Chapitre 24

Intégration sur un segment

Il ne s'agit pas d'un chapitre calculatoire : il n'y a aura rien de vraiment nouveau en terme de calcul par rapport à ceux effectués dans le chapitre 10.

Dans le chapitre 10, nous avons appris à calculer des intégrales sans définir proprement cet objet et en utilisant exclusivement le théorème fondamentale de l'analyse (faisant le lien entre intégrale et primitive) sans le démontrer. Maintenant que nous avons bien exploré les notions de continuité et de dérivabilité, il est temps de construire la notion d'intégrale d'une fonction continue sur un segment de sorte qu'elle corresponde à sa définition intuitive en tant qu'aire sous la courbe. Nous en profiterons pour étendre cette notion à une classe plus large de fonctions : les fonctions continues par morceaux. Enfin nous montrerons le théorème fondamental de l'analyse.

La construction de l'intégrale consiste à la définir pour des fonctions simples : les fonctions en escalier. Pour celles-ci il s'agira d'une somme d'aires de rectangles. Puis nous étendrons cette définition aux fonctions continues par morceaux en montrant d'abord qu'elles peuvent être « approchées » par des fonctions en escalier.

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I et J désignent des intervalles non vides et non réduits à un point. Enfin a et b désignent des réels tels que $a \leqslant b$.

I Continuité uniforme

Cette année, cette notion ne nous servira essentiellement que pour ce chapitre.

Ce paragraphe aurait pu être présenté dans le chapitre 18 mais, conformément au programme, nous l'avons gardé pour ce chapitre. On se donne D une union d'intervalles non vides et non réduits à un point.

1) Une limitation à la notion de continuité

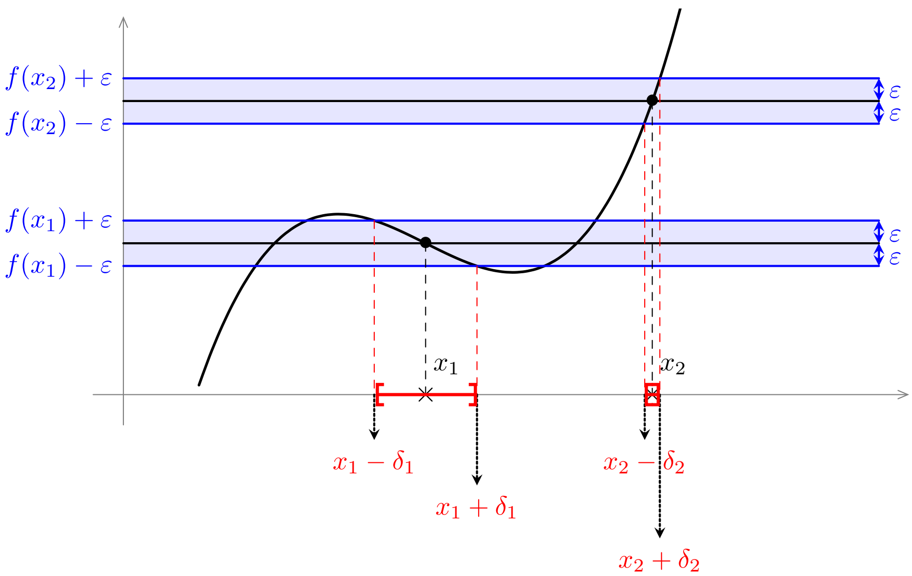
Rappelons qu'une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue sur D si elle est continue en tout point de D. Avec des quantificateurs :

$$\forall a \in D, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in D, \quad |x-a| \leqslant \delta \implies |f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon$$

ou, de façon équivalente (les variables sont muettes et on peut intervertir deux quantificateurs identiques) :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \forall x \in D, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall y \in D, \quad |x-y| \leqslant \delta \implies |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Autrement dit, si on fixe $\varepsilon > 0$, pour tout $x \in D$, il existe un intervalle centré en x dont les éléments ont leur image dans le cylindre $[f(x)-\varepsilon\,;f(x)+\varepsilon]$.



Cela se voit bien sur le dessin : ce n'est pas le même δ pour x_1 et x_2 alors qu'on a pris le même ε.

Dit autrement, à un cylindre vertical correspond un cylindre horizontal, mais le « problème » est que la largeur du cylindre horizontal dépend du point x considéré : le δ étant défini après le x, il dépend du x. On dit que la fonction est uniformément continue quand « elle est continue partout de la même façon » c'est-à-dire quand le δ est le même pour tout x de D. Voyons ça de façon plus précise.

2) Fonction uniformément continue

Définition. *Une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite uniformément continue sur D si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall (x, y) \in D^2,\ |x - y| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Interprétation géométrique. À ε fixé, il existe un $\delta > 0$ tel qu'en ne faisant que des pas de largeur δ horizontalement, on ne peut pas faire des sauts d'amplitude supérieure à ε. Quand une fonction est uniformément continue, on ne peut pas faire des sauts de trop grande amplitude si on ne s'écarte pas trop, et l'écart maximal est le même en tout point de l'intervalle.

La réciproque est fausse, comme nous allons le voir ci-dessous.

Proposition. *Une fonction uniformément continue sur D est continue sur D.*

DÉMONSTRATION. S'il existe un $\delta > 0$ qui convient pour tous les $x \in D$, alors pour tout $x \in D$, il existe un $\delta > 0$ qui convient. □

La réciproque est fausse, comme nous allons le voir ci-dessous.

Proposition. *Une fonction Lipschitzienne sur D est uniformément continue sur D.*

DÉMONSTRATION.

□

Exemples :

- *Reprenons les exemples de fonctions Lipschitzienne du chapitre 19 :*
  - ⋆ *Les fonctions affines sont uniformément continues sur $\mathbb{K}$.*
  - ⋆ *La fonction valeur absolue est uniformément continue sur $\mathbb{K}$.*
  - ⋆ *La fonction inverse est uniformément continue sur $[1\,;+\infty[$.*
  - ⋆ *La fonction carré est uniformément continue sur $[-1\,;1]$.*
- *La fonction racine carrée est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et sa dérivée est bornée par $\dfrac{1}{2}$ sur $[1\,;+\infty[$. Ainsi l'inégalité des accroissements finis assure qu'elle est $\dfrac{1}{2}$-Lipschitzienne sur $[1\,;+\infty[$ et donc elle y est uniformément continue.*

  Cependant, elle n'est pas Lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+^*$ (et donc encore moins sur $\mathbb{R}_+$) tout entier. En effet :

  Toutefois la fonction racine carré est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque : Montrer qu'une fonction donnée est uniformément continue n'est pas facile en général comme on vient de le voir. Cependant, montrer qu'une fonction f n'est pas uniformément continue sur D est plus facile : il suffit d'exhiber deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans D telles que :

- $x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- $(f(x_n) - f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

Inutile de retenir cette démonstration dans le cas général. Par contre il faut savoir le prouver dans des cas particuliers (il est donc indispensable de connaître la négation de « f est uniformément continue »).

Montrons que cela prouve que f n'est pas uniformément continue : supposons que nous ayons de telles suites. Le deuxième point se traduit par l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que,

$$\forall n_0 \in \mathbb{N}, \quad \exists n \geqslant n_0, \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon.$$

Soit $\delta > 0$. Le premier point entraîne qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|x_n - y_n| \leqslant \delta$. Il existe donc un $n \geqslant n_0$ tel que $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$ et $|x_n - y_n| \leqslant \delta$. Puisque $\delta > 0$ est quelconque, on vient de montrer que :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists (x_n, y_n) \in D^2,\ |x_n - y_n| \leqslant \delta \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon,$$

ce qui est précisément la négation du fait que f est uniformément continue.

Exemples :

- *Montrons que la fonction carré n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

Contrairement à ce que les exemples précédents peuvent laisser penser, une fonction peut être bornée sans être uniformément continue. Nous montrerons en exercices que $f : x \mapsto \sin\left(x^2\right)$ n'est pas uniformément continue (la raison est que les pics sont de plus en plus raides) sur $\mathbb{R}$.

- *Montrons que la fonction* $\ln$ *n'est pas uniformément continue sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Notons* f *la fonction* $\ln$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *si on pose* $x_n = \mathrm{e}^{-n}$ *et* $y_n = \mathrm{e}^{-(n+1)}$, *alors :*

$$f(y_n) - f(x_n) = \ln(\mathrm{e}^{-(n+1)}) - \ln(\mathrm{e}^{-n}) = -1$$

Notons $\varepsilon = 1/2$. *Soit* $\delta > 0$. *Puisque* $\mathrm{e}^{-(n+1)} - \mathrm{e}^{-n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, *il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $|y_n - x_n| \leqslant \delta$ *et* $|f(y_n) - f(x_n)| > \dfrac{1}{2}$. *On a donc prouvé :*

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists (x_n, y_n) \in D^2,\ |x_n - y_n| \leqslant \delta \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$$

donc f *n'est pas uniformément continue.*

3) Le théorème de Heine

Comme on l'a vu plus haut, montrer qu'une fonction est uniformément continue est difficile dans le cas général. Heureusement, dans le cas d'une fonction continue sur un segment, le résultat est simple :

Cela se voit bien sur un dessin : il existe forcément un δ qui convient pour tout le monde.

Théorème (de Heine). *Une fonction continue sur un segment est uniformément continue.*

Démonstration.

□

II Fonctions en escalier, fonctions continues par morceaux

1) Subdivisions

Le pas de la subdivision est le plus grand écart entre deux a_i consécutifs.

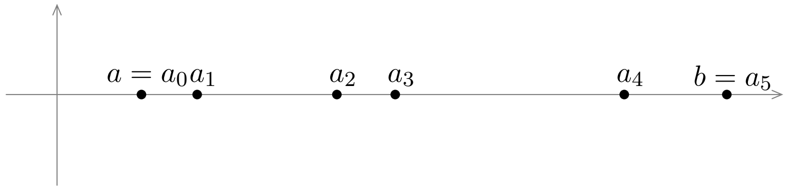
Définition. *On appelle subdivision de $[a\,;b]$ toute famille finie $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ vérifiant :*

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b.$$

On appelle pas de la subdivision σ le réel $p(\sigma) = \max\limits_{i\in[\![0\,;n-1]\!]}(a_{i+1}-a_i)$.

Une subdivision est donc une famille finie de $[a\,;b]$ strictement croissante dont le terme initial est a et le terme final est b. Sous entendu dans la notation, n est un entier naturel (et même non nul dès que $a<b$).

Exemple :



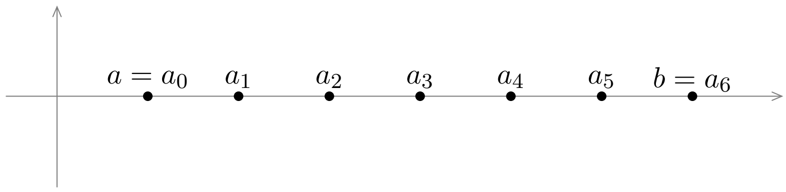
Définition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La subdivisions $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ définie par :*

$$\forall i \in [\![0\,;n]\!], \qquad a_i = a + i \times \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

est appelée subdivision régulière (ou subdivision à pas constant) d'indice n.

C'est la subdivision obtenue en coupant le segment $[a\,;b]$ en n morceaux égaux. Son pas est constant égal à $\frac{b-a}{n}$.

Exemple :



Remarque : Une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ est une famille mais on l'assimilera souvent à l'ensemble $\{a_0; \dots; a_n\}$ pour pouvoir parler d'appartenance, d'inclusion, d'intersection et d'union de subdivisions.

Par exemple, si $\sigma_1 = (0,1,2,3)$ et $\sigma_2 = (0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3)$ sont des subdivisions de $[0\,;3]$, on dira que $\sigma_1 \subset \sigma_2$.

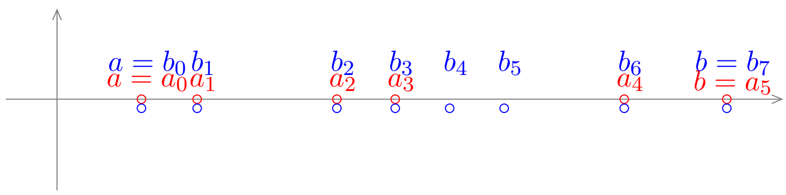
De plus, quitte à réordonner les éléments, une union de subdivisions est encore une subdivision.

Par exemple, si $\sigma_1 = (0,1,2,3)$ et $\sigma_2 = (0, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, 3)$ sont des subdivisions de $[0\,;3]$, alors on notera $\sigma_1 \cup \sigma_2 = (0, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}, 2, 3)$.

Une subdivision plus fine qu'une autre contient plus de points donc a évidemment plus d'éléments, mais la réciproque est fausse ! Ce n'est pas parce qu'une subdivision a plus d'éléments qu'une autre qu'elle est plus fine, les différents éléments des deux subdivisions peuvent se trouver à des endroits totalement différents !

Définition. *Soient $\sigma_1 = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ et $\sigma_2 = (b_j)_{0\leqslant j\leqslant p}$ deux subdivisions de $[a\,;b]$. On dit que σ_2 est plus fine que σ_1 si $\sigma_1 \subset \sigma_2$ c'est-à-dire si σ_2 contient tous les éléments de σ_1.*

Exemple : *Ci-dessous, $\sigma_2 = (b_j)_{0\leqslant j\leqslant 7}$ est plus fine que $\sigma_1 = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant 5}$.*



Proposition. *La relation « être plus fine que » est une relation d'ordre sur l'ensemble des subdivisions de $[a\,;b]$.*

... En d'autres termes, on obtient une subdivision plus fine en ajoutant des points.

Démonstration. Découle directement du fait que l'inclusion est une relation d'ordre sur l'ensemble des parties de $[a\,;b]$. □

2) Fonctions en escalier

Définition. *Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est en escalier sur $[a\,;b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ telle que, pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$, f est constante sur $]a_i\,;a_{i+1}[$.*

On dit que la subdivision σ est adaptée à la fonction en escalier f.

En d'autres termes, une subdivision $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est adaptée à la fonction f si f est constante sur les intervalles ouverts délimités par σ, c'est-à-dire sur les $]a_i\,;a_{i+1}[$.

Remarques :

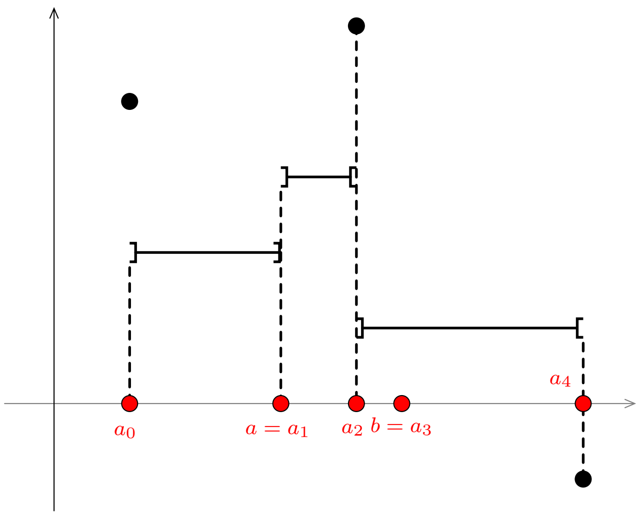
- En d'autres termes, une fonction en escalier sur $[a\,;b]$ est une fonction constante sur un nombre fini d'intervalles ouverts de $[a\,;b]$ avec des valeurs quelconques « aux points de jointure » entre les différents intervalles.
- En particulier, une fonction constante sur $[a\,;b]$ est en escalier sur $[a\,;b]$.
- Lorsque f est une fonction en escalier dont $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une subdivision adaptée, alors :
  - ⋆ elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs (les n valeurs sur les n intervalles ouverts $]a_i\,;a_{i+1}[$ et les $n+1$ valeurs en les points de la subdivision $a_0, \dots, a_n$).
  - ⋆ elle est continue sur chaque intervalle $]a_i\,;a_{i+1}[$ (car constante). Les seuls points de discontinuité **éventuels** sont les points de la subdivision.

Ces valeurs n'étant pas distinctes a priori.

Cela ne signifie pas qu'elle soit discontinue en tous les points de la subdivision : si les valeurs de f sur $]a_{i-1}\,;a_i[$, sur $]a_i\,;a_{i+1}[$ et en a_i sont égales, alors f est continue en a_i. On peut alors enlever a_i de la subdivision... ou la laisser.

Exemples :

- *Ci-dessous le graphe d'une fonction f en escalier sur $[a\,;b]$ et à valeurs réelles dont $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ est une subdivision adaptée. Elle est continue en a_3 bien qu'il s'agit d'un des points de la subdivision. Elle est aussi continue à droite (mais pas à gauche) en a_1. La subdivision (a_0, a_1, a_2, a_4) est également adaptée à f.*



- *La fonction $\mathbb{1}_{\{0\}}$ est continue par morceaux sur $[-1\,;1]$. Une subdivision est $(-1, 0, 1)$ mais aussi $(-1, \frac{1}{2}, 0, \frac{\pi}{4}, 1)$.*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction partie entière est en escalier sur $[0\,;n]$ et la subdivision $(k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est adaptée. Mais la subdivision $(0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, \pi, 4, 5, \dots, n)$ est aussi adaptée.*

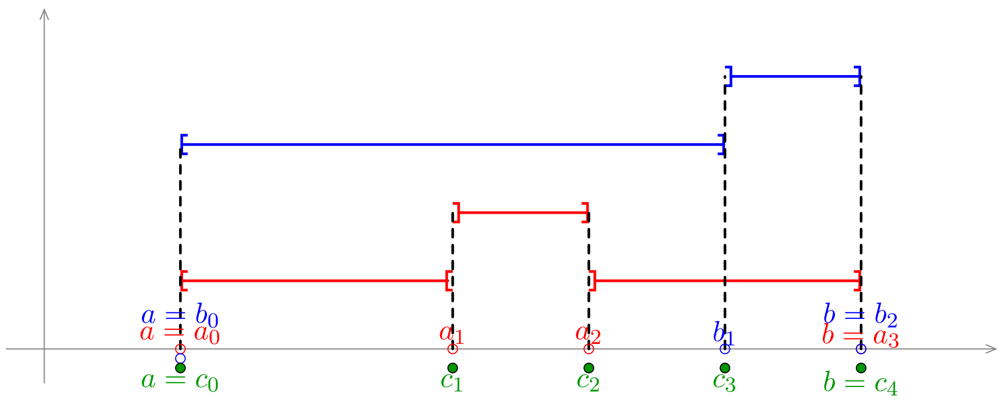
Il n'y a donc jamais unicité d'une subdivision adaptée.

Proposition. *Si f est en escalier sur $[a\,;b]$ et si σ est une subdivision adaptée, alors toute subdivision de $[a\,;b]$ qui plus fine que σ est encore adaptée à f.*

$\rightsquigarrow$ DÉMONSTRATION LAISSÉE EN EXERCICE.

Lemme. *Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a\,;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors il existe une subdivision adaptée à f et à g.*

DÉMONSTRATION. Considérons σ_1 adaptée à f et σ_2 adaptée à g. Alors $\sigma_3 = \sigma_1 \cup \sigma_2$ est adaptée à f et à g. $\square$



Définition. *On note $\mathscr{E}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a\,;b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

Théorème. *L'ensemble $\mathscr{E}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$, muni de la somme et du produit de fonctions, est un anneau commutatif.*

On a vu en exemple dans le chapitre 17 que $\mathbb{K}^{\mathbb{R}}$ était un anneau commutatif mais les preuves s'adaptent sans problème à $\mathbb{K}^E$ pour tout ensemble E non vide.

DÉMONSTRATION. L'ensemble $\mathbb{K}^{[a\,;b]}$, muni de la somme et du produit de fonctions, est un anneau commutatif Il suffit donc de prouver que $\mathscr{E}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$ est un sous-anneau de $\mathbb{K}^{[a\,;b]}$, et donc il suffit de prouver que $\mathscr{E}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$ est stable par somme, par opposé et par produit, puisqu'il contient évidemment la fonction nulle et la fonction constante égale à 1 (sur $[a\,;b]$). On se donne donc f et g en escalier sur $[a\,;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, puis $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision adaptée à f et g (une telle subdivision existe d'après le lemme précédent). Par définition d'une subdivision adaptée, pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$, f et g sont constantes sur $]a_i\,;a_{i+1}[$ donc $f+g$, $-f$ et $f\times g$ également, si bien que $f+g$, $-f$ et $f\times g$ sont en escalier, ce qui permet de conclure. $\square$

Nous dirons dans le chapitre 28 que $\mathscr{E}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Proposition. *L'ensemble. $\mathscr{E}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$ est stable par multiplication externe : pour tous $f \in \mathscr{E}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda f \in \mathscr{E}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$.*

$\rightsquigarrow$ DÉMONSTRATION LAISSÉE EN EXERCICE.

Proposition.

- *Soit $f \in \mathscr{E}([a\,;b]\,,\mathbb{C})$. Alors $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dans $\mathscr{E}([a\,;b]\,,\mathbb{R})$.*
- *Soient φ et ψ dans $\mathscr{E}([a\,;b]\,,\mathbb{R})$, alors $\varphi + \mathrm{i}\psi \in \mathscr{E}([a\,;b]\,,\mathbb{C})$.*

DÉMONSTRATION.

- Soit $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ adaptée à f. Pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$, f est constante sur $]a_i\,;a_{i+1}[$ donc $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ aussi. Ainsi $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont en escalier (et σ est adaptée).
- Puisque $\mathscr{E}([a\,;b]\,,\mathbb{R}) \subset \mathscr{E}([a\,;b]\,,\mathbb{C})$ et que ce dernier est un anneau stable par multiplication externe, $\mathrm{i}\psi$ et donc $\varphi + \mathrm{i}\psi$ sont en escalier. $\square$

Proposition. *Si $f \in \mathscr{E}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$, alors $|f| \in \mathscr{E}([a\,;b]\,,\mathbb{R})$.*

Démonstration. Soient $f \in \mathscr{E}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$ et $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ adaptée à f. Pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$, f est constante sur $]a_i\,;a_{i+1}[$ donc $|f|$ aussi. Par conséquent $|f| \in \mathscr{E}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$. □

3) Fonctions continues par morceaux

En abrégé, on dit que f est $\mathscr{C}^{pm}$.

Définition. *Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $[a\,;b]$ telle que, pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$:*

- *f est continue sur $]a_i\,;a_{i+1}[$*
- *f admet une limite à gauche finie en a_{i+1} et une limite à droite finie en a_i.*

On dit que la subdivision σ est adaptée à la fonction continue par morceaux f.

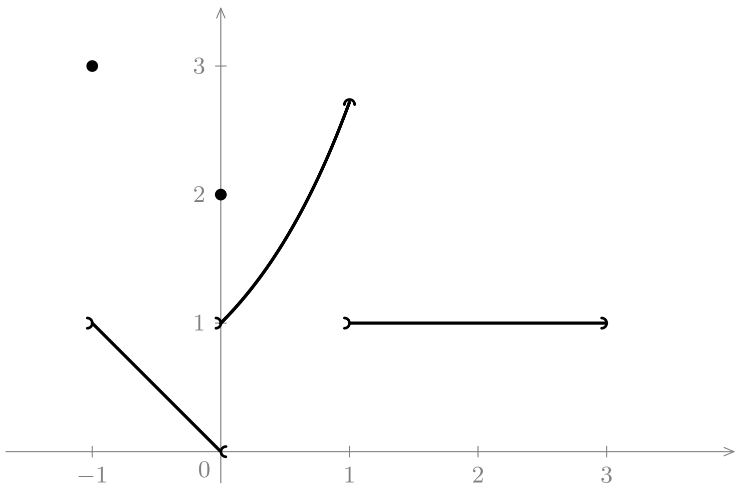
En d'autres termes, $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est adaptée à la fonction f si f est continue sur les intervalles ouverts délimités par σ, c'est-à-dire sur les $]a_i\,;a_{i+1}[$ avec des limites à gauche et à droite. Les seuls points de discontinuité **éventuels** sont les points de la subdivision. ⚠ Cela ne signifie pas qu'elle soit discontinue en tous les points de la subdivision : si les limites à gauche et à droite de f en a_i coïncident avec la valeur de f en a_i, alors f est continue en a_i (et donc on peut enlever a_i de la subdivision... ou la laisser).

Exemple :

- *Une fonction continue sur un segment est continue par morceaux sur ce segment.*
- *Une fonction en escalier sur un segment est continue par morceaux sur ce segment.*
- *La fonction*

$$f : \begin{cases} [-1\,;3] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 3 & \text{si} & x=-1 \\ -x & \text{si} & x \in]-1\,;0[\\ 2 & \text{si} & x = 0 \\ \mathrm{e}^x & \text{si} & x \in]0\,;1] \\ 1 & \text{si} & x \in]1\,;3] \end{cases} \end{cases}$$

est continue par morceaux sur $[-1\,;3]$. Voici son graphe :



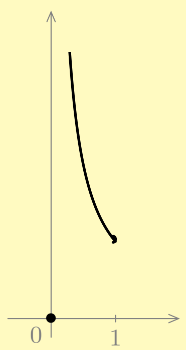
Une subdivision adaptée à f est $(-1, 0; 1, 3)$ mais aussi $(-1, -\frac{1}{2}, 1, 2, 3)$.

⚠ Il n'y a donc jamais unicité d'une subdivision adaptée.

- *La fonction*

$$f : \begin{cases} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si} & x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si} & x \in]0\,;1] \end{cases} \end{cases}$$

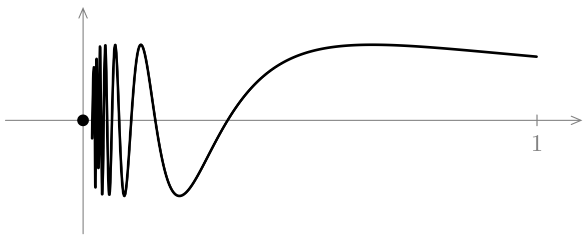
n'est pas continue par morceaux. En effet, elle n'admet pas de limite à droite finie en 0. Son graphe est-ci contre dans la marge.



- *La fonction*

$$f : \begin{cases} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si} & x = 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} & x \in]0\,;1] \end{cases} \end{cases}$$

n'est pas continue par morceaux car n'admet pas de limite à droite en 0.



Remarque : Lorsque f est continue par morceaux, avec les notations précédentes, pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$, f est continue sur $]a_i\,;a_{i+1}[$, admet une limite à gauche finie en a_{i+1} et une limite à droite finie en a_i. Dès lors $f\big|_{]a_i\,;a_{i+1}[}$ est prolongeable par continuité en a_i et a_{i+1} en une fonction $\widetilde{f_j}$ continue sur $[a_i\,;a_{i+1}]$.

En revanche f n'est pas prolongeable en a_i et a_{i+1} puisqu'elle est déjà définie en ces points.

Proposition. *Si f est continue par morceaux sur $[a\,;b]$ et si σ est une subdivision adaptée, alors toute subdivision de $[a\,;b]$ qui plus fine que σ est encore adaptée à f.*

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Lemme. *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a\,;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors il existe une subdivision adaptée à f et à g.*

Démonstration. Considérons σ_1 adaptée à f et σ_2 adaptée à g. Alors $\sigma_3 = \sigma_1 \cup \sigma_2$ est adaptée à f et à g. □

Définition. *On note $\mathscr{C}^{pm}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a\,;b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

Théorème. *L'ensemble $\mathscr{C}^{pm}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$, muni de la somme et du produit de fonctions, est un anneau commutatif.*

C'est quasiment la même preuve que pour les fonctions en escalier.

Démonstration. Montrons que $\mathscr{C}^{pm}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$ est un sous-anneau de $\mathbb{K}^{[a\,;b]}$. Il suffit de prouver que $\mathscr{C}^{pm}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$ est stable par somme, par opposé et par produit, puisqu'il contient évidemment la fonction nulle et la fonction constante égale à 1 (sur $[a\,;b]$). On se donne donc f et g continues par morceaux sur $[a\,;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, puis $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision adaptée à f et g (une telle subdivision existe d'après le lemme précédent). Par définition d'une subdivision adaptée, pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$, f et g sont continues sur $]a_i\,;a_{i+1}[$ admettent des limites à gauche en a_{i+1} et à droite en a_i qui sont finies. C'est donc encore le cas de $f+g$, $-f$ et $f\times g$, si bien que $f+g$, $-f$ et $f\times g$ sont continues par morceaux, ce qui permet de conclure. □

Nous dirons dans le chapitre 28 que $\mathscr{C}^{pm}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Proposition. *L'ensemble. $\mathscr{C}^{pm}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$ est stable par multiplication externe : pour tous $f \in \mathscr{C}^{pm}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda f \in \mathscr{C}^{pm}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$.*

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Proposition.

- *Soit $f \in \mathscr{C}^{pm}([a\,;b]\,,\mathbb{C})$. Alors $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dans $\mathscr{C}^{pm}([a\,;b]\,,\mathbb{R})$.*
- *Soient φ et ψ dans $\mathscr{C}^{pm}([a\,;b]\,,\mathbb{R})$, alors $\varphi + \mathrm{i}\psi \in \mathscr{C}^{pm}([a\,;b]\,,\mathbb{C})$.*

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Proposition. *Si $f \in \mathscr{C}^{pm}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$, alors $|f| \in \mathscr{C}^{pm}([a\,;b]\,,\mathbb{R})$.*

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Proposition. *Une fonction continue par morceaux sur $[a\,;b]$ est bornée sur $[a\,;b]$.*

Démonstration. Soit f continue par morceaux sur $[a\,;b]$. Donnons-nous une subdivision $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ adaptée à f. Soit $i \in [\![0\,;n-1]\!]$. La fonction f est prolongeable en une fonction $\widetilde{f_j}$ continue sur $[a_i\,;a_{i+1}]$ (cf. remarque plus haut) et cette fonction y est alors bornée par théorème des bornes atteintes. Notons alors M_j un majorant de $|\widetilde{f_j}|$ sur $[a_i\,;a_{i+1}]$. Puisque $\widetilde{f_j}$ et f_j coïncident sur $]a_i\,;a_{i+1}[$, $|f_j|$ est donc majorée sur $]a_i\,;a_{i+1}[$ par M_j. Notons alors

$$M = \max\{M_0; \dots ; M_{n-1}; |f(a_0)|; |f(a_1)|; \dots ; |f(a_n)|\}.$$

Pour tout $x \in [a\,;b]$, en distinguant les cas selon que x est un élément de la subdivision ou appartient à un des intervalles ouverts qui la compose, on obtient que $|f(x)| \leqslant M$. Ainsi f est bornée par M sur $[a\,;b]$. □

4) Approximation par des fonctions en escalier

a) Norme infinie

On se donne D une union d'intervalles non vides et non réduits à un point.

> En cas d'ambiguïté sur le domaine sur lequel f est borné, on peut noter plutôt
>
> $$\|f\|_{\infty,D}.$$

Définition (norme infinie). *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction bornée sur D. On note*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in D} |f(x)|.$$

On dit que $\|f\|_\infty$ est la norme infinie de f.

> En second année, ces trois points permettront de qualifier $\|\cdot\|_\infty$ de norme.

Proposition. *Soient f et g deux fonctions bornées sur D. Alors :*

- *$\|f\|_\infty = 0$ si et seulement si f est nulle sur D.*
- *Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\,\|f\|_\infty$.*
- ***Inégalité triangulaire.** $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.*

Démonstration.

- Si f est nulle sur D, alors $|f|$ est nulle et donc $\|f\|_\infty = 0$. Réciproquement, supposons que $\|f\|_\infty = 0$. Alors la fonction $|f|$ est positive et majorée par 0 : c'est la fonction nulle sur D.
- Si $\lambda = 0$, l'égalité est immédiate. Supposons que $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Pour tout $x \in D$,

  $$|\lambda f(x)| = |\lambda| \times |f(x)| \leqslant |\lambda| \times \|f\|_\infty.$$

  Ainsi λf est bornée par $|\lambda| \times \|f\|_\infty$ et donc $\|\lambda f\|_\infty \leqslant |\lambda| \times \|f\|_\infty$. On recommence avec $\frac{1}{\lambda}$ et λf au lieu de λ et f et on obtient : $\|\frac{1}{\lambda} \times \lambda f\|_\infty \leqslant |\frac{1}{\lambda}| \times \|\lambda f\|_\infty$ donc $|\lambda| \times \|f\|_\infty \leqslant \|\lambda f\|_\infty$ D'où l'égalité.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Par inégalité triangulaire (sur $\mathbb{C}$), on a :

  $$|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

  Ainsi $f+g$ est bornée par $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ et donc $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. □

> On utilise plusieurs fois le fait qu'une borne supérieure est le plus petit des majorants dans cette preuve.

Remarques :

- A priori le $\sup$ définissant la norme infinie d'une fonction, n'a aucune raison d'être un $\max$.
- Comme on l'a vu dans la dernière proposition, une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée sur ce segment (sans atteindre forcément ses bornes). Mais si elle est continue sur un segment, le théorème des bornes atteintes assure que le $\sup$ de la définition est un $\max$.
- Lorsque f et g sont deux fonctions bornées de D dans $\mathbb{R}$, la norme $\|f-g\|_\infty$ est appelée distance uniforme entre f et g.

> $\|f-g\|_\infty$ est la distance maximale entre deux images d'un même point de D par f et par g.

b) Théorème d'approximation uniforme

On peut toujours approcher par défaut et pas excès toute fonction continue par morceaux sur un segment par deux fonctions en escalier avec la précision la plus grande possible :

Lemme. *Soit f continue par morceaux sur $[a\,;b]$ et à valeurs **réelles**. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe φ et ψ deux fonctions en escalier sur $[a\,;b]$ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$.*

Cela signifie bien sûr que, pour tout $x \in [a\,;b]$,

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$$

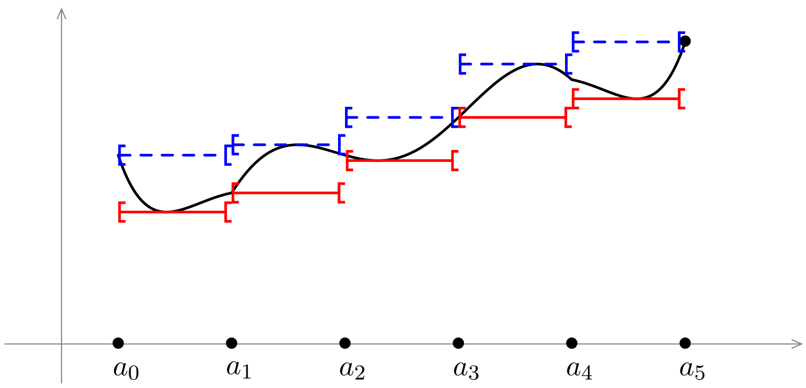
et $\psi(x) - \varphi(x) \leqslant \varepsilon$.

⚠ Dans ce lemme, les fonctions sont à valeurs réelles (sinon ça n'a pas de sens de parler d'inégalités).

Démonstration. Supposons que $a < b$, sinon il n'y a rien à faire. Soit $\varepsilon > 0$.

Étape 1. Traitons d'abord le cas d'une fonction continue. Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur le segment $[a\,;b]$.

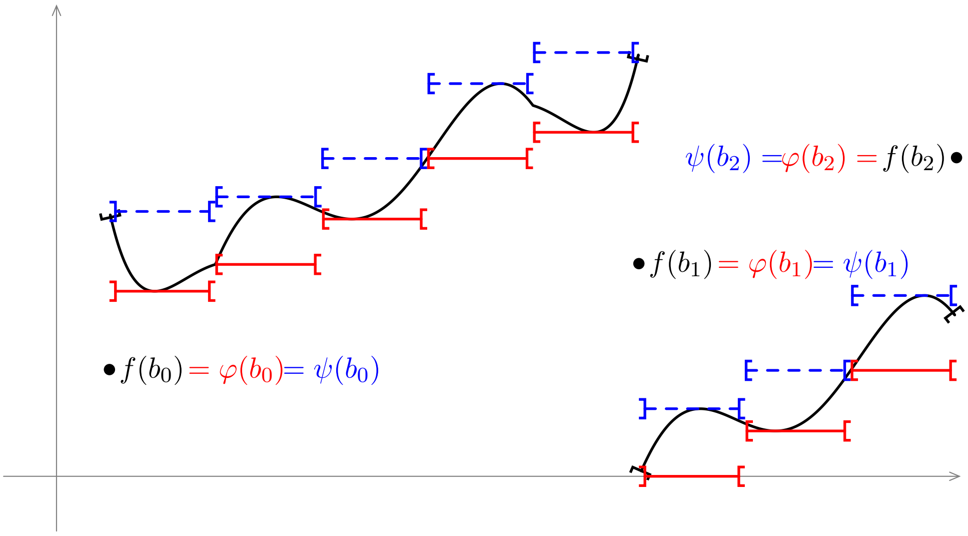
En d'autres termes, on fait des pas de largeur $\frac{b-a}{n}$. L'idée de la preuve est ensuite très simple : puisqu'on fait des pas de largeur inférieure à δ, on fait des « sauts » verticaux d'amplitude inférieure à ε (puisque f est uniformément continue). En prenant le maximum égal à ψ et le minimum égal à φ, on est sûr d'avoir $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$.



Étape 2. Traitons maintenant le cas général d'une fonction continue par morceaux. Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux sur le segment $[a\,;b]$. On considère une subdivision $\tau = (b_j)_{0\leqslant j\leqslant p}$ adaptée à f. Pour tout $j \in [\![0\,;p-1]\!]$, la restriction de f à $]b_j\,;b_{j+1}[$ est prolongeable sur $[b_j\,;b_{j+1}]$ en une fonction continue $\widetilde{f_j}$. En appliquant l'étape 1 à $\widetilde{f_j}$, il existe ψ_j et φ_j deux fonctions en escalier sur $[b_j\,;b_{j+1}]$ telles que $\varphi_j \leqslant \widetilde{f_j} \leqslant \psi_j$ et $\psi_j - \varphi_j \leqslant \varepsilon$. Définissons les fonction ψ et φ de la façon suivante :

On itère le procédé précédent sur chaque intervalle ouvert délimité par les points de la subdivision, et aux points de la subdivision, on attribue à φ et à ψ la valeur prise par f (ce qui n'a aucune importance : pour les fonctions en escalier, les valeurs ponctuelles aux points de la subdivision n'ont aucune incidence).

- Pour tout $j \in [\![0\,;p-1]\!]$, $\psi = \psi_j$ sur $]b_j\,;b_{j+1}[$.
- Pour tout $j \in [\![0\,;p-1]\!]$, $\varphi = \varphi_j$ sur $]b_j\,;b_{j+1}[$.
- Pour tout $j \in [\![0\,;p]\!]$, $\varphi(b_j) = f(b_j)$ et $\psi(b_j) = f(b_j)$.



Montrons enfin que ψ et φ conviennent. Soit $x \in [a\,;b]$.

- Si il existe $i \in [\![0\,;p]\!]$ tel que $x = b_j$, alors $f(x) = \varphi(x) = \psi(x)$ donc on a bien $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$ et $\psi(x) - \varphi(x) \leqslant \varepsilon$.
- Sinon il existe $i \in [\![0\,;p]\!]$ tel que $x \in]b_j\,;b_{j+1}[$ et alors $f(x) = \widetilde{f_j}(x)$, $\psi(x) = \psi_j(x)$ et $\varphi(x) = \varphi_j(x)$. Par conséquent $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$ et $\psi(x) - \varphi(x) \leqslant \varepsilon$.

Ainsi on a bien $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$ sur $[a\,;b]$. □

Théorème (approximation uniforme par des fonctions en escalier). *Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $[a\,;b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier φ sur $[a\,;b]$ telle que $\|g - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$. On dit que l'ensemble des fonctions en escalier est dense dans l'ensemble des fonctions continues par morceaux.*

Démonstration.

□

Corollaire. *Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $[a\,;b]$. Il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $[a\,;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*

DÉMONSTRATION.

□

C'est tout à fait analogue à la définition d'une partie dense dans $\mathbb{R}$. En effet (cf. chapitre 14), une partie D de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si tout élément de $\mathbb{R}$ est limite d'une suite d'éléments de D.

Remarques :

- En deuxième année, on dira que :
  - ⋆ La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f (ce qui est plus fort que de dire que, pour tout $x \in [a\,;b]$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ et on parle alors de convergence simple).
  - ⋆ L'ensemble $\mathscr{E}([a\,;b]\,,\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{C}^{pm}([a\,;b]\,,\mathbb{R})$ au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Cela découle d'une définition plus large de la densité, valable dans ce qu'on appelle un espace vectoriel normé.
- Ce résultat est très important car il va nous permettre, d'une part, de définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux à partir des intégrales de fonctions en escalier et, d'autre part, car il permettra d'étendre aux intégrales de fonctions continues par morceaux des résultats qui sont évidemment vrais pour les intégrales des fonctions en escalier.

III Intégrale d'une fonction en escalier

1) Définition

Les valeurs prises par f en les points d'une subdivision adaptée, n'apparaissent pas dans la définition de l'intégrale et donc n'ont aucune importance. On verra dans le paragraphe III.2.c que changer un nombre fini de valeurs à une fonction en escalier ne change pas la valeur de son intégrale.

Proposition. *Soit $f \in \mathscr{E}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$. Soit $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision adaptée à f. Pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$, notons y_i la valeur (constante) de f sur $]a_i\,;a_{i+1}[$ La quantité*

$$I(\sigma, f) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \times (a_{i+1} - a_i).$$

est indépendante du choix de la subdivision σ adaptée à f choisie.

Remarque : La quantité $I(\sigma, f)$ est encore égale à

$$\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right) \times (a_{i+1} - a_i),$$

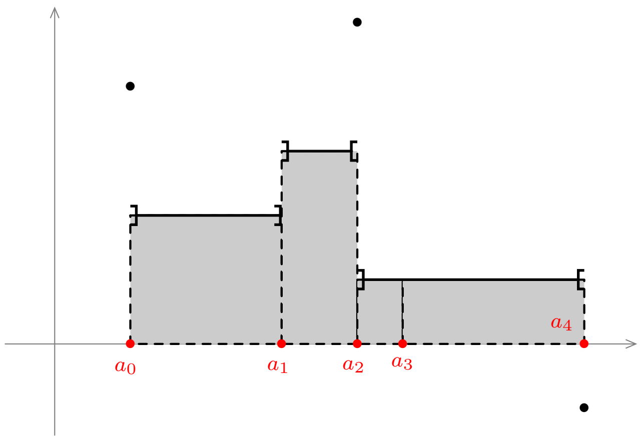
car, pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$, f est constante sur $]a_i\,;a_{i+1}[$ donc, en particulier, cette valeur est égale à $f\left(\dfrac{a_i+a_{i+1}}{2}\right)$.

Définition. *Soit $f \in \mathscr{E}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$. On appelle intégrale de f sur $[a\,;b]$ (ou de a à b) la quantité $I(\sigma,f)$ où σ est n'importe quelle subdivision adaptée à f. On la note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_{[a\,;b]} f$.*

La fonction f est appelée l'intégrande de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Ce ne sera plus la définition pour une fonction continue par morceaux quelconque, même si cette interprétation sera encore valable.

Interprétation géométrique. L'intégrale de f sur $[a\,;b]$ est la somme de toutes les aires (algébriques, c'est-à-dire négatives lorsque la fonction est négative) des rectangles formés par l'axe des abscisses et les valeurs constantes de f sur chacun des intervalles $]a_i\,;a_{i+1}[$. C'est donc l'aire entre l'axe des abscisses et la courbe.



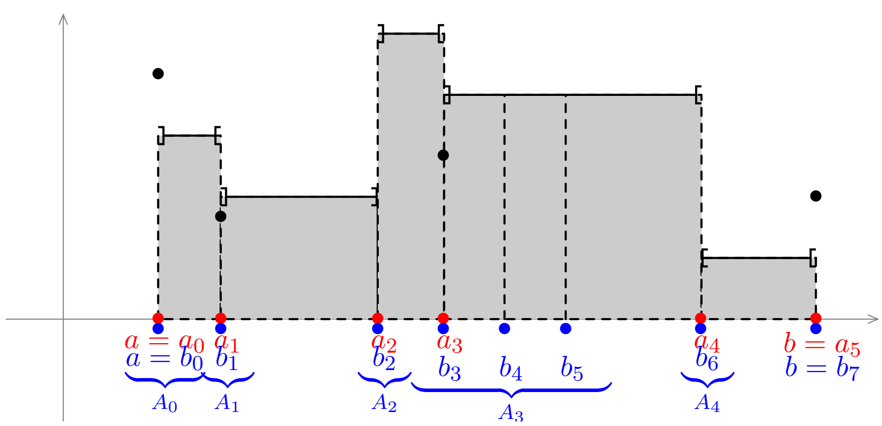
Cela se voit bien sur le dessin ci-dessus : qu'on prenne $\sigma_1 = (a_0,a_1,a_2,a_3,a_4)$ ou $\sigma_2 = (a_0,a_1,a_2,a_4)$, cette quantité sera la même. La technicité de la démonstration ne doit pas masquer le fait que ce résultat est très intuitif et se voit très bien.

Démonstration. Donnons-nous σ_1 et σ_2 deux subdivisions adaptées à f. Montrons que $I(\sigma_1,f) = I(\sigma_2,f)$. Supposons dans un premier temps que σ_2 soit plus fine que σ_1. Notons $\sigma_1 = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ et $\sigma_2 = (b_j)_{0\leqslant j\leqslant p}$ (on a donc $n \leqslant p$). Pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$, notons y_i la valeur de f sur $]a_i\,;a_{i+1}[$ et, pour tout $j \in [\![0\,;p-1]\!]$, z_j la valeur de f sur $]b_j\,;b_{j+1}[$, si bien que

$$I(\sigma_1,f) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i(a_{i+1}-a_i) \qquad \text{et} \qquad I(\sigma_2,f) = \sum_{j=0}^{p-1} z_j(b_{j+1}-b_j).$$

L'idée est de faire des regroupements par paquets dans $I(\sigma_2,f)$. Puisque $\sigma_1 \subset \sigma_2$, alors $a_0,\dots,a_n$ appartiennent à $\sigma_2 = (b_0,\dots,b_p)$. Posons alors $j_0 = 0$, $j_n = p$ et, pour tout $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, $j_k = \min\{j \in [\![1\,;p-1]\!] \mid b_j = a_k\}$. On a alors $j_0 < \cdots < j_n$, $a_0 = b_{j_0}$, ..., $a_n = b_{j_n}$. Enfin, notons $A_0 = [\![j_0\,;j_1-1]\!]$, $A_1 = [\![j_1\,;j_2-1]\!]$, ..., $A_{n-1} = [\![j_{n-1}\,;j_n-1]\!]$.

Les A_i sont « les paquets » : on part de a_i et on prend tous les éléments de σ_2 jusqu'au prochain, a_{i+1}, exclu. En clair, on regroupe tous les points de σ_2 qui correspondent à une même valeur de f.



Les ensembles d'indices $A_0, \ldots, A_{n-1}$ sont disjoints et ont pour union $[\![0\,;p-1]\!]$ (puisque $b_{j_n} = a_n = b_p = p$) donc

C'est le principe du regroupement par paquets : cf. chapitre 7.

$$I(\sigma_2, f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j \in A_i} z_j (b_{j+1} - b_j).$$

Soient $i \in [\![0\,;n-1]\!]$ et $j \in A_i = [\![j_i\,;j_{i+1}-1]\!]$. On a alors $j_i \leqslant j < j+1 \leqslant j_{i+1}$. Or, par définition, $b_{j_i} = a_i$ et $b_{j_{i+1}} = a_{i+1}$ si bien que $b_{j_i} = a_i \leqslant b_j < b_{j+1} \leqslant a_{i+1}$. Dès lors, f étant constante égale à y_i sur $]a_i\,;a_{i+1}[$, f est aussi constante égale à y_i sur $]b_j\,;b_{j+1}[$ si bien que $z_j = y_i$. Par conséquent :

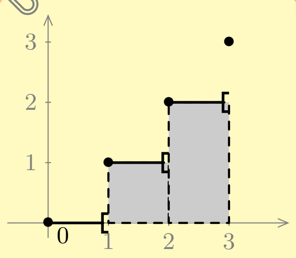
$$\begin{aligned}
I(\sigma_2, f) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j \in A_i} y_i (b_{j+1} - b_j) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} y_i \sum_{j \in A_i} (b_{j+1} - b_j) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} y_i \sum_{j=j_i}^{j_{i+1}-1} (b_{j+1} - b_j) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} y_i (b_{j_{i+1}} - b_{j_i}) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} y_i (a_{i+1} - a_i) \\
&= I(\sigma_1, f).
\end{aligned}$$

par télescopage.

ce qui est le résultat voulu.

Si σ_2 n'est pas plus fine que σ_1, notons $\sigma_3 = \sigma_1 \cup \sigma_2$, plus fine que σ_1 et σ_2. Dès lors, d'après ce qui précède, $I(\sigma_1, f) = I(\sigma_3, f)$ et $I(\sigma_2, f) = I(\sigma_3, f)$ donc $I(\sigma_1, f) = I(\sigma_2, f)$: dans tous les cas, on a le résultat voulu. $\square$

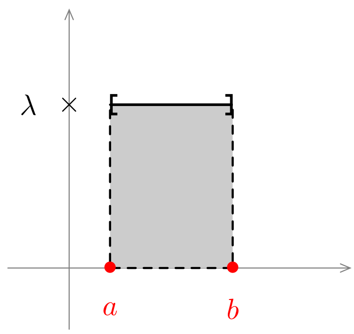
Exemples :



- *Pour la fonction partie entière sur* $[0\,;3]$ *:*
- *Si f est constante égale à λ, alors f est en escalier et* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \times (b-a)$. *L'intégrale d'une fonction constante est égale à la valeur de la constante multipliée par la longueur de l'intervalle. On retrouve le fameux :*

On note parfois cette intégrale, par abus de langage, $\displaystyle\int_a^b \lambda\,\mathrm{d}t$, qui est donc égale à $\lambda \times (b-a)$.

« aire d'un rectangle = longueur × largeur = $\lambda \times (b-a)$ *».*



2) Propriétés

a) Relation de Chasles

Proposition (relation de Chasles). *Soit $f \in \mathscr{E}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$. Soit $c \in\,]a\,;b[$. Alors*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Soit $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision adaptée à f : pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$, notons y_i la valeur de f sur $]a_i\,;a_{i+1}[$.

Supposons dans un premier temps que $c \in \sigma$: il existe donc $i_0 \in [\![1\,;n-1]\!]$ (car $c \in\,]a\,;b[$) tel que $c = a_{i_0}$. On a alors $a_0 = a$, $a_{i_0} = c$ et $a_0 < a_1 < \cdots < a_{i_0} = c$, c'est-à-dire que $\sigma_g = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant i_0}$ est une subdivision de $[a\,;c]$. De plus, f est constante égale à y_0 sur $]a_0\,;a_1[$, constante égale à y_1 sur $]a_1\,;a_2[$, ..., constante égale à y_{i_0-1} sur $]a_{i_0-1}\,;a_{i_0}[$: f est en escalier sur $[a\,;c]$, σ_g est adaptée à f et :

$$\int_a^c f(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{i_0-1} y_i(a_{i+1}-a_i).$$

De même, f est en escalier sur $[c\,;b]$, $\sigma_d = (a_i)_{i_0\leqslant i\leqslant n}$ est une subdivision de $[c\,;b]$ adaptée à f et

$$\int_c^b f(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=i_0}^{n-1} y_i(a_{i+1}-a_i).$$

Finalement :

$$\begin{aligned}\int_a^c f(f)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{i=0}^{i_0-1} y_i(a_{i+1}-a_i) + \sum_{i=i_0}^{n-1} y_i(a_{i+1}-a_i)\\ &= \sum_{i=0}^{n-1} y_i(a_{i+1}-a_i) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On assimile σ à l'ensemble de ses éléments.

Si c n'appartient pas à σ, notons $\sigma' = \sigma \cup \{c\}$: σ' est plus fine que σ donc est encore adaptée à f, et $c \in \sigma'$, donc le premier cas permet de conclure. □

b) Linéarité

Proposition (linéarité). *Soient f et g dans $\mathscr{E}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$. Soient λ et μ dans $\mathbb{K}$. Alors*

$$\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Ce résultat découle immédiatement de la linéarité de la somme. Prouvons-le pour nous familiariser avec la définition d'une intégrale. Soit $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision de $[a\,;b]$ adaptée à f et g. Pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$, notons y_i la valeur de f et z_i la valeur de g sur $]a_i\,;a_{i+1}[$. Il en découle que $\lambda y_i + \mu z_i$ est constante égale à $\lambda f + \mu g$ sur $]a_i\,;a_{i+1}[$. On en déduit que, d'une part, σ est adaptée à $\lambda f + \mu g$, et d'autre part, que :

Ici, on utilise la linéarité de la somme.

$$\begin{aligned}\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t &= \sum_{i=0}^{n-1}(\lambda y_i + \mu z_i)\times(a_{i+1}-a_i)\\ &= \lambda\sum_{i=0}^{n-1} y_i\times(a_{i+1}-a_i) + \mu\sum_{i=0}^{n-1} z_i\times(a_{i+1}-a_i)\\ &= \lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient :

Corollaire. *Soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions en escalier sur $[a\,;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des éléments de $\mathbb{K}$. Alors*

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t$$

c) Modification d'un nombre fini de valeurs

En d'autres termes, les valeurs prises par une fonction continue par morceaux en des points isolés ne changent pas la valeur de l'intégrale.

Proposition. *Soient f et g deux fonctions de $\mathscr{E}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$ qui ne diffèrent que d'un nombre fini de points. Alors*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. La fonction $h = f - g$ est en escalier et elle est nulle sauf en un nombre fini de points. Elle est constante égale à 0 sauf en ces points. Si on note $a_1, \dots, a_{p-1}$ les points en questions, ainsi que $a_0 = a$ et $a_p = b$, alors $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ est une subdivision adaptée à h. Dès lors :

$$\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{p-1} 0 \times (a_{i+1} - a_i) = 0.$$

Par linéarité, on en déduit que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (f(t) - g(t))\,\mathrm{d}t = 0. \qquad \square$$

d) Propriétés de positivité et de croissance

Proposition (propriété de positivité). *Soit $f \in \mathscr{E}([a\,;b]\,,\mathbb{R})$. Supposons que f est positive sur $[a\,;b]$. Alors*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Démonstration. Soit $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision adaptée à f. Pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$, notons y_i la valeur de f sur $]a_i\,;a_{i+1}[$. Par hypothèse, $y_i \geqslant 0$ et $a_{i+1} - a_i > 0$ si bien que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \times (a_{i+1} - a_i) \geqslant 0. \qquad \square$$

Remarques :

- La valeur de l'intégrale étant inchangée si on modifie la valeur de f en un nombre fini de points (cf. paragraphe précédent), le résultat ci-dessus est encore valable si f est positive sur $[a\,;b]$ privé d'un nombre fini de points.
- Si f est négative, la même démonstration assure que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant 0$: on pourrait appeler ce résultat « la négativité de l'intégrale », mais on parle plutôt de positivité de l'intégrale, même lorsque f est négative.

Si f n'est pas de signe constant, on ne peut pas conclure quant au signe de son intégrale.

Proposition (propriété de croissance). *Soient f et g dans $\mathscr{E}([a\,;b]\,,\mathbb{R})$. Supposons que $f \leqslant g$ sur $[a\,;b]$. Alors*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. La fonction $g-f$ est alors continue par morceaux et positive sur $[a\,;b]$. La propriété de positivité assure donc que $\displaystyle\int_a^b (g(t)-f(t))\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. Par linéarité, il vient que

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0,$$

ce qui permet de conclure. □

e) Inégalité triangulaire

Théorème (inégalité triangulaire). *Soit $f \in \mathscr{E}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$. Alors*

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Lorsque $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+$, on a $-y \leqslant x \leqslant y$ si et seulement si $|x| \leqslant y$.

Démonstration. Les fonctions f et $|f|$ sont continues par morceaux et on a $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$. Par propriété de croissance des intégrales, il vient que

$$-\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b -|f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t,$$

ce qui permet de conclure. □

IV Intégrale d'une fonction continue par morceaux

1) Définition

Proposition. *Soit $f \in \mathscr{C}^{pm}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$.*

1. *Pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier telle que $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*
2. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de fonctions en escalier telles que $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\|g_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b g_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

On sait qu'il existe une telle fonction en escalier d'après le théorème d'approximation du paragraphe II.4.b.

On rappelle que $\|f_n - f\|_\infty$ est la borne supérieure de $|f_n - f|$ et que f est bornée car continue par morceaux.

Démonstration.

□

On dit encore que f est l'intégrande de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Dans la première notation, t est une variable muette.

Définition. *Soit $f \in \mathscr{C}^{pm}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$. On appelle intégrale de f sur $[a\,;b]$ (ou de a à b), la limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est n'importe quelle fonction en escalier vérifiant $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On la note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_{[a\,;b]} f$.

Remarques :

- Cette définition est très satisfaisant géométriquement : on définit l'aire sous la courbe à l'aide de « petits » rectangles approchant de mieux en mieux la partie du plan située sous la courbe. La définition ne dépend pas de la façon de réaliser cette approximation.
- Lorsque f est continue par morceau, on emploie la même notation pour son intégrale que pour les intégrales de fonctions en escalier formant une suite donc elle est limite. Ce n'est pas un problème puisque cette nouvelle définition d'une intégrale prolonge cette d'une fonction en escalier. En effet, si f est en escalier, elle est continue par morceaux et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escalier telle que $\|f_n - f\|_\infty = \|f - f\|_\infty = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et

$$\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

  Cette limite est l'intégrale de f en tant que fonction en escalier mais aussi, par définition, l'intégrale de f en tant que fonction continue par morceaux.
- Dans la pratique on n'utilise jamais cette définition en tant que limite pour calculer une intégrale (elle est très peu maniable pour les calculs) mais plutôt, vous le savez déjà, le théorème fondamental de l'analyse lorsque f est continue (cf. paragraphe V.1.a). On verra aussi comment s'y ramener pour calculer l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.

Cela ne veut pas dire pour autant que toutes les propriétés des intégrales de fonctions en escalier se prolongent immédiatement aux intégrales de fonctions continues. Il y a du travail pour l'affirmer et c'est l'objet du prochain paragraphe.

Proposition. *Si $f \in \mathscr{C}^{pm}([a\,;b]\,,\mathbb{R})$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$.*

Cela peut sembler évident. Le doute pouvait subsister dans la mesure où f pourrait être aussi approchée par une suite de fonctions en escalier à valeurs complexes. Mais, à la limite, on obtient à réel dans tous les cas.

Démonstration. Le théorème d'approximation énoncé dans le paragraphe II.4.c assure qu'il existe une suite de fonctions en escalier à valeurs réelles $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Puisque, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$, on obtient bien un réel à la limite et donc $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$. □

2) Propriétés

a) Relation de Chasles

Proposition (relation de Chasles). *Soit $f \in \mathscr{C}^{pm}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$. Soit $c \in]a\,;b[$. Alors*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration.

$\square$

b) Linéarité

Proposition (linéarité). *Soient f et g dans $\mathscr{C}^{pm}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$. Soient λ et μ dans $\mathbb{K}$. Alors*
$$\int_a^b \big(\lambda f(t)+\mu g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de fonctions en escalier telles que $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\|g_n - g\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\lambda f_n + \mu g_n$ est en escalier. Par inégalité triangulaire sur la norme infinie,

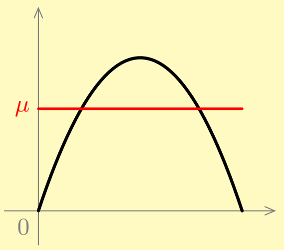
car $\mathscr{E}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$ est stable par multiplication externe et pas somme.

$$\begin{aligned}\|(\lambda f_n+\mu g_n)-(\lambda f+\mu g)\|_\infty &= \|\lambda(f_n-f)+\mu(g_n-g)\|_\infty\\ &\leqslant |\lambda|\,\|f_n-f\|_\infty + |\mu|\,\|g_n-g\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Ainsi :
$$\int_a^b \big(\lambda f(t)+\mu g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \big(\lambda f_n(t)+\mu g_n(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$
Mais, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier entraîne que
$$\begin{aligned}\int_a^b \big(\lambda f_n(t)+\mu g_n(t)\big)\,\mathrm{d}t &= \lambda\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t + \mu\int_a^b g_n(t)\,\mathrm{d}t\\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On conclut pas unicité de la limite. $\square$

En d'autres termes, μ est la constante dont l'intégrale est égale à l'intégrale de f :



D'où son nom de valeur moyenne.

La proposition suivante découle de la linéarité de l'intégrale :

Proposition/Définition (valeur moyenne d'une fonction). *Soit $f\in\mathscr{C}^{pm}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$. On appelle valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$, la quantité*
$$\mu = \frac{1}{b-a}\times\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$
On a alors
$$\int_a^b \mu\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition (partie réelle/imaginaire d'une intégrale). *Soient $f \in \mathscr{C}^{pm}([a\,;b]\,,\mathbb{C})$. On a*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{Re}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{Im}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. On a $f = \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f)$ donc, par linéarité,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t.$$

On a vu dans le paragraphe IV.1 que l'intégrale d'une fonction continue par morceaux à valeurs réelles est à valeurs réelles si bien que $\int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$ et $\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$. On conclut par unicité des parties réelles et imaginaires d'un complexe. □

c) Modification d'un nombre fini de valeurs

En d'autres termes, les valeurs prises par une fonction continue par morceaux en des points isolés ne changent pas la valeur de l'intégrale.

Proposition. *Soient f et g deux fonctions de $\mathscr{C}^{pm}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$ qui ne diffèrent que d'un nombre fini de points. Alors*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. La fonction $f-g$ est nulle sauf en un nombre fini de points. Il s'agit donc d'une fonction en escalier et son intégrale est nulle (cf. paragraphe III.2.C). Par linéarité, on en déduit que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (f(t)-g(t))\,\mathrm{d}t = 0.$$

□

d) Propriétés de positivité et de croissance

Il faut également avoir $a < b$ (ce cas pourrait se produire après le paragraphe IV.3).

Proposition (propriété de positivité). *Soit $f \in \mathscr{C}^{pm}([a\,;b]\,,\mathbb{R})$. Supposons que f est positive sur $[a\,;b]$. Alors*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Démonstration.

□

Il faut également avoir $a < b$ (ce cas pourrait se produire après le paragraphe IV.3).

Proposition (propriété de croissance). *Soient f et g dans $\mathscr{C}^{pm}([a\,;b]\,,\mathbb{R})$. Supposons que $f \leqslant g$ sur $[a\,;b]$. Alors*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. La fonction $g - f$ est alors continue par morceaux et positives sur $[a\,;b]$. La propriété de croissance assure donc que $\int_a^b (g(t) - f(t))\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. Par linéarité, il vient que

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0,$$

ce qui permet de conclure. □

e) Propriété de stricte positivité

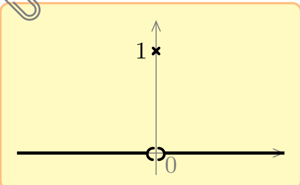
Ce résultat est faux en général pour une fonction continue par morceaux.

Proposition. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ **continue** et **positive**. Soient $(a,b) \in I^2$ tel que $a < b$.*

- *Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est nulle sur $[a\,;b]$.*
- *Si f n'est pas identiquement nulle sur $[a\,;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$.*

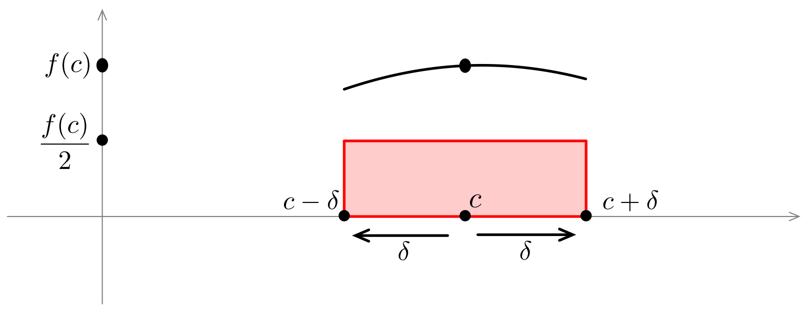
Remarques :

- Ce résultat est faux si f est simplement continue par morceaux. Par exemple l'indicatrice de $\{0\}$ a une intégrale nulle, est positive, mais n'est pas nulle sur $[-1\,;1]$. Dans le cas d'une fonction continue par morceaux, on peut juste conclure qu'elle est nulle là où elle est continue.
- Ce résultat est également faux si f n'est pas positive. Par exemple, $\displaystyle\int_0^\pi \cos(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
- Il faut également avoir $a < b$. Ce cas pourrait se produire après le paragraphe IV.3 (toujours vérifier que les bornes sont dans l'ordre croissant et ne sont pas égales).



Une autre démonstration sera proposée dans le paragraphe V.1.b.

Démonstration. Les deux assertions de la proposition sont équivalentes puisqu'elles sont la contraposée l'une de l'autre. Supposons que f n'est pas la fonction nulle sur le segment $[a\,;b]$.



$\square$

Exemple : *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale de Wallis $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$ est strictement positive puisque c'est l'intégrale d'une fonction continue, positive, non identiquement nulle sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.*

f) Inégalité triangulaire

Théorème (inégalité triangulaire). *Soit $f \in \mathscr{C}^{pm}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$. Alors*

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Il faut également avoir $a < b$ (ce cas pourrait se produire après le paragraphe IV.3).

Démonstration. Les fonctions f et $|f|$ sont continues par morceaux et on a $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$. Par propriété de croissance des intégrales, il vient que

$$-\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b -|f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t,$$

ce qui permet de conclure. $\square$

Lorsque $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+$, on a $-y \leqslant x \leqslant y$ si et seulement si $|x| \leqslant y$.

3) Extension aux fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Définition. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$. on dit que f est continue par morceaux sur I si f est continue par morceaux sur tout segment inclus dans I.*

Exemple : *La fonction partie entière est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.*

Elle n'est pas en escalier sur $\mathbb{R}$ car, par définition, une fonction en escalier est définie sur un segment !!

Définition. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux sur I. Soit $(a,b) \in I^2$.*

- *Si $a = b$, on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.*
- *Si $a > b$, on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$.*

Ainsi, par définition,

$$\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Pour la preuve, il suffit d'examiner tous les cas possibles ($a \leqslant b < c$, $a < b < c$, $c < a \leqslant b$ etc.) et d'utiliser la relation de Chasles que l'on sait vraie quand les trois bornes sont dans l'ordre strictement croissant.

La linéarité de la partie réelle/imaginaire et l'invariance par modification d'un nombre fini de valeurs restent également valables si $a \geqslant b$ puisqu'elle sont des conséquences immédiates de la linéarité.

Cette version de l'inégalité triangulaire se démontre en faisant deux cas selon que $a < b$ ou $a > b$ (le cas où $a = b$ étant immédiatement vrai).

Proposition (relation de Chasles). *Soit $f \in \mathscr{C}^{pm}(I, \mathbb{K})$. Pour tous a, b et c dans I,*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition (linéarité). *Soient f et g dans $\mathscr{C}^{pm}(I, \mathbb{K})$. Soient λ et μ dans $\mathbb{K}$. Pour tous a et b dans I,*

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

⚠ Les propriétés de positivité et de croissance, ainsi que l'inégalité triangulaire pour les intégrales de a à b ne sont plus valables lorsque $a > b$. En effet, si c'est le cas, on se ramène à des intégrales dont les bornes sont dans le « bon sens » en multipliant par -1, ce qui a pour effet de renverser les inégalités. Il est donc vivement conseillé de toujours remettre les bornes « dans le bon sens », en mettant un moins devant, quand on rencontre des intégrales pour lesquelles ce n'est pas le cas, avant d'appliquer ces propriétés. Néanmoins, pour l'inégalité triangulaire on peut retenir :

$$\forall (a,b) \in I^2, \qquad \left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_{\min\{a;b\}}^{\max\{a;b\}} |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

V Calcul d'intégrales

Nous venons de construire rigoureusement la notion d'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Mais comment calculer une intégrale ? Comment étudier une fonction définie à l'aide d'une intégrale ? C'est ce que nous allons voir dans ce paragraphe.

1) Calculs d'intégrales de fonctions continues

a) Le théorème fondamental de l'analyse

Théorème. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur I. Pour tout $a \in I$, la fonction*

$$F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a. En particulier F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Démonstration.

$\square$

Corollaire. *Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.*

Corollaire. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur I. Pour tout $(a,b) \in I^2$, on a*

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to b^-]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \textit{et} \qquad \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to a^+]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ce théorème sera l'ingrédient principal pour définir des intégrales généralisées en seconde année (par exemple des intégrales dont une borne est infinie, ou n'étant pas définie en une borne).

Démonstration. La première limite est simplement la conséquence de la continuité sur I (donc en b) de la fonction F du théorème fondamental de l'analyse. La deuxième limite s'obtient de façon analogue en prenant l'opposée de l'intégrale (ce qui a pour effet d'échanger les bornes). $\square$

Remarques :

- Soit f une fonction définie sur $[a\,;b[$ qui est prolongeable par continuité en b. Son prolongement est alors une fonction $\widetilde{f}$ qui est continue sur $[a\,;b]$ tout entier. On a alors

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \widetilde{f}(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to b^-]{} \int_a^b \widetilde{f}(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Proposons une autre démonstration du cas d'égalité de la propriété de positivité de l'intégrale. Soit f continue et positive sur $[a\,;b]$. Supposons que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Puisque F est continue sur I, elle admet une primitive F. Comme f est positive sur I, on a $F' = f \geqslant 0$ donc F est croissante sur I. Soit $x \in [a\,;b]$. On a alors $F(a) \leqslant F(x) \leqslant F(a)$. Mais
$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$
donc $F(b) = F(a)$ et donc $F(x) = F(a)$. La fonction F est donc constante sur $[a\,;b]$. On en déduit que $f = F'$ est nulle sur $[a\,;b]$.

Une autre preuve a été proposée dans le chapitre 19.

- Conformément au programme, démontrons l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs complexes en utilisant l'inégalité triangulaire (et le théorème fondamental de l'analyse). Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur I avec f' bornée sur I.

b) Conséquence : trois théorèmes de calcul

Nous renvoyons alors au chapitre 10 pour leur démonstration et pour de nombreux exemples de calcul. Les calculs ne sont pas le but du présent chapitre.

Dans le chapitre 10, le théorème fondamental de l'analyse (alors admis) nous a permis de montrer ces trois théorèmes fondamentaux pour le calcul :

Théorème. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Pour tout $(a, b) \in I^2$,*
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Théorème (formule d'intégration par parties – IPP). *Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et à valeurs complexes. Soient $(a, b) \in I^2$. Alors*
$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème (formule de changement de variable). *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue sur I. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur J telle que $\varphi(J) \subset I$. Pour tout $(\alpha, \beta) \in J^2$,*
$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

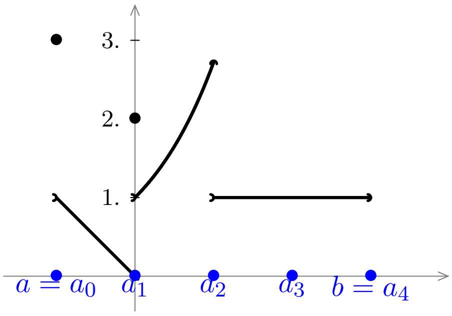
On dit que l'on effectue le changement de variable $t = \varphi(u)$.

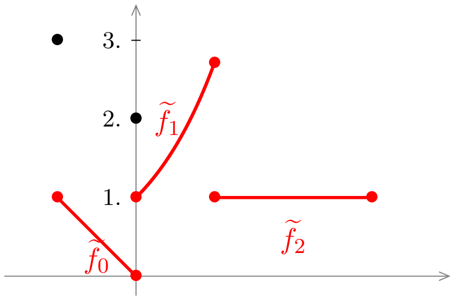
2) Calcul d'intégrales de fonctions continues par morceaux

Dans le paragraphe II.3, nous avons vu que, si f est une fonction continue par morceaux sur $[a\,;b]$ et si $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une subdivision adaptée à f alors, pour tout $i \in [\![1\,;n-1]\!]$, la restriction $\widetilde{f}_i$ de f à $]a_i\,;a_{i+1}[$ est prolongeable en une fonction continue sur $[a_i\,;a_{i+1}]$, notée $\widetilde{f}_i$.

Comme on l'a dit dans le paragraphe II.3, ce n'est pas f qu'on prolonge car elle est déjà définie en les a_i.

Ci-dessous, à gauche, le graphe d'une fonction continue par morceaux, et à droite, le graphe avec les $\widetilde{f}_i$.





Proposition. *Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux sur $[a\,;b]$. Soit $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision adaptée à f. Alors :*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \widetilde{f}_i(t)\mathrm{d}t$$

où, pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$, $\widetilde{f}_i$ est la fonction continue sur $[a_i\,;a_{i+1}]$ qui coïncide avec f sur $]a_i\,;a_{i+1}[$.

Démonstration. D'après la relation de Chasles :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\mathrm{d}t$$

On retrouve le fait que les valeurs des points isolés n'ont aucune incidence sur la valeur de l'intégrale. Par exemple, ci-dessous, les valeurs en -1, et 0 n'interviennent pas.

Or, pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$, f et $\widetilde{f}_i$ sont égales sauf en a_i et a_{i+1} donc en un nombre fini de points donc ont la même intégrale, ce qui permet de conclure. $\square$

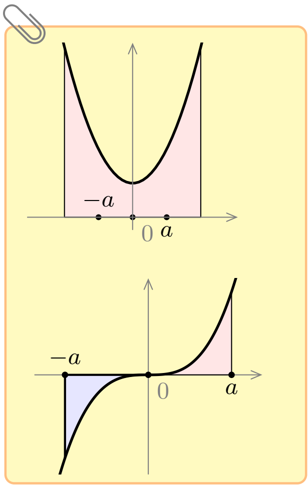
En d'autres termes, quand on a une fonction continue par morceaux, dont la définition n'est pas la même selon l'intervalle sur lequel on se place, on calcule son intégrale en calculant l'intégrale des fonctions continues qui « la constituent », sur chaque intervalle formé par les points de la subdivision.

Exemple : *Reprenons l'exemple de la fonction*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [-1\,;3] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccl} 3 & \textit{si} & x = -1 \\ -x & \textit{si} & x \in]-1\,;0[\\ 2 & \textit{si} & x = 0 \\ \mathrm{e}^x & \textit{si} & x \in]0\,;1] \\ 1 & \textit{si} & x \in]1\,;3] \end{array} \right. \end{array} \right.$$

du paragraphe II.3. Alors :

3) Intégrales de fonctions paires, impaires, périodiques.



Proposition (intégrales et parité). *Soient $a > 0$ et f une fonction continue par morceaux sur $[-a\,;a]$ et à valeurs complexes.*

- *Si f est paire, alors* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$
- *Si f est impaire, alors* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

Démonstration. La preuve a déjà faite dans le chapitre 10 lorsque f est continue. Supposons f continue par morceaux sur $[-a\,;a]$ et considérons une subdivision σ adaptée à f. Si ce n'est pas déjà le cas, ajoutons 0 à la subdivision σ et ajoutons lui les opposés de toutes les valeurs de la subdivision. On obtient alors une subdivision $\sigma' = (a_0, \ldots, a_{p-1}, a_p, a_{p+1}, \ldots, a_{2p})$ avec $a_p = 0$ et, pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, $a_{p-i} = -a_{p+i}$. On utilise alors la proposition du paragraphe précédent :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{p-1}\left(\int_{a_{p-i-1}}^{a_{p-i}} \widetilde{f}_{p-i}(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a_{p+i}}^{a_{p+i+1}} \widetilde{f}_{p+i}(t)\,\mathrm{d}t\right),$$

où, pour tout $i \in [\![0\,;2p-1]\!]$, $\widetilde{f}_i$ est la fonction continue sur $[a_i\,;a_{i+1}]$ qui coïncide avec f sur $]a_i\,;a_{i+1}[$.

Pour tout $i \in [\![0\,;p-1]\!]$, $\widetilde{f}_{p-i}$ est continue sur l'intervalle $[a_{p-i-1}\,;a_{p-i}]$ donc on peut effectuer le changement de variable $t = -x$ (avec $x \longmapsto -x$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a_{p-i-1}\,;a_{p-i}]$) :

$$\int_{a_{p-i-1}}^{a_{p-i}} \widetilde{f}_{p-i}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-a_{p-i-1}}^{-a_{p-i}} \widetilde{f}_{p-i}(-x)\,(-\mathrm{d}x) = \int_{a_{p+i}}^{a_{p+i+1}} \widetilde{f}_{p-i}(-x)\,\mathrm{d}x.$$

Dès lors

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{p-1}\int_{a_{p+1}}^{a_{p+i+1}} \left(\widetilde{f}_{p-i}(-t) + \widetilde{f}_{p+i}(t)\right)\mathrm{d}t.$$

- Si f est paire sur $]-a\,;a[$, pour tout $i \in [\![0\,;p-1]\!]$ et $t \in\,]a_{p+i}\,;a_{p+i+1}[$, $\widetilde{f}_{p-i}(-t) = f(-t) = f(t) = \widetilde{f}_{p+i}(t)$ et cette relation reste valable aux deux bornes par continuité. On obtient alors :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{p-1}\int_{a_{p+1}}^{a_{p+i+1}} 2\widetilde{f}_{p+i}(t)\,\mathrm{d}t = 2\sum_{i=0}^{p-1}\int_{a_{p+1}}^{a_{p+i+1}} \widetilde{f}_{p+i}(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Si f est impaire sur $]-a\,;a[$, pour tout $i \in [\![0\,;p-1]\!]$ et $t \in\,]a_{p+i}\,;a_{p+i+1}[$, $\widetilde{f}_{p-i}(-t) = f(-t) = -f(t) = -\widetilde{f}_{p+i}(t)$ et cette relation reste valable aux deux bornes par continuité. On obtient alors :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{p-1}\int_{a_{p+1}}^{a_{p+i+1}} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

□

Proposition (intégrales et périodicité). *Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. Soient f une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ qui est T-périodique sur $\mathbb{R}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a*

$$\int_{a}^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Proposons deux preuves dans le cas où f est continue sur $\mathbb{R}$.

- **Première preuve.**

- **Deuxième preuve.** Notons $n = \left\lfloor \frac{a}{T} \right\rfloor$ de sorte que $nT \leqslant a < (n+1)T \leqslant a + nT$. On a alors, par relation de Chasles,

$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{nT} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{(n+1)T}^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

  ⋆ Le changement de variable $t = x + T$ dans la troisième intégrale donne :

$$\int_{(n+1)T}^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{nT}^{a} f(x+T)\,\mathrm{d}x = -\int_a^{nT} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

  ⋆ Le changement de variable $t = x + nT$ dans la deuxième intégrale donne :

$$\int_{nT}^{(n+1)T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{T} f(x+T)\,\mathrm{d}x = \int_0^{T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

  Dès lors,

$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{nT} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{T} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{nT} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La preuve du cas continu par morceaux est une fois de plus fastidieuse (on considère une subdivision périodique de $[0\,;(n+2)T]$ si $a > 0$ ou de $[nT\,;T]$ si $a < 0$, on découpe avec la relation de Chasles et on fait les mêmes changements de variable).

La deuxième preuve s'adapte bien dans le cas d'une fonction continue par morceaux en utilisant la relation de Chasles. Elle est laissée en exercice. □

4) Technique de comparaison à une intégrale

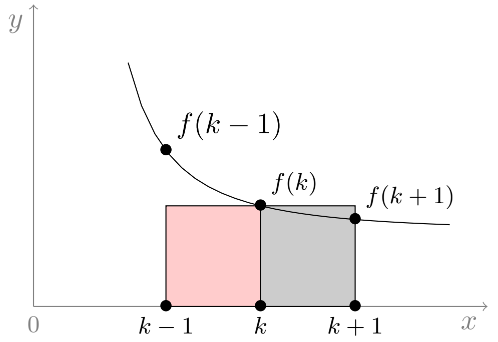
Faisons un constat : on sait beaucoup plus souvent calculer une intégrale qu'une somme (grâce au théorème fondamental de l'analyse). Voyons dans ce paragraphe une technique permettant de comparer des sommes et des intégrales afin de pouvoir, à défaut de les calculer, prouver des encadrements de sommes.

Cette méthode est valable pour des fonctions continues par morceaux. Néanmoins, nous ne l'appliquerons que pour des fonctions continues, et nous allons calculer des intégrales en primitivant (donc des intégrales de fonctions continues) : d'où la présence de ce paragraphe dans cette partie.

Considérons une fonction f par morceaux décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

On pourrait presque affirmer ces inégalités sans preuve en vertu du dessin ci-dessous où $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t$ est l'aire rouge et $\displaystyle\int_{k}^{k+1} f(t)\mathrm{d}t$ l'aire grise.



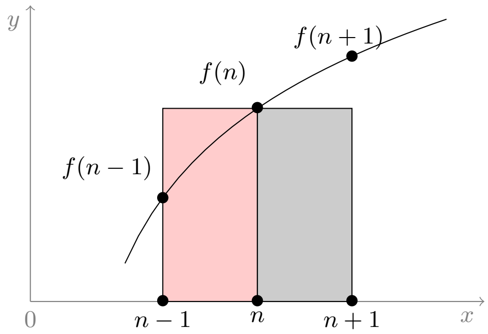
Les trois inégalités encadrées ci-dessus sont très utiles en pratique. Il saut savoir les retrouver.

Exemple : *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.*

Ce n'est pas parce que le quotient de deux suites tend vers 1 que leur différence tend vers 0 ! ! Pensez simplement à $\dfrac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ quand $n+1-n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

On a $\gamma \approx 0,577$.

Remarque : On peut montrer des résultats analogues pour les fonctions croissantes .



5) Fonctions et suites définies par une intégrale

a) Le cas des bornes variables avec intégrande fixe

Il n'y a aucun résultat à connaître par cœur mais les exercices faisant intervenir ce type de fonctions sont très classiques et il faut connaître les grandes lignes de leur étude (même si elle est en générale guidée).

On se donne $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux sur I. On considère deux fonctions u et v définies sur J et à valeurs dans I. On introduit enfin la fonction :

$$G : x \longmapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Justification que G est définie sur J. Il suffit de se donner $x \in J$ puis de dire que $u(x)$ et $v(x)$ appartiennent à I. Dès lors, comme f est continue par morceaux sur I, elle l'est sur le segment $[u(x)\,;v(x)]$ (ou $[v(x)\,;u(x)]$) et donc l'intégrale définissant $G(x)$ existe. Ainsi G est définie sur J.

Dire que f est définie sur I est incomplet, dire que f est définie sur J est faux, dire que f est dérivable sur I n'est pas le bon argument donc peut être considéré comme faux.

Justification que G est paire ou impaire sur J. On se donne $x \in J$, on vérifie que $-x \in J$ puis on considère l'intégrale donnant $G(-x)$. En général, on effectue le changement de variable $t = -s$ et on utilise les parités de u, v et f pour conclure.

Justification que G est continue sur J. Il suffit de dire que f est continue sur I donc admet une primitive F sur I. Dès lors :

$$\forall x \in I, \qquad G(x) = F(v(x)) - F(u(x)).$$

On démontre alors que u et v sont continues sur I. Comme elles sont à valeurs dans J et que F est continue sur I (car c'est une primitive donc est dérivable), il s'ensuit que G est continue sur I.

Justification que G est dérivable sur J. On poursuit le point précédent en ajoutant la dérivabilité de u et v sur I. Comme F est dérivable sur I, G aussi et donc

$$\forall x \in I, \qquad G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

Nous avons déjà montré cela dans le chapitre 10. C'est si classique que la formule donnant $G'(x)$ peut raisonnablement être donnée sans refaire toute la démonstration à condition de bien justifier la dérivabilité de u, v et F sur leurs domaines respectifs.

puisque $F' = f$. Même s'il n'est pas envisageable de calculer $G(x)$ pour tout $x \in J$, la formule ci-dessus donne $G'(x)$ de façon explicite. On peut alors simplifier et espérer déterminer le signe de G' pour étudier les variations de G.

Justification que G est de signe constant sur J. On peut bien sûr exploiter les variations de G si on a pu les obtenir par l'étude du signe de la dérivée. Sinon on peut tenter d'utiliser la propriété de positivité de l'intégrale.

Déterminer la limite de G en un point.

- Si on demande la limite en un réel α de J, la continuité de G assure que la limite est $G(\alpha)$. A minima, cela permet de justifier son existence mais on n'arrive pas à la calculer en général.

La stratégie ci-contre s'applique aux fonctions à valeurs complexes sauf ce qui concerne la positivité, les majorations et les limites infinies bien sûr.

- Sinon il faut voir au cas par cas.
  - ⋆ Pour montrer que G tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) en un point adhérent à J, une méthode classique est de minorer (respectivement majorer) f sur $[u(x)\,;v(x)]$ par une fonction dont au sait calculer l'intégrale puis montrer que cette dernière tend vers $+\infty$ et enfin conclure avec la propriété de croissance des intégrales et le théorème de minoration (respectivement majoration).
  - ⋆ Pour des limites finies, on peut tenter d'encadrer l'intégrande par des intégrales que l'on sait calculer et conclure avec la propriété de croissance des intégrales et le théorème d'encadrement.

Montrer que g est bornée dans le cas où f est de signe constant. Supposons que f est positive sur I et qu'il existe m et M des réels tels que, pour tout $x \in J$, $m \leqslant u(x) \leqslant v(x) \leqslant M$. D'après la relation de Chasles et la propriété de positivité des intégrales,

$$0 \leqslant G(x) = \int_{u(x)}^{m} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{m}^{M} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{M}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0 + \int_{m}^{M} f(t)\,\mathrm{d}t + 0.$$

Exemple : *Considérons* $G : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \displaystyle\int_{x}^{x^2} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$

b) Les cas des bornes fixes et intégrande variable

Lorsque les bornes et l'intégrandes sont variables (rare), on se ramène au cas ci-contre en utilisant des indicatrices. Nous ne rencontrerons pas ce cas cette année.

On se donne $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que, pour tout $x \in J$, $t \longmapsto f(t,x)$ est continue par morceaux sur I. Soient a et b dans I tels que $a < b$. On peut alors définir sur J la fonction

$$g : x \longmapsto \int_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}t.$$

- Pour tout point adhérent x_0 de J, a-t-on $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \int_a^b \lim\limits_{x\to x_0} f(t,x)\,\mathrm{d}t$?
- Lorsque, pour tout $t \in I$, $x \longmapsto f(t,x)$ est continue sur J, est-ce-que g est continue sur J ?
- Lorsque, pour tout $t \in I$, $x \longmapsto f(t,x)$ est dérivable en x_0, est-ce-que g est dérivable en x_0 ? Et a-t-on $g'(x_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)\,\mathrm{d}t$?

$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)$ désigne la dérivée en x_0 de la fonction $x \mapsto f(t,x)$ à t fixé. On parle de dérivée partielle. On en reparlera dans le chapitre 40.

Ces trois questions sont en fait similaires et peuvent se résumer ainsi : peut-on échanger les symboles $\lim$ et $\int$? Et bien non en général ! C'est une question centrale qui sera abordée en détail en deuxième année sous des hypothèses supplémentaires. En attendant (en première année), nous traiterons ces questions au cas pas cas dans des exemples (de façon guidée). Les ingrédients principaux seront le théorème d'encadrement et les formules de Taylor (cf. chapitre 25).

Un autre cas de figure similaire est celui-ci d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

avec $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur I. De même échanger, les symboles $\lim$ et $\int$ n'est pas permis en général et il faut l'aborder au cas pas cas.

Exemples :

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une IPP donne :*

$$\int_0^1 n^2 x \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = 1 - (n+1)\mathrm{e}^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$

par croissances comparées. Mais, pour tout $x \in [0\,;1]$, $n^2 x\mathrm{e}^{-nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissance comparées encore une fois. Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n^2 x\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = 1 \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} n^2 x\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$$

Cela illustre le fait qu'on ne peut pas échanger (en général) les symboles $\int$ et $\lim$.

- *Nous avons montré dans le chapitre 10 que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Ce résultat s'appelle le lemme de Riemann-Lebesgue. C'est un classique. Il est valable pour toute fonction continue par morceaux sur $[a\,;b]$ mais la preuve ci-contre ne fonctionne plus. On peut montrer facilement cette convergence dans le cas particulier où f est une fonction en escalier et étendre finalement le résultat en utilisant le théorème d'approximation des fonctions continues par morceaux par les fonctions en escalier. C'est l'objet d'un des exercices de la feuille de TD associée.

- *Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$. On a alors*

$$\int_a^b f(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

En effet :

VI Sommes de Riemann

Parmi les intégrales de fonctions en escalier qui approchent l'intégrale d'une fonction continue par morceaux, on trouve les sommes de Riemann.

1) Sommes de Riemann à gauche et à droite

a) Définitions

Définition. *Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux sur $[a\,;b]$.*

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la quantité*

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right)$$

est appelée somme de Riemann (à pas constant) à gauche associée à f.

Seule la somme de Riemann à gauche est officiellement au programme mais on rencontre l'autre très souvent.

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la quantité*

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right)$$

est appelée somme de Riemann (à pas constant) à droite associée à f.

Remarque : Via le changement de variable $i = k - 1$, on a aussi :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (k+1) \times \frac{b-a}{n}\right).$$

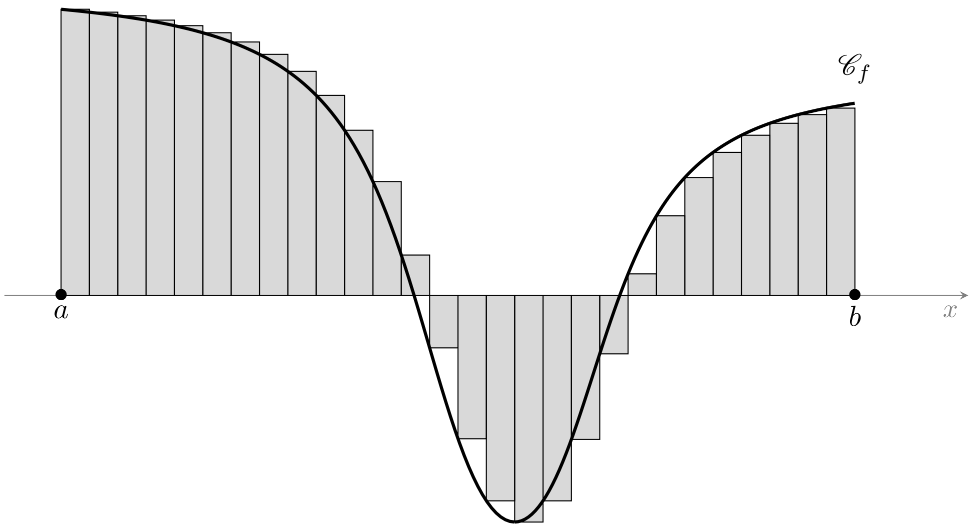
Interprétation géométrique. Que $(c_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ soit égal à $(k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ ou $(k+1)_{0 \leqslant k \leqslant n}$,

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + c_k \times \frac{b-a}{n}\right)$$

est l'intégrale d'une fonction φ en escalier sur $[a\,;b]$ qui vaut $f\left(a + c_k \times \dfrac{b-a}{n}\right)$ sur $\left[a + \frac{k(b-a)}{n}\,; a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}\right[$ pour tout $k \in [\![0\,; n-1]\!]$.

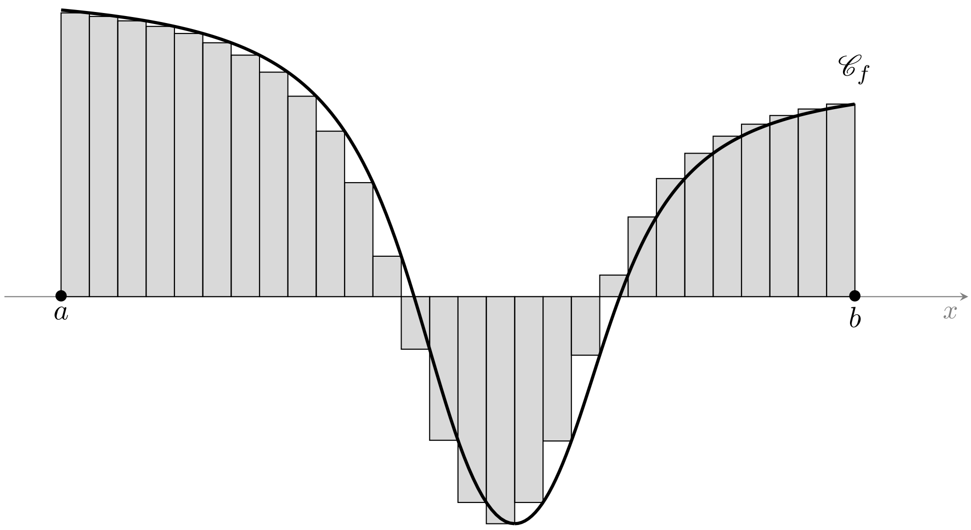
Le terme « gauche « vient du fait que le bord supérieur gauche de chacun des rectangles touche la courbe.

Dans l'exemple ci-dessous, f est continue sur $[a\,;b]$ et à valeurs réelles. On a colorié en gris la somme de Riemann à gauche $S_n(f)$ avec $n = 28$.



Le terme « droite « vient du fait que le bord supérieur droit de chacun des rectangles touche la courbe.

Dans l'exemple ci-dessous, f est continue sur $[a\,;b]$ et à valeurs réelles. On a colorié en gris la somme de Riemann à droite $S_n(f)$ avec $n = 28$.



b) Théorème de convergence

Dans ce paragraphe, f désigne une fonction de $[a\,;b]$ dans $\mathbb{R}$ et $(S_n(f))_{n\geqslant 1}$ désigne

$$\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)_{n\geqslant 1} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)_{n\geqslant 1}.$$

C'est une situation très classique : si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$, alors f' est bornée et donc l'IAF assure que f est K-Lipschitzienne avec $K=\max\limits_{[a\,;b]}|f'|$.

Théorème (cas Lipschitzien). *Soit $K\in\mathbb{R}_+^*$. Supposons que f est K-Lipschitzienne sur $[a\,;b]$. Alors*

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \qquad \left|S_n(f)-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{K(b-a)^2}{2n}.$$

En particulier :

$$S_n(f)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note :

- pour tout $k\in[\![0\,;n]\!]$, $a_k=a+\dfrac{k(b-a)}{n}$.
- pour tout $k\in[\![0\,;n-1]\!]$, $x_k=a+\dfrac{c_k(b-a)}{n}$ avec $c_k=k$ (si somme à gauche) ou bien $c_k=k+1$ (si méthode à droite).

et enfin

$$S_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{c_k(b-a)}{n}\right).$$

$\square$

Lorsque f est une fonction continue par morceaux, la convergence persiste mais pas l'inégalité globale du théorème précédent :

Théorème (cas continu par morceaux). *Supposons que f est continue par morceaux sur $[a\,;b]$. Alors*

$$S_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer le théorème dans le cas général est technique et n'apporte donc pas grand chose dans la pratique puisque la plupart des fonctions rencontrées sont continues (voire même de classe $\mathscr{C}^1$ donc Lipschitzienne) sur un segment.

DÉMONSTRATION. Cette démonstration n'est pas exigible conformément au programme. Traitons uniquement le cas où f est continue. Reprenons les notations de la démonstration précédente. Le début est exactement le même : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| S_n(f) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \big| f(x_k) - f(t) \big|\,\mathrm{d}t.$$

$\square$

On remplace f par $-f$ dans la preuve ci-contre si f est décroissante.

On reprend les notations a_k de la preuve des théorèmes précédents.

Remarque : La démonstration de ce théorème dans le cas particulier où f est monotone est particulièrement simple et mérite le détour. Supposons que f est croissante (et continue par morceaux) sur $[a\,;b]$. Notons $(S_n(f))_{n\geqslant 1}$ et $(T_n(f))_{n\geqslant 1}$ les suites des sommes de Riemann de f à droite et à gauche respectivement.

Il n'y a rien de surprenant à ce que cette preuve fonctionne aussi bien puisque, dans le cas où f est croissante, $T_n(f)$ est l'intégrale de la fonction en escalier φ construite dans la démonstration du théorème d'approximation (cf. paragraphe II.4.b) quand $S_n(f)$ est l'intégrale de la fonction en escalier ψ.

c) Exemples

Pour calculer une intégrale, on peut donc calculer la limite de la suite des sommes de Riemann (à gauche ou à droite) associés.

Exemple : *Notons f la fonction carré (qui est continue par morceaux) sur $[0\,;1]$. On a*

Mais, dans la pratique, on ne sait pas bien calculer les sommes. En revanche, on sait plutôt bien calculer des intégrales grâce au théorème fondamental de l'analyse (attention : quand la fonction est continue). Aussi les sommes de Riemann sont surtout utiles pour calculer des limites de sommes.

Exemple :

- *Déterminons la limite de* $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\right)_{n\geqslant 1}$.

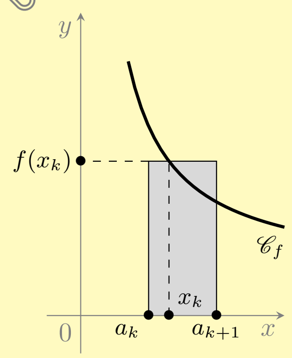
- *Déterminons la limite de la suite de terme général* $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n! \times n^n}\right)^{1/n}$.

2) Sommes de Riemann à pas quelconque (HP)

Dans la démonstration du cas Lipschitzien non plus d'ailleurs, à part à la fin de la preuve qui peut aussi s'adapter.

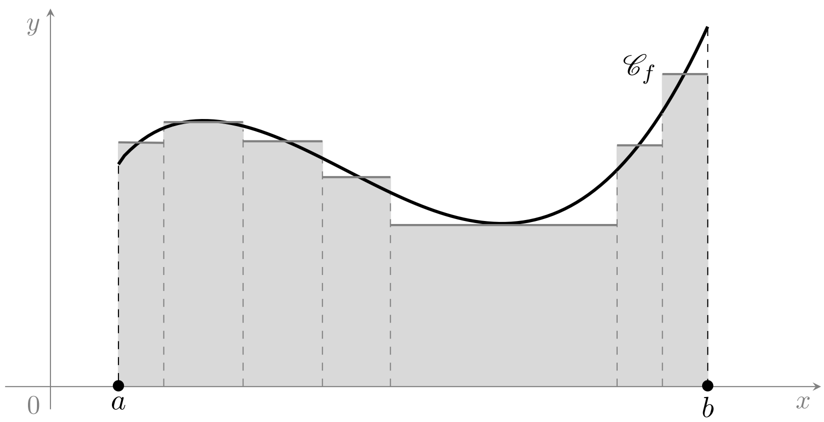
Dans la démonstration du cas continu, nous n'avons pas du tout utilisé la valeur exacte des a_k et des x_k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Ainsi, plus généralement, pour une fonction f continue sur $[a\,;b]$ et pour une subdivision $\sigma = (a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ quelconque de $[a\,;b]$, on aurait pu définir la somme de Riemann

$$S(\sigma, f) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)(a_{k+1} - a_k).$$



avec, pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, x_k quelconque entre a_k et a_{k+1}.
Les rectangles dont la somme des aires forme $S(\sigma, f)$ sont délimités par par les segments de la subdivision (largeur) et l'image du point choisi (hauteur) dans chaque segment.

Dans l'exemple ci-dessous, on a pris à chaque fois c_k le milieu de $[a_k\,;a_{k+1}]$:



Ici $p(\sigma) \to 0$ signifie que le pas de la subdivision tend vers 0 (ce qui entraîne que le nombre n d'éléments constituant la subdivision tend vers $+\infty$).

On obtient alors (encore une fois c'est la même preuve) :

$$S(\sigma, f) \xrightarrow[p(\sigma)\to 0]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

3) Introduction à la méthode des rectangles et des trapèzes

La méthode des rectangles est la méthode d'analyse numérique qui consiste à calculer une valeur approchée d'une intégrale à l'aide d'aires de rectangles, à l'aide de sommes de Riemann donc.

Les sommes de Riemann s'implémentent aisément avec un logiciel de calcul scientifique comme Python. Mais avec quelle complexité ? Autrement dit, combien de rectangles sont-ils nécessaires pour obtenir une approximation de l'intégrale avec une précision donnée ?

La borne $\dfrac{K(b-a)^2}{2n}$ est par ailleurs optimale parmi les fonctions K-Lipschitziennes. Cela ne signifie pas qu'elle l'est pour toute fonction (par exemple l'approximation est parfaite pour une fonction constante) mais qu'il existe des fonctions pour lesquelles l'erreur d'approximation vaut précisément $\dfrac{K(b-a)^2}{2n}$ (les fonctions affines de coefficient directeur K par exemple).

Donnons-nous $\varepsilon > 0$ qui représente la précision voulue.

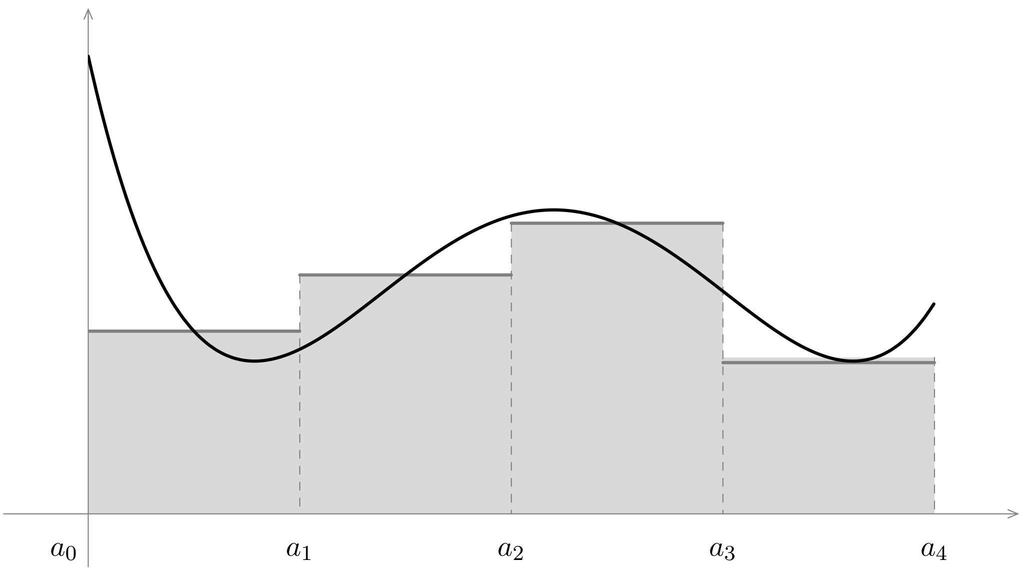
- Dans le cas où la fonction f est K-Lipschitzienne sur $[a\,;b]$, on a vu que l'écart entre $S_n(f)$ (une somme de Riemann à gauche ou à droite avec n rectangles) et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est inférieur à $\dfrac{K(b-a)^2}{2n}$. Il suffit donc de prendre $n = \left\lfloor \dfrac{K(b-a)^2}{2\varepsilon} \right\rfloor + 1$ pour que l'approximation se fasse à ε près.
- Dans le cas où la fonction f est monotone sur $[a\,;b]$, on a vu que l'écart entre $S_n(f)$ (une somme de Riemann à gauche ou à droite avec n rectangles) et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est inférieur à $\dfrac{(b-a)\,|f(b)-f(a)|}{n}$. Il suffit donc de prendre $n = \left\lfloor \dfrac{(b-a)\,|f(b)-f(a)|}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ pour que l'approximation se fasse à ε près.

Pour une fonction monotone et K-Lipschitzienne, c'est la première approximation qui est la meilleure des deux (d'un facteur 2). Mais, dans les deux cas, ces deux hypothèses indiquent une erreur de l'ordre de $\dfrac{1}{n}$. Par exemple, si $\varepsilon = 10^{-8}$ (c'est-à-dire si on veut une précision d'au moins 8 chiffres après la virgule), il faut prendre un nombre de rectangle de l'ordre de 10^8, ce qui est énorme ! Il ne faut pas perdre de vue que l'on cherchait déjà des valeurs approchées des intégrales des siècles avant l'invention des ordinateurs. Et, même avec un ordinateur, une somme de 10^8 termes est déjà lourde numériquement.

On peut faire bien mieux :

Elle tient son nom du fait que chaque rectangle touche la courbe en l'image du milieu des extrémités de sa base.

- **La méthode du point milieu.** C'est la méthode qui consiste à approcher numériquement $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par une somme de Riemann où, avec les notations du paragraphe précédent, $x_k = \dfrac{a_k + a_{k+1}}{2}$. Autrement dit, l'intégrale est approchée par
$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right)(a_{k+1} - a_k)$$
On peut montrer que l'erreur est de l'ordre de $\dfrac{1}{n^2}$. Par exemple, si $\varepsilon = 10^{-8}$ (c'est-à-dire si on veut une précision d'au moins 8 chiffres après la virgule), il faut prendre un nombre de rectangle de l'ordre de 10^4, ce qui est mieux mais toujours beaucoup.

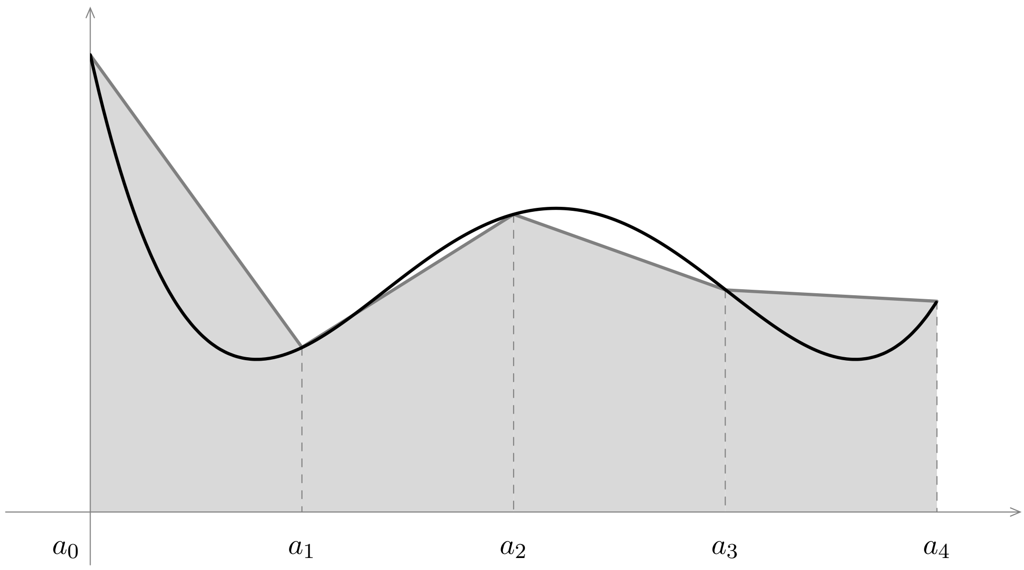


C'est comme si on « comblait le vide » laissé entre la courbe et chaque rectangle par l'aire d'un triangle. Cela consiste en fait à approcher l'intégrale par la moyenne arithmétique entre la somme de Riemann à gauche et la somme de Riemann à droite.

- **La méthode des trapèzes.** Sur chaque $[a_k\,;a_{k+1}]$, on approche la courbe de f par la fonction affine qui coïncide avec f en a_k et a_{k+1}. On approche alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par la somme des aires sous les courbes de ces approximations, ce qui donne une somme d'aire de trapèzes. Après calcul, si on prend une subdivision régulière, on obtient que l'intégrale est approchée par

$$\frac{b-a}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)+f\left(a+(k+1)\,\frac{b-a}{n}\right)\right).$$

Là encore, on peut montrer que l'erreur est de l'ordre de $\dfrac{1}{n^2}$.

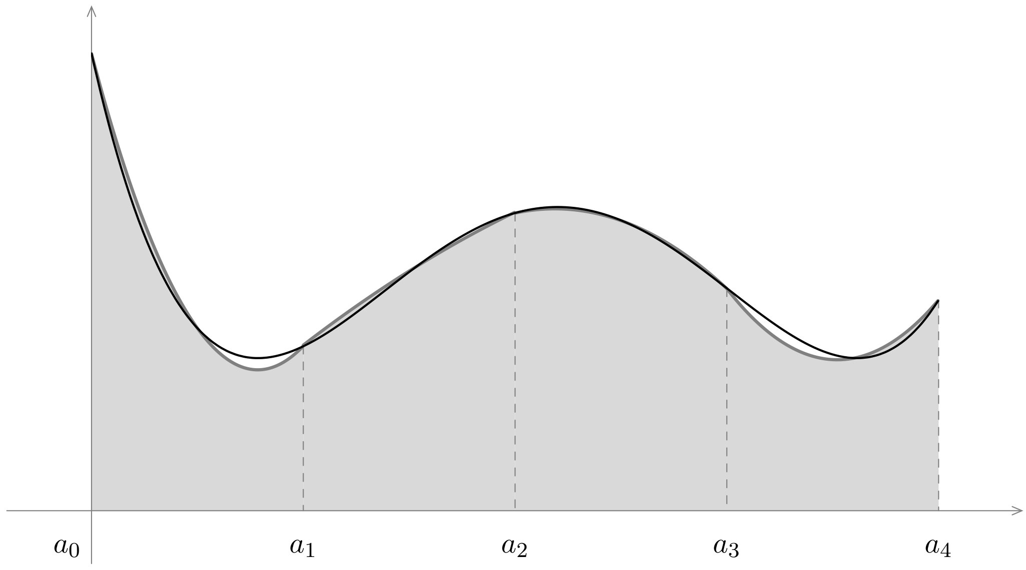


- **La méthode de Simpson.** Sur chaque $[a_k\,;a_{k+1}]$, on approche la courbe de f par la parabole (c'est-à-dire le polynôme d'interpolation de Lagrange) qui coïncide avec f en a_k, a_{k+1} et $\dfrac{a_k+a_{k+1}}{2}$. On approche alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par la somme des aires sous les courbes de ces approximations. Après calcul, si on prend une subdivision régulière, on obtient que l'intégrale est approchée par

$$\frac{b-a}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)+4f\left(a+(2k+1)\,\frac{b-a}{2n}\right)+f\left(a+(k+1)\,\frac{b-a}{n}\right)\right).$$

Illustration au dos...

Cette fois, on peut montrer que l'erreur d'approximation est de l'ordre de $\dfrac{1}{n^4}$: si on veut une approximation décimale à 8 chiffres, il suffit de prendre $n=100$, ce qui est beaucoup mieux !


a_0
a_1
a_2
a_3
a_4