Chapitre 22

# Fractions rationnelles

Dans ce chapitre, nous étudions les fractions rationnelles qui sont aux polynômes ce que les fonctions rationnelles sont aux fonctions polynomiales. Nous en allons en étudier les propriétés algébriques et revisiter à ensuite la décomposition en éléments simples.

Comme dans le chapitre précédent, nous suivons le cadre du programme et nous nous restreignons au cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, mais presque tous les résultats de ce chapitre sont encore valables en remplaçant $\mathbb{K}$ par un corps quelconque (nous dirons explicitement dans la marge quand ce n'est pas le cas).

Dans la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

## I Le corps $\mathbb{K}(X)$

### 1) Construction de $\mathbb{K}(X)$ (HP)

La construction de $\mathbb{K}(X)$, l'ensemble qui nous intéresse dans ce chapitre est hors-programme. Ce paragraphe est donc là à titre culturel et pourra être omis en première lecture.

**Étape 1.** Notons $E = \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$. On définit sur $E$ la relation $\equiv$ par :

$$\forall((A,B),(P,Q)) \in E^2, \qquad (A,B) \equiv (P,Q) \quad \iff \quad AQ = BP.$$

Il s'agit d'une relation d'équivalence sur $E$. En effet :

- Pour tout $(A,B) \in E$, $AB = BA$ donc $(A,B) \equiv (B,A)$. Ainsi $\equiv$ est réfléxive.
- Soient $((A,B),(P,Q)) \in E^2$ tels que $(A,B) \equiv (P,Q)$. Alors $AQ = BP$ donc $PB = QA$ donc $(P,Q) \equiv (A,B)$. Ainsi $\equiv$ est symétrique.
- Soient $((A,B),(P,Q),(S,T)) \in E^3$ tels que $(A,B) \equiv (P,Q)$ et $(P,Q) \equiv (S,T)$. On a alors $AQ = BP$ et $PT = QS$. En multipliant la première égalité par $T$, il vient que $AQT = BPT$ donc $AQT = BQS$ donc $Q(AT - BS) = 0$. Puisque $Q \neq 0$ et que $\mathbb{K}[X]$ est intègre, il vient que $AT - BS = 0$ donc $AT = BS$ donc $(A,B) \equiv (S,T)$. Ainsi $\equiv$ est transitive.

On construit $\mathbb{K}(X)$ à partir de $\mathbb{K}[X]$ comme on construit $\mathbb{Q}$ à partir de $\mathbb{Z}$ (construction évoquée dans le chapitre 16).

**Étape 2.** On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des classes d'équivalences de la relation $\equiv$. Pour tout $(P,Q) \in E$, on note $\dfrac{P}{Q}$ la classe d'équivalence de $(P,Q)$. Ainsi, pour tout $(A,B)$ et $(C,D)$ de $\mathbb{K}[X]^2$ tels que $B \neq 0$ et $D \neq 0$, on a $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$ si et seulement si $(A,B) \equiv (C,D)$ si et seulement si $AD = BC$.

**Étape 3.** On définit sur $\mathbb{K}(X)$ deux opérations $+$ et $\times$ par : pour tous $\dfrac{A}{B}$ et $\dfrac{C}{D}$ dans $\mathbb{K}(X)$,

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD+BC}{BD} \qquad \text{et} \qquad \frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}.$$

Ces deux opérations sont-elles bien définies ? On se donne donc $P, Q, R, S$ des polynômes (avec $Q$ et $S$ non nuls) tels que $\dfrac{A}{B} = \dfrac{P}{Q}$ et $\dfrac{C}{D} = \dfrac{R}{S}$. A-t-on $\dfrac{AD+BC}{BD} = \dfrac{PS+QR}{QS}$ et $\dfrac{AC}{BD} = \dfrac{PR}{QS}$ ? Et bien oui car $AQ = BP$ et $CS = DR$ donc

Il faut en effet vérifier que ces définitions ne dépendent pas du choix des polynômes $A, B, C, D$ dans les écritures de $\dfrac{A}{B}$ et $\dfrac{C}{D}$.

$$\begin{aligned}(AD+BC)QS &= (AD)(QS) + (BC)(QS)\\ &= (AQ)(DS) + (BQ)(CS)\\ &= (BP)(DS) + (BQ)(DR)\\ &= (PS+QR)BD\end{aligned}$$

et

$$(AC)(QS) = (AQ)(CS) = (BP)(DR) = (BD)(PR).$$

Ainsi $(AD+BC, BD) \equiv (PS+QR, QS)$ et $(AC, BD) \equiv (PR, QS)$. On en déduit que ces deux opérations sont bien définies.

Tout comme un polynôme n'est pas une fonction polynomiale, une fraction rationnelle n'est pas une fonction rationnelle. Notamment parler de domaine de définition ou de valeurs interdites n'a aucun sens ! Par exemple, $\frac{1}{X}$ est simplement la classe d'équivalence de $(1, X)$ pour la loi $\equiv$. On voit bien qu'il n'y a aucun problème pour parler de $(1, X)$ et donc de sa classe d'équivalence donc il n'y a aucun problème pour parler de $\frac{1}{X}$. Il ne faut surtout pas dire que cette fraction rationnelle n'est pas définie lorsque $X = 0$ : cela n'a aucun sens !

**Étape 4.** Montrons que $(K(X), +, \times)$ est un corps.

- Pour tous $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ et $\frac{P}{Q}$ dans $\mathbb{K}(X)$,

$$\begin{aligned}\frac{A}{B} + \left(\frac{C}{D} + \frac{P}{Q}\right) &= \frac{A}{B} + \frac{CQ + DP}{DQ} \\ &= \frac{ADQ + (CQ + DP)B}{B(DQ)} \\ &= \frac{(AD + BC)Q + PBD}{(BD)Q} \\ &= \frac{AD + BC}{BD} + \frac{P}{Q} \\ &= \left(\frac{A}{B} + \frac{C}{D}\right) + \frac{P}{Q}\end{aligned}$$

et

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + CB}{BD} = \frac{CB + AD}{DB} = \frac{C}{D} + \frac{A}{B}.$$

Ainsi $+$ est associatif et commutatif.

- Pour tout $\frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$, $\frac{A}{B} + \frac{0}{1} = \frac{A1 + B0}{B1} = \frac{A}{B}$ donc $\frac{0}{1}$ est l'élément neutre pour $+$.
- Pour tout $\frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$, $\frac{A}{B} + \frac{-A}{B} = \frac{AB - BA}{AB} = \frac{0}{1}$ donc $\frac{-A}{B}$ est l'opposé de $\frac{A}{B}$.

Ainsi $(\mathbb{K}(X), +)$ est un groupe abélien. Poursuivons

- Pour tout $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ et $\frac{P}{Q}$ dans $\mathbb{K}(X)$,

$$\frac{A}{B} \times \left(\frac{C}{D} \times \frac{P}{Q}\right) = \frac{A}{B} \times \frac{CP}{DQ} = \frac{ACP}{BDQ} = \frac{AC}{BQ} \times \frac{P}{Q} = \left(\frac{A}{B} \times \frac{C}{D}\right) \times \frac{P}{Q}$$

et

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD} = \frac{CA}{DB} = \frac{C}{D} \times \frac{A}{B}$$

donc $\times$ est associatif et commutatif.

- Pour tout $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ et $\frac{P}{Q}$ dans $\mathbb{K}(X)$,

$$\frac{A}{B}\times\left(\frac{C}{D} + \frac{P}{Q}\right) = \frac{A}{B}\times\frac{CQ + PD}{DQ} = \frac{A(CQ + PD)}{BDQ} = \frac{ACQ}{BDQ}+\frac{APD}{BDQ} = \frac{AC}{BD}+\frac{AP}{BQ}$$

donc $\frac{A}{B} \times \left(\frac{C}{D} + \frac{P}{Q}\right) = \frac{A}{B} \times \frac{C}{D} + \frac{A}{B} \times \frac{P}{Q}$. Comme $\times$ est commutatif, on en déduit que $\times$ est distributif sur $+$.

- Pour tout $\frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$, $\frac{A}{B} \times \frac{1}{1} = \frac{A1}{B1} = \frac{A}{B}$ donc $\frac{1}{1}$ est l'élément neutre pour $\times$.
- Pour tout $\frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ n'étant pas $\frac{0}{1}$. Alors $A1 \neq B0$ donc $A \neq 0$ et $\frac{A}{B}\frac{B}{A} = \frac{AB}{BA} = \frac{1}{1}$ donc $\frac{B}{A}$ est l'inverse de $\frac{A}{B}$.

Ainsi $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps.

**Étape 5.** On définit $f : P \in \mathbb{K}[X] \longmapsto \frac{P}{1} \in \mathbb{K}(X)$.

- On a $f(1) = \frac{1}{1}$. Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$,

$$f(P + Q) = \frac{P + Q}{1} = \frac{P}{1} + \frac{Q}{1} = f(P) + f(Q)$$

et $f(PQ) = \frac{PQ}{1} = \frac{P}{1}\frac{Q}{1} = f(P)f(Q)$. Ainsi $f$ est un morphisme d'anneaux.

Les deux éléments neutres de $\mathbb{K}(X)$ peuvent donc être identifiés aux polynômes $0$ et $1$. Et donc une fraction rationnelle est nulle si et seulement si elle est le polynôme nul (si et seulement si son numérateur est le polynôme nul).

- Soit $P \in \operatorname{Ker}(f)$. Alors $f(P) = \dfrac{0}{1}$ donc $\dfrac{P}{1} = \dfrac{0}{1}$ donc $P \times 1 = 0 \times 1$ donc $P = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$ et donc $f$ est injectif.

On peut donc « identifier » tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ à la fraction rationnelle $\dfrac{P}{1} \in \mathbb{K}(X)$. Cette « identification » fait de $\mathbb{K}[X]$ un sous-anneau de $\mathbb{K}(X)$.

***Exemples :***

- $\dfrac{1}{X} \in \mathbb{K}(X)$ *est donc la classe d'équivalence de* $(1, X)$ *pour la relation d'équivalence* $\equiv$.
- $\dfrac{X^2-1}{X-1} \in \mathbb{K}(X)$ *est donc la classe d'équivalence de* $(X^2-1, X-1)$ *pour la relation d'équivalence* $\equiv$. *Mais, puisque* $(X^2-1)1 = (X+1)(X-1)$, $(X+1, 1)$ *appartient à la même classe d'équivalence et donc* $\dfrac{X^2-1}{X-1} = \dfrac{X+1}{1}$, *que l'on identifie au polynôme* $X+1$.

## 2) Définition de $\mathbb{K}(X)$

On retient du paragraphe précédent, le théorème/définition suivant (que l'on peut donc admettre conformément au programme) :

$\dfrac{A}{B}$ est donc une notation. Ce n'est pas une division. Le polynôme $B$ est juste un polynôme non nul et il n'y a aucun problème d'existence.

**Théorème/Définition.** *Il existe un ensemble noté* $\mathbb{K}(X)$ *tel que :*

- *À tout couple* $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ *tel que* $B \neq 0$, *on peut associé un unique élément de* $\mathbb{K}(X)$ *noté* $\dfrac{A}{B}$.
- *Tout élément de* $\mathbb{K}(X)$ *peut être écrit sous la forme* $\dfrac{A}{B}$ *avec* $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ *et* $B \neq 0$.
- *Pour tous* $(A, B)$ *et* $(C, D)$ *de* $\mathbb{K}[X]^2$ *tels que* $B \neq 0$ *et* $D \neq 0$, *on a* $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$ *si et seulement si* $AD = BC$.

*Les éléments de* $\mathbb{K}(X)$ *sont appelés les fractions rationnelles à coefficients dans* $\mathbb{K}$.

*On munit* $\mathbb{K}(X)$ *des deux opérations* $+$ *et* $\times$ *définies par :*

$$\forall \left(\frac{A}{B}, \frac{C}{D}\right) \in \mathbb{K}(X)^2, \qquad \frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD+BC}{BD} \qquad \text{et} \qquad \frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}.$$

Ces définitions ne dépendant pas du choix des polynômes $A, B, C, D$ dans les écritures de $\dfrac{A}{B}$ et $\dfrac{C}{D}$.

Ces deux éléments neutres peuvent être identifiés aux polynômes $0$ et $1$ compte tenu de l'application injective décrite ci-dessous.

*Muni de ces deux opérations,* $\mathbb{K}(X)$ *est alors un corps dont les éléments neutres pour* $+$ *et* $\times$ *sont respectivement* $\dfrac{0}{1}$ *et* $\dfrac{1}{1}$ *et, pour tout* $\dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$, *l'opposé de* $\dfrac{A}{B} = \dfrac{-A}{B}$ *et, lorsque* $A \neq \dfrac{0}{1}$, *l'inverse de* $\dfrac{A}{B}$ *est* $\dfrac{B}{A}$.

*Enfin, l'application* $P \longmapsto \dfrac{P}{1}$ *est un morphisme d'anneaux de* $\mathbb{K}[X]$ *dans* $\mathbb{K}(X)$ *qui est injectif. Ainsi :*

- *Nous « identifierons » tout polynôme* $P \in \mathbb{K}[X]$ *à la fraction rationnelle* $\dfrac{P}{1}$.
- *Cette « identification » fait de* $\mathbb{K}[X]$ *un sous-anneau de* $\mathbb{K}(X)$.

Et donc une fraction rationnelle est nulle si et seulement si son numérateur est le polynôme nul.

⚠ Tout comme un polynôme n'est pas une fonction polynomiale, une fraction rationnelle n'est pas une fonction rationnelle. Notamment parler de domaine de définition ou de valeurs interdites n'a aucun sens ! Par exemple, on peut parler sans problème de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X}$ et on ne doit surtout pas dire qu'elle n'est pas définie lorsque $X = 0$. Cela n'a aucun sens une fois de plus !

**Proposition.** *Soient $A$, $B$ et $C$ dans $\mathbb{K}[X]$ tels que $B$ et $C$ sont non nuls. Alors $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{A}{B}$.*

Démonstration. Puisque $ABC = ABC$, on a $(AC)B = A(BC)$ donc $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A}{B}$. □

***Exemples :***

- *On a* $\dfrac{X^2+X}{X^3+X^2} = \dfrac{X(X+1)}{X^2(X+1)} = \dfrac{1}{X}$ *dans* $\mathbb{K}(X)$.
- $\dfrac{1}{X-1} - \dfrac{1}{X+1} = \dfrac{X+1}{(X+1)(X-1)} - \dfrac{X-1}{(X+1)(X-1)} = \dfrac{2}{(X+1)(X-1)}$.
- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$
$$\frac{1-X^{n+1}}{1-X} = \sum_{k=0}^{n} X^k.$$
*En effet, par télescopage,*
$$(1-X)\sum_{k=0}^{n} X^k = \sum_{k=0}^{n}(X^k - X^{k+1}) = 1 - X^{n+1}.$$

Encore une fois, on ne doit pas écrire que cela n'est défini que lorsque $X \neq 1$ car cela n'a aucun sens de dire ça ! $X$ n'est pas un réel ! La fraction rationnelle $\dfrac{1-X^{n+1}}{1-X}$ existe de façon formelle, un point c'est tout !

**Proposition/Définition.** *Soit $R \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un couple $(P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$ de polynômes premiers entre eux tel que $R = \dfrac{P}{Q}$. Cette écriture est unique à une même constante multiplicative non nulle près pour $P$ et $Q$. Une telle écriture est appelée écriture irréductible de la fraction rationnelle $R$. De plus, si $R \neq 0$, alors toute écriture de $R$ est de la forme $\dfrac{PT}{QT}$ avec $T \in \mathbb{K}[X]^*$.*

Ainsi, si $R$ est une fraction rationnelle, on peut toujours écrire $R$ sous la forme $\dfrac{P}{Q}$ avec $P$ et $Q$ premiers entre eux. Attention, il n'y a pas unicité mais unicité à une constante multiplicative (non nulle) près.

Démonstration.

□

**Proposition.** *Soit $R = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. On a $R \in \mathbb{K}[X]$ si et seulement si $B|A$.*

Démonstration.

□

### 3) Degré d'une fraction rationnelle

On fait comme dans le chapitre précédent, mais on autorise les degrés à être négatifs, même lorsqu'ils ne sont pas égaux à $-\infty$. Le fait qu'il n'y ait pas $+\infty$ simplifie beaucoup les choses et, en particulier, il n'y a pas de formes indéterminées.

**Définition.** *On adjoint à $\mathbb{Z}$ un élément noté $-\infty$ qui n'appartient pas à $\mathbb{Z}$. On prolonge la relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ en posant :*

$$-\infty \leqslant -\infty \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{Z}, \qquad -\infty < x$$

*On prolonge l'addition de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ en posant :*

$$\forall x \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \qquad (-\infty) + x = -\infty.$$

**Lemme.** *Soient $(P, Q)$ et $(A, B)$ deux éléments de $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$ tels que $PB = QA$. Alors $\deg(P) - \deg(Q) = \deg(A) - \deg(B)$.*

Démonstration.

□

Le lemme garantit la bonne définition du degré de $R$ puisque la différence des degrés ne dépend pas des deux polynômes $A$ et $B$ tels que $R = \frac{A}{B}$. En particulier, il n'est pas nécessaire que la fraction soit sous forme irréductible.

**Définition.** *Soit $R = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. On appelle degré de $R$, et on note $\deg(R)$, la quantité $\deg(A) - \deg(B)$.*

***Exemples :***

- $\deg\left(\dfrac{X^3}{1+X^{2027}}\right) = 3 - 2027 = -2024$,
- $\deg\left(\dfrac{X^2}{X+1}\right) = 2 - 1 = 1$.

**Remarques :**

- Une fraction rationnelle est nulle si et seulement si son numérateur est le polynôme nul (et son dénominateur est un polynôme non nul quelconque) si et seulement si son degré vaut $-\infty$.
- Si $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $\deg\left(\dfrac{P}{1}\right) = \deg(P) - \deg(1) = \deg(P)$. Ainsi cette définition du degré prolonge bien celle sur $\mathbb{K}[X]$.
- ⚠ Lorsque $R \in \mathbb{K}(X)$ et $\deg(R) \geqslant 0$, alors cela ne signifie pas que $R \in \mathbb{K}[X]$.

  *On le voit que le deuxième exemple ci-dessus car $\dfrac{X^2}{X+1}$ n'est pas un polynôme (puisque $X+1$ ne divise pas $X^2$).*
- Si $R = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)^*$, alors $\deg\left(\dfrac{1}{R}\right) = \deg(B) - \deg(A) = -\deg(R)$.

Nous n'énonçons pas le cas d'égalité pour la somme dans le cas des fractions rationnelles car il n'y a pas de critère simple.

**Proposition.** *Soient $R$ et $F$ deux fractions rationnelles. Alors :*

$$\deg(R \times F) = \deg(R) + \deg(F) \qquad \text{et} \qquad \deg(R+F) \leqslant \max\{\deg(R); \deg(F)\}.$$

Démonstration.

□

Le cas où $R = 0$ et $n < 0$ n'a pas de sens. Le cas où $R = 0$ et $n = 0$ ne vaut pas le coup à lui seul que l'on étende les conventions d'opérations sur $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ Passons.

**Corollaire.** *Soit $R \in \mathbb{K}(X)^*$ et soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors $\deg(R^n) = n \times \deg(R)$.*

Démonstration. Le cas où $n \in \mathbb{N}$ se montre par récurrence (laissée en exercice). Si $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$, alors $-n \in \mathbb{N}$ donc

$$\deg(R^n) = \deg\left(\frac{1}{R^{-n}}\right) = \deg\left(\left(\frac{1}{R}\right)^{-n}\right) = (-n)\deg\left(\frac{1}{R}\right) = (-n)(-\deg(R))$$

donc $\deg(R^n) = n\deg(R)$. □

## 4) Partie entière d'une fraction rationnelle

Il n'y a pas de notations usuelles pour cette partie entière, et certainement pas $\lfloor F \rfloor$.

**Proposition/Définition.** *Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(F - E) < 0$. Le polynôme $E$ est appelé la partie entière de la fraction rationnelle $F$. Il s'agit précisément du quotient de la division euclidienne de $A$ par $B$.*

Démonstration.

$\square$

**Remarques :**

- Si $F \in K(X)$ et si $E$ désigne sa partie entière alors, en notant $R = F - E \in \mathbb{K}(X)$, il vient que $F = E + R$ avec $\deg(R) < 0$. Autrement dit toute fraction rationnelle s'écrit (de façon unique) comme la somme d'un polynôme et d'une fraction rationnelle de degré strictement négatif.
- ⚠ La partie entière est, par définition, un polynôme ! Il ne suffit pas d'avoir une fraction rationnelle de degré positif.
- Lorsqu'il est positif ou nul, le degré d'une fraction rationnelle est égal au degré de sa partie entière. En effet, si on reprend les notations de la démonstration ci-dessus :
- Lorsque le degré d'une fraction rationnelle est strictement négatif, alors sa partie entière est nulle. En effet, le polynôme nul convient et il y a unicité.

Dans cet exemple, on conclut par unicité. Dans la pratique, on trouve souvent la partie entière en faisant une division euclidienne.

***Exemple :*** *On a*

$$\frac{X(X-1)^2}{X-2} = X^2 + 1 + \underbrace{\frac{2}{X-2}}_{\text{de degré } -1 < 0}$$

*donc la partie entière de* $\dfrac{X(X-1)^2}{X-2}$ *est* $X^2+1$.

## 5) Zéros et pôles d'une fraction rationnelle

Si $n = 1$, on parle de zéro/pôle simple. Si $n = 2$, on parle de zéro/pôle double. Si $n \geqslant 2$, on parle de zéro/pôle multiple...

**Définition.** *Soit* $R = \dfrac{P}{Q}$ *une fraction rationnelle écrite sous forme* ***irréductible****. Soit* $a \in \mathbb{K}$*. Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. On dit que :*

- $a$ *est un zéro de* $R$ *de multiplicité* $n$ *si* $a$ *est racine de* $P$ *de multiplicité* $n$*.*
- $a$ *est un pôle de* $R$ *de multiplicité* $n$ *si* $a$ *est racine de* $Q$ *de multiplicité* $n$*.*

... Par convention, on dit que $a$ est un zéro ou un pôle de multiplicité zéro lorsque $a$ n'est pas un zéro ou un pôle de $R$. On définit de même la notion de zéros ou de pôles comptés avec multiplicité.

**Remarques :**

- Si on considère une autre écriture irréductible de $R$, celle-ci ne diffère que d'une constante non nulle au numérateur et au dénominateur, c'est-à-dire que celle-ci est de la forme $\dfrac{\lambda P}{\lambda Q}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$. Puisque $\lambda P$ et $P$ ont les mêmes racines avec les mêmes multiplicités, et que $Q$ et $\lambda Q$ aussi, cela garantit que ces définitions ne dépendant pas du choix des polynômes de l'écriture irréductible.
- Puisque $R$ est écrit sous forme irréductible dans la définition, $P$ et $Q$ sont premiers entre eux dont n'admettent pas de racine commune. Ainsi $a$ ne peut pas être à la fois un zéro et un pôle de $R$.
  ⚠ Il est indispensable que la fraction soit sous forme irréductible sinon on pourrait créer des pôles et zéros à volonté et avec la multiplicité que l'on veut.

  *Par exemple, considérons $R = \dfrac{X(X-1)^2}{X+2}$. Elle est écrire sous forme irréductible et possède $0$ et $1$ pour zéros et $-2$ pour pôle (de plus $0$ et $-2$ sont de multiplicité $1$ et $1$ est de multiplicité $2$). Mais, si on l'écrit sous la forme $R = \dfrac{X^3(X-1)^4(X-4)}{X(X-1)^2(X+2)(X-4)}$, alors on serait tenté de croire que $0$, $1$ et $4$ sont des zéros et que $0$, $1$, $-2$ et $4$ sont des pôles. Sans parler des multiplicités...*
- Puisqu'un polynôme non nul admet un nombre fini de racines, une fraction rationnelle admet un nombre fini de pôles. De plus une fraction rationnelle admet un nombre infini de zéros si et seulement si c'est la fraction rationnelle nulle.
- Un polynôme non nul admet forcément un nombre de racine inférieur à son degré. Cependant il est tout à fait possible qu'une fraction rationnelle admette un nombre de zéros strictement supérieur à son degré sans être la fraction rationnelle nulle !

  *Par exemple, $R = \dfrac{X(X-1)^2}{(X-2)^3}$ est de degré $0$ mais admet trois zéros comptés avec multiplicité (ainsi que trois pôles).*

On pourrait penser que le degré d'une fraction rationnelle est égal au nombre de zéros moins le nombre de pôles, mais cela n'est valable que lorsque $P$ et $Q$ sont écrits sous forme scindée, ce qui n'est pas toujours possible lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Ainsi on ne donnera pas de résultat général reliant degré et nombre de zéros ou de pôles.

## 6) Fonction rationnelle associée

**Définition.** *Soit $R = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible. Notons $\mathcal{Q}_0$ l'ensemble des pôles de $R$ (éventuellement vide si $Q$ n'a pas de racines). On définit la fonction rationnelle associée $\widetilde{R}$ par :*

$$\widetilde{R} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\backslash\mathcal{Q}_0 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)} \end{array} \right.$$

*où $\widetilde{P}$ et $\widetilde{Q}$ sont les fonctions polynomiales associées respectivement à $P$ et $Q$.*

Autrement dit, la fonction rationnelle associée est définie en tout élément de $\mathbb{K}$ qui n'est pas un pôle c'est-à-dire qui n'est pas racine du dénominateur.

**Remarques :**

- Il est indispensable d'écrire $R$ sous forme irréductible pour obtenir le domaine de définition le plus grand possible. Sinon, on crée des pôles (et donc des valeurs interdites) artificiellement.

  *Par exemple, si $R = \dfrac{X^2}{X}$, alors on la simplifie d'abord en $R = X$ avant de dire que $\widetilde{R}$ est définie sur $\mathbb{K}$ tout entier (et non sur $\mathbb{K}^*$ contrairement à ce que la première expression, non écrite sous forme irréductible, laissait penser).*
- ⚠ On l'a déjà dit mais il n'y a aucun sens de parler de domaine de définition ou de valeur interdite pour une fraction rationnelle. En revanche cela a du sens pour la fonction rationnelle associée.

*Par exemple, si* $R = \dfrac{X(X-1)}{X+2}$ *alors* $R$ *est un objet qui existe un point c'est tout : c'est une fraction rationnelle. Sa fonction rationnelle associée est* $\widetilde{R} : x \longmapsto \dfrac{x(x-1)}{x+2}$. *C' est une fonction définie sur* $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

De la même façon qu'on a bien insisté dans le chapitre précédent sur le fait qu'il ne fallait pas confondre polynôme et fonction polynomiale associée.

- ⚠ Il ne faut pas confondre fraction rationnelle et fonction rationnelle associée. Pourtant, comme dans le chapitre précédent, on pourra confondre leur notation par soucis de simplicité.

  *Par exemple, si* $R = \dfrac{X(X-1)}{X+2}$, *on écrira* $R(1) = 0$ *au lieu de* $\widetilde{R}(1) = 0$ *(ce qui serait plus correct).*

  Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (le cadre du programme officiel donc), on peut toutefois « identifier » fraction rationnelle et fonction rationnelle associée au sens où $R \in \mathbb{K}(X) \longmapsto \widetilde{R}$ est une injection (ce que l'on admet).

## II Décomposition en éléments simples

On a déjà étudié le principe de décomposition en éléments simples dans le chapitre 9. Nous allons le revisiter (sans rien démontrer de plus puisqu'elle est admise conformément au programme) en utilisant des fractions rationnelles au lieu de fonctions rationnelles. Cela aura le mérite d'être moins lourd et nous allons pouvoir simplifier plusieurs arguments dans la détermination des coefficients. Autre nouveauté : nous savons bien mieux factoriser des polynômes depuis le chapitre 9 donc nous allons pouvoir étudier davantage de cas de figure.

Mais pas tous les arguments non plus : nous devrons souvent se ramener à la fonction rationnelle associée malgré tout.

La première chose à faire quand on veut décomposer en éléments simples est de mettre la fraction rationnelle sous forme irréductible. Puis on détermine sa partie entière et, ensuite, on avise selon que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

### 1) Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$

Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{C}(X)$ écrite sous forme irréductible. Notons $E$ la partie entière de $F$. Notons $z_1, \ldots, z_r$ les pôles distincts de $B$ et notons $m_1, \ldots, m_r$ leurs multiplicités respectives. Ainsi il existe $\lambda \in C$ tel que

$r$ désigne donc ici le nombre de pôles distincts de $B$. On peut le supposer non nul sinon $B$ est constant et $F$ est un polynôme... il serait étrange de vouloir le décomposer en éléments simples.

$$B = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - z_i)^{m_i}.$$

**Théorème (décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$).** *Il existe une unique famille* $(a_{i,k})_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ 1\leqslant k\leqslant m_i}}$ *de complexes telle que*

$$F = E + \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_{i,k}}{(X - z_i)^k}.$$

Démonstration. Admis. □

Nous avons formulé la décomposition en éléments simples sous forme d'une somme double mais c'est exactement le même résultat que dans le chapitre 9 (mais avec $X$ au lieu de $z$ et sans la nécessité d'enlever les valeurs interdites).

**Remarque :** La démonstration de l'existence utilise le fait que les polynômes $\dfrac{B}{(X - z_i)^{m_i}}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont premiers entre eux dans leur ensemble et de l'identité de Bezout qui en découle. Mais n'en disons pas plus : elle est hors-programme.

***Exemple :*** *Considérons* $R = \dfrac{(X-1)^4}{X^2(X^2+1)^3}$. *Puisque* $\deg(R) = -1 < 0$, *sa partie entière est nulle. Elle est déjà écrite sous forme irréductible et le polynôme au dénominateur se factorise* $X^2(X-\mathrm{i})^3(X+\mathrm{i})^3$ *dans* $\mathbb{C}[X]$.

*Ainsi il existe $(a,b,c,d,e,f,g,h) \in \mathbb{C}^8$ tels que*

$$R = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X-\mathrm{i}} + \frac{d}{(X-\mathrm{i})^2} + \frac{e}{(X-\mathrm{i})^3} + \frac{f}{X+\mathrm{i}} + \frac{g}{(X+\mathrm{i})^2} + \frac{h}{(X+\mathrm{i})^3}$$

## 2) Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{R}(X)$ écrite sous forme irréductible. Notons $E$ la partie entière de $F$. Supposons que $B$ se décompose en produit de polynômes irréductibles sous la forme suivante :

$$B = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - x_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{q} P_j^{n_j},$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$, avec $x_1, \ldots, x_r$ les pôles distincts de $Q$, $m_1, \ldots, m_r$ leurs multiplicités respectives, $P_1, \ldots, P_q$ des polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatifs et $n_1, \ldots, n_q$ des entiers naturels non nuls.

Nous avons formulé la décomposition en éléments simples sous forme d'une somme de deux sommes doubles mais c'est exactement le même résultat que dans le chapitre 9 (mais avec $X$ au lieu de $x$ et sans la nécessité d'enlever les valeurs interdites).

**Théorème (décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$).** *Il existe des uniques familles $(a_{i,k})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ 1 \leqslant k \leqslant m_i}}$, $(b_{j,k})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant q \\ 1 \leqslant k \leqslant n_j}}$ et $(c_{j,k})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant q \\ 1 \leqslant k \leqslant n_j}}$ de réels telles que*

$$F = E + \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_{i,k}}{(X - x_i)^k} + \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{n_j} \frac{b_{j,k} X + c_{j,k}}{P_j^k}.$$

Démonstration. Admis. □

***Exemples :*** *Considérons de nouveau $R = \dfrac{(X-1)^4}{X^2(X^2+1)^3}$. Décomposons-le en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ cette fois : il existe $(a,b,c,d,e,f,g,h) \in \mathbb{R}^8$ tels que*

$$R = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{cX+d}{X^2+1} + \frac{eX+f}{(X^2+1)^2} + \frac{gX+h}{(X^2+1)^3}.$$

## 3) Techniques pour trouver les coefficients de la décomposition

Une fois la décomposition en éléments simples écrite (il existe des complexes ou des réels tels que...), on peut tout à fait tout mettre sur le même dénominateur et résoudre un système en vertu de l'unicité des coefficients. On peut aussi se ramener à des fonctions rationnelles et appliquer toutes les techniques vues dans le chapitre 9 (évaluation en des valeurs bien choisies, utilisation des limites en $\pm\infty$, utilisation de la parité) mais un des avantages de l'écriture avec des fractions rationnelles est qu'il n'y a pas de valeur interdite contrairement à la version avec des fonctions rationnelles.

Par exemple, une des grandes techniques du chapitre 9, consistait à multiplier la décomposition en éléments simples par $(x-a)^m$, lorsque $a$ est un pôle et $m$ sa multiplicité, puis de faire tendre $x$ vers $a$. On ne pouvait en effet pas évaluer en $a$ puisque c'était une valeur interdite. Pire : faire tendre la variable complexe vers $a$ était limite vis à vis du programme. Avec les fractions rationnelles, ce problème disparait : il suffit de multiplier par $(X-a)^m$, de simplifier, puis seulement enfin d'évaluer en $a$ ($a$ n'étant, à ce moment là, plus une valeur interdite de la fonction rationnelle associée).

Cette technique reste cependant surtout adaptée quand le pôle est simple (c'est-à-dire $m = 1$). Quand ce n'est pas le cas, elle donne le coefficient du terme en $\dfrac{1}{(X-a)^m}$. Pour les autres, il y a plus de travail (cf. chapitre 9).

***Exemple :*** *Reprenons l'exemple de $F = \dfrac{X}{(X-1)(X-2)}$ déjà étudié dans le chapitre 9 (dans sa version fonction rationnelle).*

Un cas particulier d'application de cette méthode est au programme :

**Proposition.** *Soit $F = \dfrac{A}{B} \in C(X)$ écrite sous forme irréductible. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $\lambda$ est un pôle **simple** de $B$, alors le coefficient devant $\dfrac{1}{X-\lambda}$ dans la décomposition en éléments simples de $F$ est $\dfrac{A(\lambda)}{B'(\lambda)}$.*

Cette formule est un gain de temps sur la méthode décrite précédemment lorsque le degré est élevé (et donc quand la méthode devient fastidieuse à appliquer pôle par pôle).

Démonstration.

□

***Exemple :*** *Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Décomposons en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle $F = \dfrac{1}{X^n - 1}$.*

Terminons par un résultat classique de décomposition en élément simple qui figure explicitement au programme :

**Proposition.** *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les racines distinctes de $P$ et $m_1, \dots, m_r$ leurs multiplicités respectives. Alors*

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{X - \lambda_k}.$$

On pourrait utiliser les techniques usuelles après avoir remarqué que $\dfrac{P'}{P}$ ne possède que des pôles simples (par théorème de caractérisation de la multiplicité par les dérivées) mais nous proposons une autre preuve.

Démonstration.

On a déjà vu cette formule dans le dernier paragraphe du chapitre 7 pour un produit de fonctions dérivables.