonction n'admet pas de limite en a.

II Limites et relation d'ordre

Dans tout ce paragraphe, a désigne un point adhérent à D.

1) Propriété d'ordre transmise par la limite

Cela signifie qu'il existe un voisinage V de a et $M > 0$ tels que, pour tout $x \in D \cap V$, $|f(x)| \leqslant M$.

Proposition. *Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.*

Démonstration. Supposons que f admette une limite finie ℓ en a. Il existe alors un voisinage V_a de a tel que, pour tout $x \in D \cap V_a$, $|f(x) - \ell| \leqslant 1$. Ainsi, par inégalité triangulaire, pour tout $x \in D \cap V_a$, $|f(x)| \leqslant 1 + |\ell|$. Cela signifie que f est bornée au voisinage de a. $\square$

Mais c'est classique et très utile donc il faut savoir à tout prix le démontrer...

En regardant la preuve, on conclut aussi que f est strictement positive au voisinage de a.

Remarque : Dans le même genre, mais ce n'est pas explicitement indiqué dans le programme officiel :

- Si f tend vers $+\infty$ en a, alors f est minorée au voisinage de a et non majorée sur D.

  En effet il existe alors un voisinage V_a de a tel que, pour tout $x \in D \cap V_a$, $f(x) \geqslant 1$ (en prenant $A = 1$ dans la définition). Ensuite, raisonnons par l'absurde et supposons que f soit majorée par M sur D. En appliquant la définition du fait que f tende vers $+\infty$ avec $A = M + 1$, on aboutit à contradiction).

- Soient c et d dans $\overline{\mathbb{R}}$ tel que $c < d$. Si f tend vers $\ell \in \,]c\,;d[$ en a, alors f est à valeurs dans $]c\,;d[$ au voisinage de a.

  Montrons le dans le cas où c et d sont réels (les autres cas sont analogues avec une inégalité en moins). Prenons $\varepsilon = \min\left\{\dfrac{\ell - c}{2}; \dfrac{d - \ell}{2}\right\}$. Avec ce choix de ε dans la définition quantifiée de la limite, il existe un voisinage V_a de a tel que, pour tout $x \in D \cap V_a$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ et donc

$$c < \frac{c+\ell}{2} = \ell - \frac{\ell - c}{2} \leqslant \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon \leqslant \ell + \frac{d-\ell}{2} = \frac{d+\ell}{2} < d.$$

Par exemple :

— *Si $\ell = 2$, f est à valeurs dans $]1\,;3[$ au voisinage de a.*
— *Si $\ell > 0$, f est à valeurs dans $\left]\frac{\ell}{2}\,;+\infty\right[$ et donc à valeurs strictement positives au voisinage de a.*
— *Si $\ell < 0$, f est à valeurs dans $\left]-\infty\,;\frac{\ell}{2}\right[$ et donc à valeurs strictement négatives au voisinage de a.*
— *Si $\ell < 1$, f est à valeurs dans $\left]-\infty\,;\frac{1+\ell}{2}\right[$ au voisinage de a.*

2) Passage à la limite dans une inégalité large

Ce n'est pas un théorème d'existence de limite. Pour l'appliquer, on doit avoir montré que f et g admettent des limites !

Théorème (Les inégalités larges passent à la limite). *Supposons que, pour tout $x \in D$, $f(x) \leqslant g(x)$. Soient ℓ et ℓ' des réels. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell'$, alors $\ell \leqslant \ell'$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell > \ell'$. Notons $\varepsilon = \dfrac{\ell - \ell'}{3} > 0$.

- Comme $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$, il existe un voisinage V_a de a tel que, pour tout $x \in D \cap V_a$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ donc $f(x) \geqslant \ell - \varepsilon$.
- Comme $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$, il existe un voisinage V'_a de a tel que, pour tout $x \in D \cap V'_a$, $|g(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ donc $g(x) \leqslant \ell' + \varepsilon$.

En prenant un élément x de $D \cap V_a \cap V'_a$ (non vide puisque $V_a \cap V'_a$ est encore un voisinage de a qui est adhérent à D), on obtient $\ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant g(x) \leqslant \ell' + \varepsilon$ donc $\ell - \ell' \leqslant 2\varepsilon$ donc $3\varepsilon \leqslant 2\varepsilon$. C'est absurde : $\ell \leqslant \ell'$. □

Ce théorème reste vrai si $f(x) \leqslant g(x)$ seulement au voisinage de a. Et le suivant est donc vrai si la majoration/minoration n'a lieu qu'au voisinage de a.

LES INÉGALITÉS STRICTES DEVIENNENT LARGES PAS À LA LIMITE.

Corollaire. *Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$. Supposons que f admette ℓ pour limite en a.*
1. *Si f est majorée par m sur D, alors $\ell \leqslant m$.*
2. *Si f est minorée par m sur D, alors $\ell \geqslant m$.*

III Opérations sur les fonction admettant une limite

Dans tout ce paragraphe, a désigne un point adhérent à D.

1) Opérations algébriques

Les opérations algébriques (valeur absolue, somme, produit, multiplication par un réel, inverse, quotient) sont totalement similaires à celles sur les suites. Il suffit de reprendre les mêmes démonstrations en remplaçant « il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$ » par « il existe un voisinage V_a de a tel que, pour tout $x \in D \cap V_a$ » .

Définition (limites 0^+ et 0^-). *On note $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0^+$ (respectivement 0^-) pour signifier que f tend vers 0 en a tout en étant strictement positive (respectivement négative) lorsque x est « suffisamment proche » de a.*

On parle de forme indéterminée (et on note F.I. dans les tableaux) quand on ne peut pas déterminer la limite d'une opération sur les fonctions de manière générale. Il s'agit des limites de la forme :

« $\infty - \infty$ »

« $0 \times \infty$ »

« $\dfrac{0}{0}$ »

« $\dfrac{\infty}{\infty}$ »

Théorème (opérations algébriques sur les limites). *Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Soit $(\ell, \ell') \in \mathbb{R}^2$. Les tableaux suivants indiquent la limite de $f+g$, λf, fg, $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ en fonction des limites de f et g en a.*

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x))$$

$\lim_{x\to a} g(x)$ \ $\lim_{x\to a} f(x)$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

$$\lim_{x \to a} (\lambda f(x)) :$$

$\lim_{x\to a} f(x)$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda > 0$	$\lambda\ell$	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda = 0$	0	0	0
$\lambda < 0$	$\lambda\ell$	$-\infty$	$+\infty$

$$\lim_{x \to a} |f(x)| :$$

$\lim_{x\to a} f(x)$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} \lvert f(x)\rvert$	$\lvert\ell\rvert$	$+\infty$	$+\infty$

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} :$$

$\lim_{x\to a} g(x)$	$\ell' \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)}$	$\dfrac{1}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-

$$\lim_{x \to a} (f(x)g(x)) :$$

$\lim_{x\to a} g(x)$ \ $\lim_{x\to a} f(x)$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' > 0$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' < 0$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell' = 0$	0	0	0	F.I.	F.I.
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} :$$

$\lim_{x\to a} g(x)$ \ $\lim_{x\to a} f(x)$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' > 0$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' < 0$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$-\infty$	$+\infty$
0^+	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$
0^-	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0^+	0^-	0	F.I.	F.I.
$-\infty$	0^-	0^+	0	F.I.	F.I.

Tous ces résultats sont vrais si on remplace a par a^+ ou par a^-.

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Si une seule de ces fonction tend vers $\pm\infty$ en a et les autres admettent une limite finie, la combinaison linéaire tend vers $\pm\infty$ (selon le signe de son coefficient multiplicateur, si celui-ci est non nul bien sûr) en a.

⚠ Si plusieurs de ces fonctions tendent vers $\pm\infty$, on ne peut rien conclure en général. C'est une forme indéterminée. Pour s'en sortir, on factorise par le terme « le plus gros ».

On peut reprendre les mêmes exemples en remplaçant n par $-x$ pour une limite en $+\infty$ ou n par $\dfrac{1}{|x-a|}$ pour limite en a.

La technique de factorisation par le plus gros sera bien approfondie dans le chapitre 26.

Proposition (combinaisons linéaires). *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient $f_1, f_2, \ldots, f_p$ des fonctions qui admettent des limites réelles $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_p$ respectivement. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ des réels. Alors*

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \ell_k.$$

Autre résultat classique qui se démontre de façon analogue à sa version pour les suites :

Proposition. *Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$ et si g est bornée sur D, alors $f(x)g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.*

Remarques :

- Les limites à gauche et à droite étant des limites, tous les résultats de ce paragraphe s'appliquent en remplaçant a par a^+ ou a^- lorsque a est un réel.
- Nous renvoyons au chapitre 14 pour des exemples d'opérations dont la limite est une forme indéterminée. Pour lever les formes indéterminées, on emploie les mêmes techniques que dans le chapitre 14, à savoir :
  - ⋆ factoriser par le terme le plus gros quand il s'agit d'une somme, puis utiliser les croissances comparées ou le fait qu'un produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0 tend aussi vers 0.
  - ⋆ utiliser des taux d'accroissements (on en reparlera aussi dans le chapitre 19),
  - ⋆ utiliser la quantité conjuguée quand il y une somme ou différence de racines carrées.

  ⚠ Méfiance aussi avec les puissances dont l'exposant et la base varient : il faut avoir le réflexe de passer à la notation exponentielle.

2) Composition

a) Composition de deux fonctions

Soit E une partie de $\mathbb{R}$ qui est l'union d'intervalles non vides et non réduits à un point.

Théorème. *Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $u : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $u(E) \subset D$. Soit b un point adhérent à E. Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ et $u(t) \xrightarrow[t \to b]{} a$, alors $f \circ u(t) \xrightarrow[t \to b]{} \ell$.*

DÉMONSTRATION. Une première démonstration dans un cas particulier.

Supposons que $b = +\infty$, $a \in \mathbb{R}$ et $\ell = -\infty$.

On se donne $A < 0$ puisque la limite de $f \circ u$ est $-\infty$. On cherche $B > 0$ puisqu'on veut la limite en $+\infty$. Le δ n'est qu'un intermédiaire pour traduire le fait que f tend vers ℓ en $a \in \mathbb{R}$.

Une deuxième démonstration pour tous les cas avec la notion de voisinage.

Soit V_ℓ un voisinage de ℓ. Puisque $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$, il existe un voisinage V_a de a tel que, pour tout $x \in D \cap V_a$, $f(x) \in V_\ell$. Comme $u(t) \xrightarrow[t \to b]{} a$, il existe un voisinage V_b de b tel que, pour tout $t \in E \cap V_b$, $u(t) \in V_a$. Pour tout $t \in E \cap V_b$, on a aussi $u(t) \in D$ donc $u(t) \in D \cap V_a$ donc $f(u(t)) \in V_\ell$. On en déduit que $f(u(t)) \xrightarrow[t \to a]{} \ell$. $\square$

Remarque : Les limites à gauche et à droite étant des limites, tous les résultats de ce paragraphe s'appliquent aussi pour des limites à gauche ou ou à droite mais en étant très minutieux sur les domaines images. Par exemple, si $f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} \ell$ et $u(t) \xrightarrow[t\to b^-]{} a$, il faut bien vérifier que u est à valeurs dans $]a\,;+\infty[$ (du moins au voisinage de b) pour conclure que $f\circ u(t) \xrightarrow[t\to b^-]{} \ell$.

b) Composition d'une suite par une fonction

Montrons enfin l'un des seuls résultats admis du chapitre 14 :

Proposition. *Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_n \in D$ à partir d'un certain rang.*
Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Démonstration. Une première démonstration dans un cas particulier.
Supposons que $a \in D$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

Une deuxième démonstration pour tous les cas avec la notion de voisinage.
Soit V_ℓ un voisinage de ℓ. Puisque $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$, il existe un voisinage V_a de a tel que, pour tout $x \in D\cap V_a$, $f(x)\in V_\ell$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dont les éléments appartiennent à D à partir d'un certain rang et qui converge vers a, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in D\cap V_a$ et donc $f(u_n)\in V_\ell$. On en déduit que $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. $\square$

Exemples :

On a déjà vu cet exemple, mais il est tellement important...

- *Puisque la fonction $\ln$ est dérivable en 1, on a $\dfrac{\ln(x)}{x-1} \xrightarrow[x\to 1]{} \ln'(1) = 1$. Posons $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x-1}$. Comme $u_n = 1+\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, on obtient*
$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Autre preuve : comme $w_n = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a $f(w_n) = \cos(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. On a vu dans l'exercice 9 du chapitre 14 que la suite $(\cos(n))_{n\geqslant 1}$ n'admet pas de limite.

- *Montrons que la fonction $f : x \longmapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0 (ce que nous avons admis temporairement au paragraphe II.3).*

La réciproque de ce théorème est vraie :

Théorème (caractérisation séquentielle de la limite). *Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On a $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ si et seulement si, pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D admettant a pour limite, $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.*

Démonstration. Le sens direct est le théorème précédent.

Prendre **une** suite ne suffit pas. Considérons par exemple

$$f : x \mapsto \sin(2\pi x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f(n) = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Mais conclure que f tend vers 0 en $+\infty$ est une erreur grave. En effet, si c'était le cas, puisque $n + \frac{\pi}{4} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, on aurait $1 = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = f\left(n + \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, ce qui est absurde.

Remarque : Par exemple, pour montrer que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, il suffit de prouver que $f(u_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$, et c'est parfois plus facile car on a des résultats intéressants pour les suites.

IV Théorèmes d'existence de limites

Dans tout ce paragraphe, a désigne un point adhérent à D.

1) Théorèmes d'encadrement, de minoration et de majoration

a) Théorème d'encadrement

Théorème (d'encadrement). *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Supposons que*

- *Pour tout $x \in D$, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$.*
- *$g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ et $h(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.*

Alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ et $h(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$,

- il existe un voisinage V_a de a tel que, pour tout $x \in D \cap V_a$, $|h(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ donc $h(x) \leqslant \ell + \varepsilon$.
- il existe un voisinage V_a' de a tel que, pour tout $x \in D \cap V_a'$, $|g(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ donc $\ell - \varepsilon \leqslant g(x)$.

L'intersection $V = V_a \cap V_a'$ est encore un voisinage de a et, pour tout $x \in D \cap V_a$,

$$\ell - \varepsilon \leqslant g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \leqslant \ell + \varepsilon$$

si bien que $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$. Ainsi $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$. □

Corollaire. *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Soit a un point adhérent à D. Supposons que $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.*

1. *Si, pour tout $x \in D$, $|f(x) - \ell| \leqslant g(x)$, alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.*
2. *Si, pour tout $x \in D$, $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.*

Rappelons que cela signifie qu'il existe un voisinage V_a de a tel qu'elles sont vraies sur $D \cap V_a$.

Remarque : Les deux derniers résultats, et le suivant d'ailleurs, sont encore vrais si les inégalités n'ont lieu qu'au voisinage de a.

b) Théorèmes de minoration et de majoration

Théorème (minoration/majoration). *Supposons que, pour tout $x \in D$, $f(x) \leqslant g(x)$.*

- ***Minoration.*** *Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$, alors $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.*
- ***Majoration.*** *Si $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$, alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$.*

si $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$, on ne peut rien dire sur la limite éventuelle de f en a.

Démonstration. Supposons que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$ en a. Soit $A > 0$. Il existe un voisinage V_a de a tel que, pour tout $x \in D \cap V_a$, $f(x) \geqslant A$ et donc $g(x) \geqslant A$. Par conséquent $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$. L'autre point est analogue. □

2) Le théorème de la limite monotone

Définition. *Soit A une partie non vide de D.*

- *Si f est majorée sur A, alors la borne supérieure de la partie $f(A) = \{f(x) \,|\, x \in A\}$ est notée $\sup\limits_{x \in A} f(x)$ ou $\sup\limits_{A} f$.*
- *Si f est minorée sur A, alors la borne inférieure de le partie $f(A) = \{f(x) \,|\, x \in A\}$ est notée $\inf\limits_{x \in A} f(x)$ ou $\inf\limits_{A} f$.*

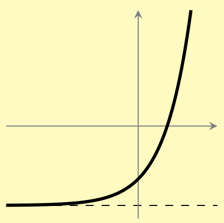
La borne supérieure (respectivement inférieure) existe bien puisque $f(A)$ est non vide et majorée (respectivement minorée) par hypothèse.

Soient $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tels que $a < b$.

Théorème (de la limite monotone – cas croissant). *Supposons que f une fonction croissante sur $]a\,;b[$.*

1. *Si f est majorée sur $]a\,;b[$, alors f admet une limite finie en b^- et cette limite est $\sup\limits_{]a\,;b[} f$. Sinon $f(x) \xrightarrow[x \to b^-]{} +\infty$.*
2. *Si f est minorée sur $]a\,;b[$, alors f admet une limite finie en a^+ et cette limite est $\inf\limits_{]a\,;b[} f$. Sinon $f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} -\infty$.*
3. *Pour tout $c \in]a\,;b[$, f admet une limite finie à gauche et une limite finie à droite en c. De plus*
$$\lim_{x \to c^-} f(x) \leqslant f(c) \leqslant \lim_{x \to c^+} f(x).$$

Vous avez bien lu : une fonction croissante minorée admet une limite en la borne inférieure. Voici le graphe d'une fonction croissante minorée. Faites une rotation de 180 degrés à la page :



Elle est croissante majorée maintenant :

Théorème (de la limite monotone – cas décroissant). *Supposons que f une fonction décroissante sur $]a\,;b[$.*

1. *Si f est minorée sur $]a\,;b[$, alors f admet une limite finie en b^- et cette limite est $\inf\limits_{]a\,;b[} f$. Sinon $f(x) \xrightarrow[x \to b^-]{} -\infty$.*
2. *Si f est majorée sur $]a\,;b[$, alors f admet une limite finie en a^+ et cette limite est $\sup\limits_{]a\,;b[} f$. Sinon $f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} +\infty$.*
3. *Pour tout $c \in]a\,;b[$, f admet une limite finie à gauche et une limite finie à droite en c. De plus*
$$\lim_{x \to c^-} f(x) \geqslant f(c) \geqslant \lim_{x \to c^+} f(x).$$

Encore plus simplement : si f est décroissante, il suffit d'appliquer le théorème de la limite monotone version croissante à la fonction croissante $-f$.

Démonstration. Nous ne démontrons que le cas où f est une fonction croissante sur $[a\,;b]$ (le cas décroissant se démontre de façon analogue).

1. Supposons que f est majorée sur $I =]a\,;b[$ et notons ℓ la borne supérieure de $f(]a\,;b[)$. Donnons-nous $\varepsilon > 0$. Par caractérisation de ℓ, il existe $y \in]a\,;b[$ tel que $\ell - \varepsilon \leqslant f(y)$. Si $x \in [y\,;b[$ alors, par croissance de f,
$$\ell - \varepsilon \leqslant f(y) \leqslant f(x) \leqslant \ell \leqslant \ell + \varepsilon.$$

D'où $|f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$.

- Si $b=+\infty$, on pose $B=y$ et on a, pour tout $x \in I \cap [B\,;+\infty[\,=\, [y\,;b[$, $|f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$. Ainsi $f(x) \xrightarrow[x \to b^-]{} \ell$.
- Si $b \in \mathbb{R}$, on pose $\delta = b-y>0$ et on a, pour tout $x \in I \cap [b-\delta\,;b[\,=\, [y\,;b[$, $|f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$. Ainsi $f(x) \xrightarrow[x \to b^-]{} \ell$.

Supposons que f ne soit pas majorée sur $]a\,;b[$. Pour tout $A>0$, il existe alors $y \in \,]a\,;b[$ tel que $f(y)>A$. Si $x \in [y\,;b[$ alors, par croissance de f, on a $f(x)>A$. Comme précédemment, on conclut alors que f admet pour limite $+\infty$ en b.

> Le cas de la limite en a^- peut aussi se montrer à partir du cas du premier point en exploitant l'argument de rotation à 180 degrés ci-dessus : si f est minorée, la fonction
> $$g : x \longmapsto -f(a+b-x)$$
> est croissante et majorée sur $]a\,;b[$ donc admet une limite finie en b^- et, comme $a+b-x \xrightarrow[x \to a^+]{} b^-$, la fonction $x \longmapsto -g(a+b-x)$ admet une limite finie en a^+. Cette fonction est f. Si f n'est pas minorée, g est croissante non majorée donc tend vers $+\infty$ en b^- et donc f tend vers $-\infty$ en a^+.

2. Le cas de la limite en a^+ est analogue et laissé en exercice.
3. Si $c \in \,]a\,;b[$, alors f est croissante et majorée par $f(c)$ sur l'intervalle $]a\,;c[$. Ainsi f admet une limite à gauche en c qui est majorée par $f(c)$. De plus f est croissante et minorée par $f(c)$ sur l'intervalle $]c\,;b[$. Ainsi f admet une limite à droite en c qui est minorée par $f(c)$. D'où l'inégalité annoncée. Le cas d'égalité découle des liens entre limites et limites à gauche et droite. $\square$

Remarques :

- Ainsi toute fonction monotone sur $]a\,;b[$ admet des limites (éventuellement infinies) en a^+ et b^-. De plus elle admet une limite à gauche finie et à droite finies finie en tout point intérieur.
- Si f est définie et croissante sur le segment $[a\,;b]$ (avec a et b des réels donc), nous pouvons appliquer le théorème sur $]a\,;b[$: f admet une limite à gauche en b et une limite à droite en a. Ces limite sont finies car f est définie en a et b donc f est majorée par $f(b)$ et minorée par $f(a)$. Même remarque si f est décroissante.
- Il découle du théorème de la limite monotone que :
  - ⋆ l'une des deux situations suivantes de tableau de variations permet de conclure que M est la borne supérieure de f sur $]a\,;b[$ mais n'est pas le maximum.

x	a		b
f		$\nearrow$	M

x	a		b
f	M	$\searrow$	

> Cela a été admis dans le chapitre 4.

  - ⋆ l'une des deux situations suivantes de tableau de variations permet de conclure que m est la borne inférieure de f sur $]a\,;b[$ mais n'est pas le minimum.

x	a		b
f	m	$\nearrow$	

x	a		b
f		$\searrow$	m

V Continuité

1) Définitions

a) Continuité en un point

> La continuité de f en un point est une notion locale : seul compte le comportement de f au voisinage de ce point.

On a vu que, si f admet une limite finie ℓ en $a \in D$, alors $\ell = f(a)$. Cela motive la définition suivante :

Définition (continuité en un point). *Soit $a \in D$. On dit que f est continue en a si f admet une limite finie en a. Cette limite étant alors nécessairement $f(a)$, f est continue en a si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$. Avec des quantificateurs, f est continue en a si :*

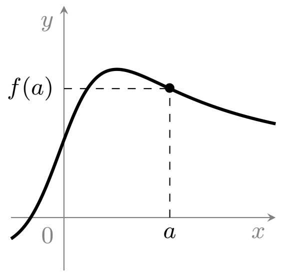
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in D, \quad |x-a| \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

Dans le cas contraire, on dit que f est discontinue en a ou que a est un point de discontinuité de f.

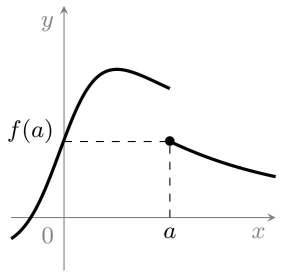
⚠ La notion de continuité en a n'est pas définie lorsque $a \notin D$... et encore moins lorsque $a = \pm\infty$.

Remarques :

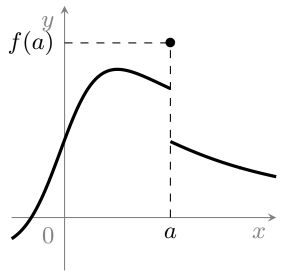
- Illustrons cette définition :



fonction continue en a



fonction discontinue en a



fonction discontinue en a

- Puisque la notion de continuité est une notion de limite, les propriétés d'ordre sur les limites vues dans le paragraphe II permettent de montrer que :
  - ⋆ Si f est continue en $a \in D$, alors f est bornée au voisinage de a.
  - ⋆ Si $f(a) > 0$ et f est continue en a, alors f est strictement positive au voisinage de a.
  - ⋆ Si $f(a) = 1$, alors, au voisinage de a, f est à valeurs dans $\left]\dfrac{1}{2}\,;2\right[$.
  - ⋆ Si $f(a) \neq 0$, alors f ne s'annule pas au voisinage de a.

b) Continuité à gauche, à droite

Définition (continuité à gauche). *Soit $a \in D$. On dit que f est continue à gauche en a si f admet $f(a)$ pour limite à gauche en a, c'est-à-dire si $f(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} f(a)$. Avec des quantificateurs :*

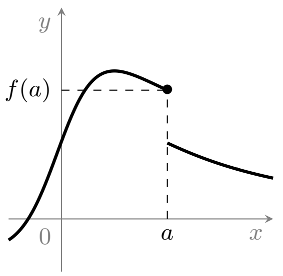
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in D, \quad a - \delta \leqslant x \leqslant a \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

Autrement dit, f est continue à gauche si $f|_{D \cap]-\infty\,;a]}$ est continue sur $D \cap \left]-\infty\,;a\right]$. Elle est continue à droite en a si $f|_{D \cap [a\,;+\infty[}$ est continue sur $D \cap [a\,;+\infty[$.

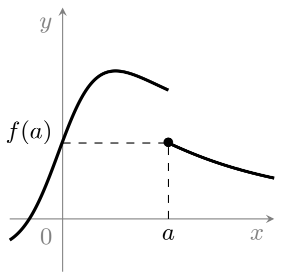
Définition (continuité à droite). *Soit $a \in D$. On dit que f est continue à droite en a si f admet $f(a)$ pour limite à droite en a, c'est-à-dire si $f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} f(a)$. Avec des quantificateurs :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in D, \quad a \leqslant x \leqslant a + \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

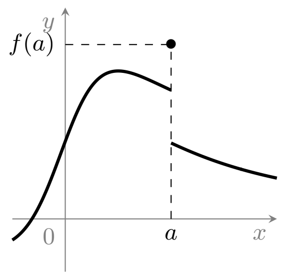
Remarque : Illustrons ces définitions :



fonction continue à gauche en a mais pas à droite



fonction continue à droite en a mais pas à gauche



fonction discontinue en a à gauche comme à droite

La proposition suivante est une conséquence de la proposition faisant le lien entre limites et limites à gauche/droite :

Encore une fois, la limite est obligatoirement $f(a)$.

Proposition. *Soit $a \in D$. La fonction f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche et à droite en a.*

c) Continuité sur un domaine de $\mathbb{R}$

On peut dire aussi que f est de classe $\mathscr{C}^0$ sur A.

Définition. *Soit A une partie de D. On dit que f est continue sur A si f est continue en tout point de A. On note $\mathscr{C}^0(A, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur A.*

Remarques :

- Si f est continue sur D, alors elle est continue sur toute partie A de D.
- La réciproque est-elle vraie ? Puisque la continuité est une notion locale, si f est continue sur des parties de D, alors f est encore continue sur leur union.

  Ne pas confondre « f est continue sur A » et « $f\big|_A$ est continue sur A ». Cette confusion arrive souvent quand on étudie des fonctions définies « par cas ».

  Moralité : il faut faire attention aux points de recollement.

Autrement dit la continuité passe à l'union.

Les fonctions f et $f\big|_A$ ne sont pas définies sur le même domaine donc, même si on regarde la limite en $a \in A$, dans la définition des limites, on considère les points de D au voisinage de a pour f mais seulement les points de A au voisinage de a pour $f\big|_A$.

Montrons enfin un des seuls résultats admis de la partie C du chapitre 4 :

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \longmapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $f_n : x \longmapsto x^n$. Raisonnons par récurrence.

- Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\delta = \varepsilon$. Pour tout $x \in [a - \delta\,; a + \delta]$, $|x - a| \leqslant \delta = \varepsilon$. Ainsi $x \xrightarrow[x \to a]{} a$. Autrement dit $f_1 : x \longmapsto x$ est continue en a. On en déduit que f_1 est continue sur $\mathbb{R}$. La propriété est vraie au rang 1.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f_n est continue sur $\mathbb{R}$. Comme f_1 est aussi continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $f_{n+1} = f_n f_1$ est continue sur $\mathbb{R}$ par produit. Ainsi la propriété est vraie au rang $n + 1$.

D'où la proposition par récurrence. $\square$

2) Prolongement par continuité

On ne peut prolonger (par continuité) une fonction en un point que si elle n'est pas déjà définie.

Proposition. *Soit a un point adhérent à D qui n'appartient pas à D. Supposons que f admette une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a. Posons*

$$\widetilde{f} \;:\; \begin{array}{rcl} D \cup \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D, \\ \ell & \text{si } x = a. \end{cases} \end{array}$$

Alors $\widetilde{f}$ est continue en a. On l'appelle prolongement par continuité de f en a et on choisit en général de l'appeler toujours f au lieu de $\widetilde{f}$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un voisinage V_a de a tel que, pour tout $x \in D \cap V_a$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$. Puisque $\widetilde{f}$ et f coïncident sur D et puisque $\widetilde{f}(a) = f(a)$, on obtient que, pour tout $x \in D \cap V_a$, $|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(a)| \leqslant \varepsilon$. On a bien sur $|\widetilde{f}(a) - \widetilde{f}(a)| = 0 \leqslant \varepsilon$ si bien que :

$$\forall x \in (D \cup \{a\}) \cap V_a, \qquad |\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(a)| \leqslant \varepsilon.$$

Par conséquent $\widetilde{f}$ est continue en a. □

Exemple : *Introduisons la fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto x\ \ln(|x|)$. Elle est définie sur $\mathbb{R}^*$. Par croissances comparées, on a*

$$x\ \ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0.$$

Par imparité de f,

$$x\ \ln(|x|) = -|x|\ln(|x|) \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0.$$

Ainsi on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

3) Opération sur les fonctions continues

a) Opérations algébriques

Les résultats suivants découlent des opérations sur les limites puisque la continuité de f en a signifie que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$.

Les résultats précédents étant encore valables en remplaçant a par a^+ ou par a^-, les deux propositions ci-contre sont encore valables en remplaçant « continues » par « continues à droite (respectivement à gauche) ». Attention, ce n'est plus vrai pour une composée (cf. paragraphe II.1.b).

Proposition. *Soit $a \in D$. Supposons que f et g sont continues en $a \in D$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions $|f|$, λf, $f + g$ et fg sont continues en a. De plus, si $g(a) \neq 0$, alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues en a.*

Remarque : Lorsque $g(a) \neq 0$, g ne s'annule pas au voisinage de a donc, dans la proposition ci-dessus, $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont bien définies au voisinage de a.

Corollaire. *Supposons que f et g sont continues sur D. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions $|f|$, λf, $f + g$ et fg sont continues sur D. De plus, si g ne s'annule pas sur D, alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur D.*

Remarque : Ces théorèmes donnent des conditions **suffisantes** de continuité mais non nécessaires : si f et g sont continues, ils disent que $f + g$, fg et f/g sont continues mais ils ne disent pas ce qui se passe si f ou g n'est pas continue. Dit autrement, il se peut tout à fait que $f + g$ ou fg ou f/g soient continues alors que f ou g ne l'est pas (par exemple, si f n'est pas continue, alors $f - f = 0$ l'est).

b) Composition de fonctions

Soit E une partie de $\mathbb{R}$ qui est l'union d'intervalles non vides et non réduits à un point.

Proposition. *Soit $u : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $u(E) \subset D$. Soit $b \in E$. Si u est continue en b et si f est continue en $a = u(b)$, alors $f \circ u$ est continue en b.*

Corollaire. *Avec les hypothèses de la proposition précédente, si u est continue sur E et f continue sur D, alors $f \circ u$ est continue sur E.*

Remarques :

- Même problème que précédemment : si u ou f ne sont pas continues, on ne peut pas conclure que $f \circ u$ ne l'est pas.

- Attention, une composée de fonctions continues à droite (respectivement à gauche) n'est pas forcément continue à droite (respectivement à gauche), alors qu'une somme, un produit etc. de fonctions continues à droite (respectivement à gauche) est continue à droite (respectivement à gauche). La raison est qu'une fonction décroissante « change la droite en gauche » : plus précisément, si u est décroissante, alors $u(x) \xrightarrow[x\to b^+]{} u(b)^-$ (u transforme les valeurs supérieures à b en valeurs inférieures à $u(b)$) et si f est continue à droite en $u(a)$, on n'a pas forcément $f\circ u(x) \xrightarrow[x\to b^+]{} f\circ u(b)$.

  Par exemple, notons $f : x \longmapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$. On a $y = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 1^+]{} 1^-$ et $\lfloor y \rfloor \xrightarrow[y\to 1^-]{} 0$, si bien que, par composition, $f(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} 0 \neq f(1)$: f n'est pas continue à droite en 1, alors que f est composée de deux fonctions continues à droite (la fonction inverse et la partie entière) sur leur ensemble de définition.

c) Composition d'une suite par une fonction

Il découle du théorème de limite d'une composition d'une suite par une fonction (cf. paragraphe III.2.b) que :

Ce résultat est très important comme on l'a vu dans le chapitre 14 avec les points fixes. Attention la continuité est indispensable : $1-\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ mais $\left\lfloor 1-\frac{1}{n}\right\rfloor = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $0 \neq \lfloor 1 \rfloor$.

Théorème. *Soit $a \in D$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont les termes appartiennent à D à partir d'un certain rang. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et si f est continue en a, alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.*

La réciproque de ce théorème est vraie là aussi :

Théorème (caractérisation de la continuité). *Soit $a \in D$. La fonction f est continue en a si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D admettant a pour limite, $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.*

Exemple : *Déterminons toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont continues sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y) = f(x)+f(y).$$

Raisonnons par analyse-synthèse.

Plus généralement, retenons le principe suivant : si f et g sont deux fonctions qui coïncident sur une partie dense de $\mathbb{R}$, alors ce sont deux fonctions égales.

VI Le théorème des valeurs intermédiaires

1) Première version du TVI

On n'a pas forcément $f(a) \leqslant f(b)$. La notation $m \in [f(a)\,;f(b)]$ est à prendre au sens de : « m est compris au sens large entre $f(a)$ et $f(b)$ ». Cela évite de faire plusieurs cas. Cependant, si on sait que $f(a) > f(b)$, on écrira naturellement $[f(b)\,;f(a)]$ (cf. I.4.c).

Théorème (des valeurs intermédiaires (TVI)). *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f continue sur $[a\,;b]$. Soit $m \in [f(a)\,;f(b)]$. Alors il existe $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) = m$.*

Démonstration. Proposons deux démonstrations. Une première utilisant la méthode de dichotomie et une autre, plus abstraite, utilisant la propriété de la borne supérieure (à l'image de l'exemple du paragraphe I.2 du chapitre 13 et du paragraphe V.1 du chapitre 14 pour l'existence de la racine carrée d'un réel positif).

Méthode 1 (par dichotomie). Si $f(a) = f(b)$, alors $c = a$ convient. Supposons à présent $f(a) < f(b)$ (le cas $f(a) > f(b)$ se traite de façon tout à fait analogue : on précise ci-contre les changements à effectuer).

Nous allons pour cela utiliser l'algorithme de dichotomie. Le principe est très simple : à chaque étape, on dispose d'un intervalle qu'on coupe en deux (d'où le nom dichotomie, qui signifie : couper en deux) et on garde l'un des deux intervalles, que l'on notera $[a_n\,;b_n]$, sur lequel il y a une solution (ou, ici, puisque l'on cherche à prouver l'existence d'une solution, on garde un intervalle sur lequel les conditions du théorème, $f(a_n) \leqslant m \leqslant f(b_n)$, sont vérifiées). Voir le dessin ci-dessous.

Si $f(a) > f(b)$, au lieu de remplacer f par $-f$, on peut simplement modifier les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$: on pose

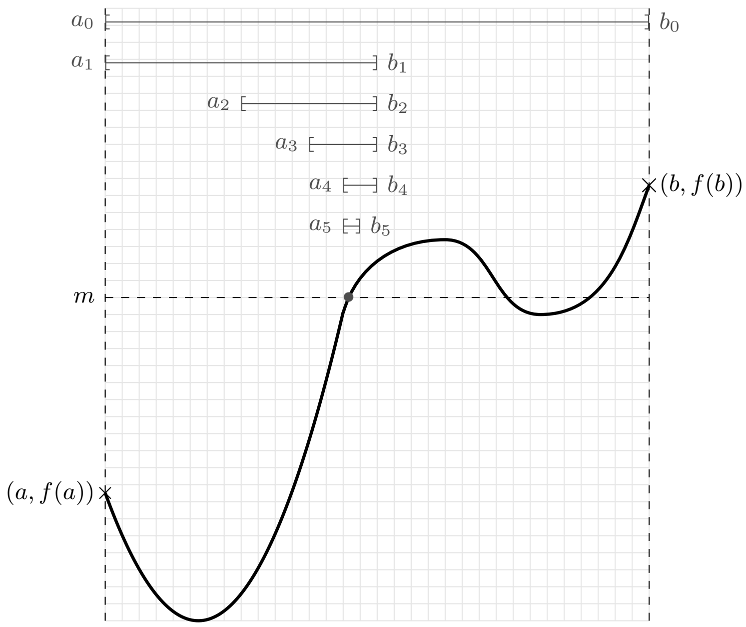
$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right)$

si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \leqslant m$ et

$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right)$

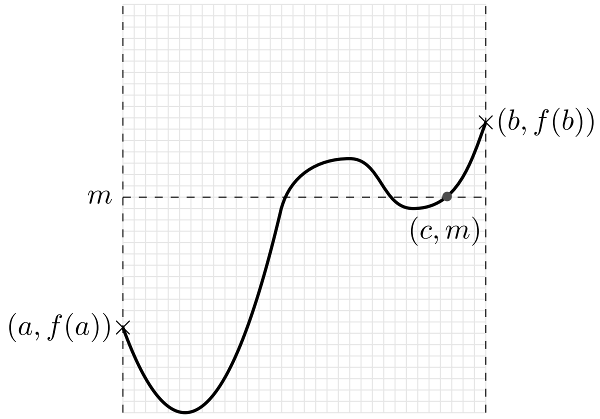
si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) > m$. Le reste de la preuve est analogue, si ce n'est que $f(a_n) \geqslant m \geqslant f(b_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme on peut le voir sur le dessin ci-dessus, il n'y a pas forcément unicité de c ! Pour avoir l'unicité, il faut une hypothèse de stricte monotonie, cf. paragraphe I.4.a.



Cette deuxième preuve est plus courte mais moins satisfaisant : elle ne permet pas d'obtenir une valeur approchée d'un antécédent de m, contrairement à la méthode 1 (cf. paragraphe suivant).

Méthode 2 (avec la propriété de la borne supérieure). Si $f(a) = f(b)$, alors $c = a$ convient. Supposons à présent que $f(a) < f(b)$ (le cas $f(a) > f(b)$ se traite de façon analogue).



Le TVI prouve que, si la fonction est continue, elle prend toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$, mais on ne peut rien affirmer au sujet des valeurs qui ne sont pas comprises entre $f(a)$ et $f(b)$, et certainement pas qu'elles ne sont pas atteintes ! Si $f(a) > m$ et $f(b) > m$, on ne peut rien conclure, et surtout pas qu'il n'existe pas de $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) = m$! Par exemple, $\cos(0) = \cos(2\pi) = 1$, mais qui irait sérieusement dire que $\cos$ ne s'annule pas sur $[0\,;2\pi]$ d'après le TVI ?

□

Exemple : *Supposons que f est continue et ne s'annule pas sur I. Alors f garde un signe constant sur I. En effet :*

Énorme classique ! !

Remarque : En regardant de plus près la démonstration par dichotomie du TVI, on remarque que l'on construit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent vers une solution c de l'équation $f(x) = m$ d'inconnue $x \in [a\,;b]$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant c \leqslant b_n$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $b_n - a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $b_{n_0} - a_{n_0} \leqslant \varepsilon$ et alors

$$0 \leqslant c - a_{n_0} \leqslant b_{n_0} - a_{n_0} \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant b_{n_0} - c \leqslant b_{n_0} - a_{n_0} \leqslant \varepsilon,$$

i.e. a_{n_0} et b_{n_0} sont des approximations respectivement par défaut et pas excès, à ε près de c.

Dans le cas où $f(a) < m < f(b)$ (et en ayant au préalable implémenté en Python a, b, f, ε dans les variables `a`,`b`,`f`,`eps`), voici un script Python qui affiche a_{n_0} et b_{n_0} :

```python
while b-a>eps:
        c=(a+b)/2
        if f(c)>m:#Comme f(a)<m<f(c)
            b=c#f atteint m entre a et c
        else:
            a=c#Sinon f atteint m entre c et b
print('Une valeur par défaut est' + str(a))
print('Une valeur par excès est' + str(b))
```

2) Autres versions du TVI

Les résultats de cette section sont aussi appelés Théorème des Valeurs Intermédiaires. On pourra donc les utiliser sous ce nom, sans préciser quelle version (les versions ci-dessous sont des appellations toutes personnelles et nous servirons à indiquer la version que nous utiliserons).

Théorème (TVI – version 2). *Supposons que f est continue sur l'intervalle I. Notons*

$$M = \begin{cases} \sup\limits_{x\in I} f(x) & \text{si } f \text{ est majorée,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{et} \quad m = \begin{cases} \inf\limits_{x\in I} f(x) & \text{si } f \text{ est minorée,} \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors pour tout $t \in \left]m\,;M\right[$, il existe $c \in I$ tel que $f(c) = t$. Autrement dit, $\left]m\,;M\right[$ est inclus dans $f(I)$.

Nous avons supposé sans le dire que f n'est pas constante, sinon l'intervalle $\left]m\,;M\right[$ est vide.

DÉMONSTRATION.

□

Par exemple, on a $e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$. L'exponentielle est continue donc, d'après le TVI (version 1 bis), il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $e^c = 2$. Le réel c est même unique et est noté $\ln(2)$: cf. paragraphe I.4.b.

Ce théorème dit que toute valeur intermédiaire entre l'$\inf$ et le $\sup$ est atteinte lorsque la fonction est continue sur un intervalle quelconque. C'est vrai en particulier entre toute valeur intermédiaire entre les limites en les bornes (puisqu'une telle valeur se situe encore entre l'$\inf$ et le $\sup$ par passage à la limite dans une inégalité large). On obtient donc le TVI (version 1 bis) :

Théorème (TVI – version 1 bis). *Soit f une fonction continue sur $\left]a\,;b\right[$ et à valeurs réelles avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Si f admet des limites (finies ou infinies) en a et b alors, pour tout m comprise entre $\lim\limits_a f$ et $\lim\limits_b f$, il existe $c \in \left]a\,;b\right[$ tel que $f(c) = m$.*

C'est faux si le degré de P n'est pas impair, comme on le voit avec $P : x \longmapsto x^2+1$, qui n'a pas de racine.

Exemple : *Si P est une application polynomiale de degré impair, alors P admet au moins une racine. En effet :*

Théorème (TVI – version 3). *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle*

C'est-à-dire, si f est continue sur I, alors $f(I)$ est un intervalle.

DÉMONSTRATION.

□

Remarque : En regardant de plus près les démonstrations, on constate que :

- La version 1 du TVI entraîne la version 2. Elle-même entraîne la version 1 bis et la version 3.

- La version 1 bis entraîne aussi la version 1. En effet, il suffit de remarquer que, si f est continue en a et b, alors $f(a) = \lim_a f$ et $f(b) = \lim_b f$.
- La version 3 entraîne la version 1. En effet, comme $f([a;b])$ est un intervalle contenant $f(a)$ et $f(b)$ on a, par caractérisation des intervalles (cf. chapitre 13), $[f(a);f(b)] \subset f([a;b])$. Ainsi tout réel t compris entre $f(a)$ et $f(b)$ appartient à $f([a;b])$ et donc est atteint par un point c de $[a;b]$.

Ainsi toutes les version du TVI sont équivalentes et on les appelle simplement le TVI.

3) Apport de la stricte monotonie

a) Le corollaire du TVI

Quand on dispose d'une fonction continue strictement monotone, quand utiliser le corollaire du TVI et quand utiliser le théorème de la bijection ? C'est simple :
• Si on veut montrer qu'une fonction est une bijection ou si on veut montrer des propriétés sur f^{-1}, alors on utilise le théorème de la bijection.
• Si on veut prouver qu'une équation du type $f(x) = c$ admet une unique solution, alors les deux permettent de répondre....

Corollaire. *Avec les mêmes hypothèses que dans le TVI et en supposant de plus f strictement monotone, alors c est unique.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser le fait (cf. chapitres 4 et 15) qu'une fonction strictement monotone est injective. □

b) Le théorème de la bijection

Le théorème ci-dessous n'est pas appelé « théorème de la bijection » dans le programme mais c'est pourtant son nom usuel !

Théorème (de la bijection). *Supposons que f est continue et strictement monotone sur I. Alors f est une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$ et sa bijection réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$ de même monotonie que f.*

Démonstration. Tout a déjà été montré dans les chapitres chapitres 4 et 15 sauf la continuité de f^{-1} sur $f(I)$. Montrons-la dans le cas où f est strictement croissante sur I (le cas strictement décroissant est analogue). Soient $\varepsilon > 0$ et $s_0 \in f(I)$. Posons $x_0 = f^{-1}(s_0)$. Nous voulons montrer l'existence de $\delta > 0$ tel que

$$\forall s \in f(I) \cap [s_0 - \delta, s_0 + \delta], \qquad |f^{-1}(s) - f^{-1}(s_0)| \leqslant \varepsilon.$$

... Le théorème de la bijection donne beaucoup d'autres résultats, mais il permet également de répondre à ce genre de question.
On peut donc n'utiliser que le théorème de la bijection.

- Si x_0 n'est pas une éventuelle extrémité de I, alors il existe $\alpha > 0$ tel que l'intervalle $[x_0 - \alpha\,; x_0 + \alpha]$ est inclus dans I. Notons $\varepsilon' = \min(\varepsilon, \alpha)$. La croissance de f sur I nous garantit que, pour tout $s \in f(I)$,

$$\begin{aligned} |f^{-1}(s) - x_0| \leqslant \varepsilon' \quad &\iff \quad x_0 - \varepsilon' \leqslant f^{-1}(s) \leqslant x_0 + \varepsilon' \\ &\iff \quad f(x_0 - \varepsilon') \leqslant s \leqslant f(x_0 + \varepsilon'). \end{aligned}$$

  Le réel $\delta = \min\big(f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon'), f(x_0 + \varepsilon') - f(x_0)\big)$ est strictement positif puisque $\varepsilon' > 0$ et f est strictement croissante. Si $s \in [s_0 - \delta\,; s_0 + \delta]$, alors
  - ⋆ $s \geqslant s_0 - \delta \geqslant f(x_0) - (f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon')) = f(x_0 - \varepsilon')$.
  - ⋆ $s \leqslant s_0 + \delta \leqslant f(x_0) + f(x_0 + \varepsilon') - f(x_0) = f(x_0 + \varepsilon')$.

  Ainsi $f(x_0 - \varepsilon') \leqslant s \leqslant f(x_0 + \varepsilon')$ et donc $|f^{-1}(s) - x_0| \leqslant \varepsilon' \leqslant \varepsilon$. Cela prouve la continuité de f^{-1} en s_0.
- Si x_0 est une éventuelle extrémité de I, alors il existe $\alpha > 0$ tel que $]x_0 - \alpha\,; x_0[$ ou $]x_0\,; x_0 + \alpha[$ est inclus dans I. En adaptant la preuve précédente, nous montrons que f^{-1} est aussi continue en s_0. □

c) Comment obtenir $f(I)$?

Comme dit dans le paragraphe I.1, quand nous savons que $f(b)$ est inférieur à $f(a)$, nous écrivons évidemment $[f(b)\,;f(a)]$.

En pratique, plutôt que de s'embarrasser de 8 cas de figure que l'on risque de confondre le jour J, si on donne les hypothèses de continuité et de stricte monotonie, on peut se contenter de « lire » $f(I)$ sur le tableau de variations (et le théorème ci-contre nous autorise à le faire).

Proposition. *Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. Le tableau suivant donne $f(I)$ lorsque f est continue et strictement croissante sur l'intervalle I :*

I	$[a\,;b]$	$]a\,;b]$	$[a\,;b[$	$]a\,;b[$
$f(I)$	$[f(a)\,;f(b)]$	$\left]\lim\limits_a f\,;f(b)\right]$	$\left[f(a)\,;\lim\limits_b f\right[$	$\left]\lim\limits_a f\,;\lim\limits_b f\right[$

Dans le cas où f est strictement décroissante :

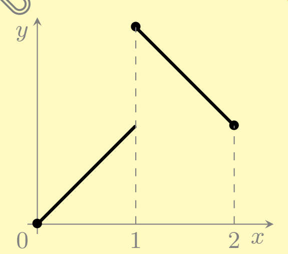
I	$[a\,;b]$	$]a\,;b]$	$[a\,;b[$	$]a\,;b[$
$f(I)$	$[f(b)\,;f(a)]$	$\left[f(b)\,;\lim\limits_a f\right[$	$\left]\lim\limits_b f\,;f(a)\right]$	$\left]\lim\limits_b f\,;\lim\limits_a f\right[$

En particulier l'intervalle $f(I)$ est du même type (ouvert, fermé ou semi-ouvert) que l'intervalle I.

Démonstration. Traitons par exemple le cas où f est croissante et $I =]a\,;b]$ (les autres cas se traitent de manière analogue).

□

d) « Réciproque » du théorème de la bijection



Une fonction strictement monotone est injective. Mais la réciproque est fausse.

Par exemple la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0\,;2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} x & \text{si } x \in [0\,;1[\\ 3-x & \text{si } x \in [1\,;2] \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est bijective non monotone.

Mais en ajoutant l'hypothèse de continuité, la réciproque est vraie :

Proposition. *Si f est continue et injective sur I, alors f est strictement monotone.*

Cette démonstration est non exigible conformément au programme. La version proposée est assez astucieuse mais très efficace.

Démonstration.

$\square$

4) Application à l'étude des suites implicites

Le théorème de la bijection et le fait que nous avons enfin démontré les théorèmes de limite d'une composée d'une suite par une fonction sont l'occasion de reparler de suites implicites. Nous en avons déjà vu en exercice et c'est le moment de voir quelques méthodes usuelles.

On aurait pu déjà parlé de théorie générale d'étude des suites implicites dans le chapitre 14(nous en avons vu des exemples en TD seulement) mais il y a avait déjà bien assez de choses comme ça. Ici c'est l'occasion parfaite pour en reparler plus en détail.

Rappelons qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite définie implicitement lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit u_n comme l'unique solution d'une certaine équation dépendant de n.

Par exemple, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n la plus grande solution de l'équation $x^{n+2} + x^{n+1} + x = 1$.

La première chose à faire quand on rencontre une telle suite (l'énoncé le demande) est de justifier que la suite est bien définie, c'est-à-dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation admet une unique solution u_n.

Voyons deux cas de figure où le théorème de la bijection est utile.

a) Le cas où $f(u_n) = n$

Cette démarche se généralise si $f(u_n) = a_n$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite que l'on connaît explicitement et qui tend vers $+\infty$.

Supposons qu'il existe une fonction f continue, strictement monotone sur I et telle que $\mathbb{N} \subset f(I)$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(u_n) = n.$$

La démarche est la suivante :

En l'absence d'unicité, la suite serait mal définie : quel antécédent de n, faudrait-il prendre ?

- On utilise le théorème de la bijection pour assurer que f réalise une bijection de I dans $f(I)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $n \in f(I)$, il existe un unique x tel que $f(x) = n$. Ce x dépend de n donc on le note u_n. Cela garantit que la suite est bien définie.
- On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f^{-1}(n)$.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a donc la même monotonie que la fonction f^{-1} et donc la même monotonie que la fonction f (d'après le théorème de la bijection).

C'est le théorème de la limite monotone qui assure cela puisque f n'est pas bornée (en effet $\mathbb{N} \subset f(I)$).

- Dans le cas où f est strictement croissante, en notant b l'extrémité droite (éventuellement infinie) de I, on a $f(x) \xrightarrow[x\to b]{} +\infty$ donc $f^{-1}(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} b$ et donc $u_n = f^{-1}(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$.

  Dans le cas où f est strictement décroissante, en notant a l'extrémité gauche (éventuellement infinie) de I, on a $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ donc $f^{-1}(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} a$ et donc $u_n = f^{-1}(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

Exemple : *On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n l'unique réel de $]0\,;1]$ tel que $u_n - \ln(u_n) = n+1$. Montrons que la suite est bien définie et étudions ses variations et sa limite éventuelle.*

Plus généralement, si on a $f_n(u_n) = c_n$ (avec c_n un réel), alors on raisonne avec les antécédents de c_n ou bien on peut se ramener à $f_n(u_n) = 0$ en remplaçant f_n par $f_n - c_n$.

b) Le cas où $f_n(u_n) = 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on se donne une fonction f_n continue et strictement monotone sur un intervalle I_n tel que $0 \in f_n(I_n)$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f_n(u_n) = 0.$$

La première chose à faire est d'essayer de réécrire le problème sous la forme $g(u_n) = n$ avec g une fonction qui ne dépend pas de n. Dans ce cas, on procède comme dans la paragraphe précédent. Si ce n'est pas possible, la démarche est la suivante :

En l'absence d'unicité, la suite serait mal définie : quel antécédent de 0, faudrait-il prendre ?

- On se donne $n \in \mathbb{N}$. On utilise le théorème de la bijection pour assurer que f_n réalise une bijection de I_n dans $f_n(I_n)$. Ainsi, comme $0 \in f_n(I_n)$, il existe un unique x tel que $f_n(x) = 0$. Ce x dépend de n donc on le note u_n. Cela garantit que la suite est bien définie.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on étudie le signe de $f_{n+1}(u_n)$. Pour cela, on peut bien sûr étudier le signe de la fonction f_{n+1} de façon générale ou encore le signe de $x \longmapsto f_{n+1}(x) - f_n(x)$ (en effet $f_n(u_n) = 0$).
  - ⋆ Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(u_n) \geqslant 0$. On a alors $f_{n+1}(u_n) \geqslant f_{n+1}(u_{n+1})$. Si f_{n+1} est strictement croissante (resp. décroissante) pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $u_n \geqslant u_{n+1}$ (resp. $u_n \leqslant u_{n+1}$) pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (resp. croissante).
  - ⋆ Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(u_n) \leqslant 0$. On a alors $f_{n+1}(u_n) \leqslant f_{n+1}(u_{n+1})$. Si f_{n+1} est strictement croissante (resp. décroissante) pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $u_n \leqslant u_{n+1}$ (resp. $u_n \geqslant u_{n+1}$) pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante).
  - ⋆ Pour la limite de la suite, la monotonie assure son existence (finie ou infinie selon que la suite est bornée ou pas). Comme pour les suites « du type

Bien garder en tête que $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$. C'est la seule chose que l'on sait !

$u_{n+1} = f(u_n)$ » (étudiées dans le chapitre 14), on peut éventuellement raisonner par l'absurde pour montrer que la suite est non majorée/minorée. Le passage à la limite dans la relation $f_{n+1}(u_n) = 0$ permet souvent de trouver la limite. Laissez-vous guider sinon.

Exemple : *On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n la plus grande solution de l'équation $x^{n+2} + x^{n+1} + x = 1$. Montrons que la suite est bien définie et étudions ses variations et sa limite éventuelle.*

Ici f_n est la fonction $x \mapsto x^{n+2} + x^{n+1} + x$. En revanche il n'y a pas unicité de l'antécédent de 0 mais, pour pallier ce problème, on considère la plus grande des solutions. Il faut donc identifier un intervalle du type $[a\,;+\infty[$ sur lequel 0 admet un unique antécédent par f_n. Ce sera forcément le plus grand.

VII Le théorème des bornes atteintes

Définition. *On dit qu'une fonction bornée $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ atteint ses bornes si il existe $s \in I$ et $t \in I$ tels que*

$$f(s) = \inf_{x\in I} f(x) = \min_{x\in I} f(x) \qquad \textit{et} \qquad f(t) = \sup_{x\in I} f(x) = \max_{x\in I} f(x).$$

Autrement dit si la partie $f(I)$ admet un maximum et un minimum.

Théorème (des bornes atteintes). *Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.*

Démonstration.

On montre de même que f est minorée sur $[a\,;b]$ et atteint sa borne supérieure. $\square$

On en déduit :

Théorème. *L'image d'un segment par une fonction continue à valeurs réelles est un segment. Plus précisément, si $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, avec $a < b$, alors*

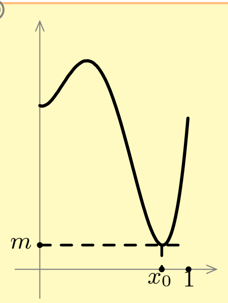
$$m = \min_{x\in[a\,;b]} f(x) \qquad \text{et} \qquad M = \max_{x\in[a\,;b]} f(x)$$

existent et on a $f([a\,;b]) = [m, M]$.

On sait que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. On vient de voir que, si c'est un segment, son image aussi. Mais, dans les autres cas, on ne peut pas conclure qu'un intervalle et son image ont la même nature (caractère ouvert/fermé/semi-ouvert/borné). Par exemple la fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$ (intervalle ouvert non borné) mais $\cos(\mathbb{R}) = [-1\,;1]$ (intervalle fermé borné).

Démonstration. Puisque f est continue sur $[a\,;b]$, le théorème des bornes atteintes nous assure que m et M existent et que $m \in f([a\,;b])$ et $M \in f([a\,;b])$. Le TVI (version 2) nous assure aussi que $]m\,;M[\subset f([a\,;b])$. Ainsi $[m, M] \subset f([a\,;b])$. Réciproquement, par définition de m et M, on a $f([a\,;b]) \subset [m, M]$ donc $f([a\,;b]) = [m, M]$. $\square$

Exemple : *Montrons que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x\ln(x)}{1+x^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$. On pourrait bien sûr étudier ses variations mais cela peut s'avérer technique. Utilisons plutôt le théorème précédent.*



Exemple : *Soit f continue strictement positive sur $[0\,;1]$. Alors il existe $m > 0$ tel que, pour tout $x \in [0\,;1]$, $f(x) \geqslant m$ (voir le dessin ci-contre). En effet :*

Attention, le résultat est faux si on ne se place pas sur un segment. En effet, « être minorée par une constante strictement positive » est une condition beaucoup plus forte que « être strictement positive ». En effet, une fonction strictement positive peut parfois être aussi proche que l'on veut de 0, tandis que si on minore une fonction par une constante strictement positive, il y a une espèce de « cylindre de sécurité » (voir le dessin ci-contre) entre la fonction et 0. Par exemple, la fonction inverse est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ mais n'est minorée par aucune constante strictement positive (vous pouvez vous en convaincre en traçant le graphe de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$). D'où l'importance de se placer sur un segment !

VIII Extension aux fonctions à valeurs complexes

Les fonctions restent définies sur un domaine de $\mathbb{R}$. Les notions de limites et de continuité de fonctions de la variable complexe sont hors-programme.

Dans ce paragraphe, on se donne f une fonction définie sur D et à valeurs complexes. Soit a un point adhérent à D.

1) Limite d'une fonction à valeurs complexes

On définit la limite finie d'une fonction à valeurs complexes comme dans le cas réel, à ceci près qu'on utilise le module et non plus la valeur absolue. Plus précisément :

Définition. *Soit $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que f admet ℓ pour limite (ou tend vers ℓ) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V_a de a tel que, pour tout $x \in D \cap V_a$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$. Autrement dit si,*

- *lorsque $a \in D$:* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D,\ |x - a| \leqslant \delta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$
- *lorsque $a = +\infty$:* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in D,\ x \geqslant B \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$
- *lorsque $a = -\infty$:* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists B < 0,\ \forall x \in D,\ x \leqslant B \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$

On note encore $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{a} f = \ell$.

$|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ signifie que $f(x)$ se trouve dans le disque (fermé) de centre ℓ et de rayon ε.

Mais par « distance » ici, on parle de celle qui est définie par le module et non pas par la valeur absolue.

Remarque :

- En d'autres termes, quelle que soit la précision voulue, notée ε, la distance entre $f(x)$ et ℓ devient plus petite que ε dès que x est suffisamment proche de a.
- Lorsque a est un réel, on définit aussi les notions de limites finies (complexes) à gauche et à droite en a.

Dans la pratique, on peut se ramener facilement à des fonctions à valeurs réelles grâce au résultat suivant :

En d'autres termes, pour étudier la limite d'une fonction à valeurs complexes, il suffit d'étudier deux fonctions à valeurs réelles. Cela permet de montrer pour les fonctions à valeurs complexes des résultats vrais jusque là pour des fonctions à valeurs réelles sans passer par le module.

Théorème. *Soit $\ell \in \mathbb{C}$. On a :*

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \qquad \iff \qquad \mathrm{Re}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \mathrm{Re}(\ell) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \mathrm{Im}(\ell).$$

Démonstration. Supposons que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors un voisinage V_a de a tel que, pour tout $x \in D \cap V_a$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, pour tout $x \in D \cap V_a$

$$|\,\mathrm{Re}(f(x)) - \mathrm{Re}(\ell)| = |\,\mathrm{Re}(f(x) - \ell)| \leqslant |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

et

$$|\,\mathrm{Im}(f(x)) - \mathrm{Im}(\ell)| = |\,\mathrm{Im}(f(x) - \ell)| \leqslant |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit que $\mathrm{Re}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \mathrm{Im}(\ell)$.

Réciproquement, supposons que $\mathrm{Re}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \mathrm{Im}(\ell)$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors :

- il existe un voisinage V_a de a tel que, pour tout $x \in D \cap V_a$, $|\,\mathrm{Re}(f(x)) - \mathrm{Re}(\ell)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
- il existe un voisinage V_a' de a tel que, pour tout $x \in D \cap V_a'$, $|\,\mathrm{Im}(f(x)) - \mathrm{Im}(\ell)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Notons $V = V_a \cap V'_a$, qui est encore un voisinage de a. Pour tout $x \in D \cap V$, on a alors

$$\begin{aligned}|f(x) - \ell| &= |\operatorname{Re}(f(x)) + \mathrm{i}\operatorname{Im}(f(x)) - \operatorname{Re}(\ell) - \mathrm{i}\operatorname{Im}(\ell)| \\ &= |(\operatorname{Re}(f(x)) - \operatorname{Re}(\ell) + \mathrm{i}(\operatorname{Im}(f(x)) - \operatorname{Im}(\ell))| \\ &\leqslant |(\operatorname{Re}(f(x)) - \operatorname{Re}(\ell)| + |\operatorname{Im}(f(x)) - \operatorname{Im}(\ell)| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire et car $|\mathrm{i}| = 1$.

Ainsi $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$. □

⚠ On ne définit pas la notion de limite $\pm\infty$ pour une fonction à valeurs complexes. Cela n'a aucun sens : où se trouvent $+\infty$ et $-\infty$ dans $\mathbb{C}$? Tout ce que l'on peut faire, c'est parler de fonction complexe qui tend vers $+\infty$ en module.

2) Continuité d'une fonction à valeurs complexes

Définition. *On dit que f est continue en un point a de D si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$.*

On dit que f est continue sur une partie A de D lorsque f est continue en tout point de A. On note $\mathscr{C}^0(A, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues sur A et à valeurs complexes.

On définit aussi les notions de continuité à gauche ou à droite en a, lorsque $a \in \mathbb{R}$.

Compte-tenu du paragraphe précédent, on a :

Théorème. *La fonction f est continue en $a \in D$ si et seulement si les fonctions $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont continues en a.*

La fonction f est continue sur une partie A de D si et seulement si les fonctions $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont continues sur A.

Exemple : *La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (puisque $\cos$ et $\sin$ le sont).*

3) Extension de certains résultats

A l'aide des théorèmes précédents (faisant le lien avec les fonctions à valeurs réelles), plusieurs résultats vus dans ce chapitre se prolongent aux fonctions à valeurs complexes :

- Il y a encore unicité de la limite.
- Les opérations algébriques sur les fonctions admettent des limites finies sont encore valables. Les opérations algébriques sur les fonctions continues sont encore valables.
- les théorèmes faisant le lien entre limite et limite à gauche/droite ou continuité et continuité à gauche/droite sont encore valables.

Leur démonstration est laissée en exercice.

Toutes celles faisant apparaître une limite infinie n'ont aucun sens.

⚠ Le théorème de continuité d'une composée de fonctions à valeurs complexes pourrait se prolonger mais le programme n'autorise pas de parler de fonctions dérivables de la variable réelle. Une seule exception (que l'on a déjà évoquée dans le chapitre 6) :

Théorème. *Si $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue sur D, alors la fonction $\mathrm{e}^{\varphi} : x \longmapsto \mathrm{e}^{\varphi(x)}$ est continue sur D.*

Démonstration. Notons $f = \operatorname{Re}(\varphi)$ et $g = \operatorname{Im}(\varphi)$ de sorte que $\varphi = f + \mathrm{i}g$ et $\mathrm{e}^{\varphi} = \mathrm{e}^{f}\mathrm{e}^{\mathrm{i}g} = \mathrm{e}^{f}\cos(g) + \mathrm{i}\mathrm{e}^{f}\sin(g)$. On a donc $\operatorname{Re}(\mathrm{e}^{\varphi}) = \mathrm{e}^{f}\cos(g)$ et $\operatorname{Im}(\mathrm{e}^{\varphi}) = \mathrm{e}^{f}\sin(g)$. Comme φ est continue sur D, les fonctions f et g le sont aussi par définition. Puisque f et g sont à valeurs réelles et que $\exp$, $\cos$ et $\sin$ sont continues sur $\mathbb{R}$, on en déduit que e^{f}, $\cos(g)$ et $\sin(g)$ sont continues sur D donc $\operatorname{Re}(\mathrm{e}^{\varphi})$ et $\operatorname{Im}(\mathrm{e}^{\varphi})$ également. On en déduit que e^{φ} est continue sur E. □

D'autres résultats restent vrais en utilisant le module et la définition quantifiée (avec les mêmes preuves que dans le cas réel), par exemple :

C'est-à-dire son module est une fonction majorée.

- Une fonction à valeurs complexes admettant une limite finie en a est bornée au voisinage de a.
- La fonction f tend vers $\ell \in \mathbb{C}$ en a si et seulement si $|f(x)-\ell| \xrightarrow[x \to a]{} 0$ (la fonction $x \longmapsto |f(x)-\ell|$ étant à valeurs réelles).
- Si $\ell \in \mathbb{C}$ est tel que :
  - ⋆ il existe une fonction $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ qui tend vers 0 en a,
  - ⋆ $|f(x)-\ell| \leqslant g(x)$ pour tout x sur un voisinage de a,

  alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.

C'est le module ici.

Toutefois de nombreux résultats ne sont plus valables pour des fonctions à valeurs complexes, typiquement tout ceux utilisant les relations d'ordre car eils n'ont plus de sens :

- Cela n'a pas de sens de dire que l'inégalité large passe à la limite dans $\mathbb{C}$.
- Il n'y a pas de théorème d'encadrement (sauf le cas particulier, utilisant le module, cité ci-dessus) ou de comparaison.
- Il n'a pas de notion de fonction monotone à valeurs complexes donc il n'y a pas de théorème de la limite monotone. Il n'y a pas non plus de théorème de la bijection.
- Cela n'a pas de sens de parler de segment sur $\mathbb{C}$ donc on oublie le théorème des bornes atteintes (mais il a un analogue complexe au programme de deuxième année).

Et, pour finir, le TVI n'est plus valables pour des fonctions à valeurs complexes puisqu'elles peuvent « contourner l'obstacle ».

La fonction $\varphi : x \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ *est continue sur* $[0\,;\pi]$*. On a* $\varphi(0)=1$ *et* $\varphi(\pi)=-1$ *mais, pourtant* φ *ne s'annule pas sur* $[0\,;\pi]$.