Chapitre 25

Formules de Taylor

On considère un intervalle I non vide et non réduit à un point. Sauf mention du contraire, toutes les fonctions de ce chapitre sont à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Dans le chapitre 21, nous avons vu la formule de Taylor pour les polynômes. En évaluant, on en déduit que, pour toute fonction polynomiale $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ à coefficients complexes et pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}(x-a)^k$$

Pas tout à fait quelconque non plus : elles devront être dérivables suffisamment de fois pour que la somme ci-contre puisse avoir un sens.

(où n est un majorant du degré du polynôme dont elle est associée, lorsque celui-ci n'est pas nul). L'objectif de ce chapitre est de comparer une fonction f quelconque avec la fonction polynomiale

$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-a)^k.$$

Elles ne sont pas égales en général mais nous allons voir qu'elles diffèrent d'un terme de reste que l'on peut contrôler avec l'ajout d'hypothèse de régularité.

I Formule de Taylor avec reste intégral

La formule à l'ordre n est celle qui fait apparaître un terme polynomial de degré n (la somme de 0 à n) et un terme de reste (l'intégrale) avec une dérivée $(n+1)^{\text{ième}}$.

Théorème (formule de Taylor avec reste intégral). *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur I. Alors, pour tout $(a,b) \in I^2$,*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cette égalité est appelée formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n.

Remarques :

- L'intégrale a bien un sens puisque f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I donc $f^{(n+1)}$ est continue sur I et donc $t \longmapsto \dfrac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)$ est continue sur le segment $[a;b]$.
- Le but de cette formule de Taylor (et deux suivantes) et d'approcher une fonction par une fonction polynomiale. En effet, pour tout $a \in I$, on a

L'inconvénient du reste intégrale est qu'on ne sait pas le calculer a priori. En revanche, nous pouvons souvent déterminer son signe (cf. remarque suivant la démonstration) et le contrôler.

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{\text{terme polynomial en } x} + \underbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{reste intégral}}.$$

  Il s'agit donc bien d'une généralisation de la formule de Taylor avec reste intégral. D'ailleurs, si f est une fonction polynomiale de degré n, alors f^{n+1} est nulle et donc le reste intégral est nul : on retrouve la formule de Taylor pour les polynômes.

En effet, l'égalité coïncidant en un nombre infini de valeurs, les polynômes sont les fonctions sont associées sont égaux.

- Quelques cas particuliers :

DÉMONSTRATION.

□

La réciproque est vraie comme on l'a rappelé plus haut : une fonction polynomiale de degré $n-1$ admet une dérivée $n^{\text{ième}}$ nulle.

Corollaire. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f^{(n)}$ est la fonction nulle. Alors f est une fonction polynomiale de degré au plus $n-1$.*

DÉMONSTRATION. La formule de Taylor avec reste intégrale entraîne que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + 0$$

Donc f est bien une application polynomiale de degré au plus n. □

L'inégalité de Taylor avec reste intégral est particulièrement adaptée pour prouver des inégalités entre une fonction et une fonction polynomiale, en analysant le signe du reste intégral.

Exemples :

- *Montrons que*

$$\forall x \in \left]-1\,;+\infty\right[, \qquad \frac{1}{\sqrt[4]{1+x}} \geqslant 1 - \frac{x}{4} + \frac{5x^2}{32} - \frac{15x^3}{128}.$$

On pourrait bien sûr étudier la fonction f définie par la différence du terme de gauche, avec le terme de droite en la dérivant 3 fois. Cela s'annonce fastidieux.

- *La fonction* $f : x \longmapsto \ln(1+x)$...

II Inégalité de Taylor-Lagrange

La formule à l'ordre n est celle qui fait apparaître un terme polynomial de degré n (la somme de 0 à n) et un terme de reste avec une dérivée $(n+1)^{\text{ième}}$.

Théorème (inégalité de Taylor-Lagrange). *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I. Pour tout $(a,b) \in I^2$, on a :*

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a,b]} \left| f^{(n+1)} \right|.$$

Cette inégalité est appelée inégalité de Taylor-Lagrange.

Remarques :

- Comme f est $\mathscr{C}^{n+1}$, f^{n+1} est continue sur le segment $[a\,;b]$ donc le maximum de la formule existe par théorème des bornes atteintes.
- Pour $n=0$, cette inégalité devient :

$$|f(b)-f(a)| \leqslant \max_{[a\,;b]} |f'| \times |b-a|.$$

  C'est l'inégalité des accroissements finis ! L'inégalité de Taylor-Lagrange est une généralisation de cette inégalité à un ordre plus grand, quand la fonction est plus régulière.
- Il existe aussi une *égalité de Taylor-Lagrange* mais celle-ci est hors-programme. Nous la verrons en exercice.

Cette formule de Taylor, comme la précédente, est valable avec $a \leqslant b$ et également avec $a \geqslant b$. En général, on l'applique avec $a=0$ et $b=x$.

Démonstration.

□

Il n'est pas toujours possible de calculer le maximum ci-dessus. Cependant, comme dans l'inégalité des accroissements finis, l'inégalité de Taylor-Lagrange est toujours valable avec un majorant. En effet, si M est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur $[a\,;b]$ ou même sur I tout entier, $\max\limits_{[a\,;b]} |f^{(n+1)}| \leqslant M$ et donc on peut majorer la valeur absolue par $M \times \dfrac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.

L'avantage de cette inégalité, par rapport à la formule avec reste intégral, est que le membre de droite est beaucoup plus simple, en particulier si on veut montrer qu'il tend vers 0. De plus, même si on ne sait pas le calculer exactement, il est plus facile de le majorer (voir remarque dans la marge et exemples ci-dessus). L'inconvénient est qu'il ne donne qu'une majoration et qu'il y a une valeur absolue : on ne peut donc pas comparer $f(x)$ et la somme car, avec une valeur absolue, on perd toute notion de signe (dans ce cas, on préfèrera la formule avec reste intégral).

Exemples :

- *On a :*

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^x.}$$

  En effet :

Dans le chapitre 27, on notera :

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

On peut voir cela comme l'étape d'analyse d'une (longue) analyse-synthèse : en supposant l'existence de l'exponentielle, on obtient cette formule. On fera l'étape de synthèse dans le chapitre 27 en montrant que la fonction

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée elle-même et qu'elle vaut 1 en 0. On aura donc montré l'existence de la fonction exponentielle.

Dans le chapitre 27, on notera :

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

et

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Ces formules permettent de définir les fonctions $\cos$ et $\sin$ plus rigoureusement que ce que nous avons fait dans le chapitre 5. Il faudrait montrer ensuite qu'elles satisfont toutes les propriétés attendues de $\cos$ et $\sin$, ce qui est faisable mais technique et demande des propriétés qui ne seront vues qu'en toute fin d'année (cf. chapitre 39).

- *On a :*

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \cos(x).}$$

En effet :

- *De manière analogue :*

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin(x).}$$

On a déjà vu dans le paragraphe précédent que

$$x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} x^k$$

est la partie polynomiale dans les formules de Taylor à l'ordre n de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$. On montre aisément que le reste dans l'inégalité de Taylor-Lagrange tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Cette limite est encore vraie sur $]-1\,;0[$ mais il faut le démontrer autrement qu'avec les formules de Taylor sur $]-1\,;\frac{1}{2}]$.

- *On peut aussi montrer que :*

$$\boxed{\forall x \in [0\,;1]\,, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(1+x).}$$

III Formule de Taylor-Young

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les deux formules précédentes donnent une approximation d'une fonction f par une fonction polynomiale de degré n sous l'hypothèse qu'elle est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Pourtant l'approximation polynomiale ne fait intervenir que les dérivées successives jusqu'à la $n^{\text{ième}}$. La formule de Taylor-Young allège donc cette hypothèse (en supposant seulement que f est de classe $\mathscr{C}^1$) mais il ne s'agit plus d'une formule globale mais locale :

Autrement dit, il existe une fonction ε qui tend vers 0 en 0 telle que

$$R(x) = (x-a)^n \varepsilon(x-a)$$

pour tout x au voisinage de a.

Théorème (formule de Taylor-Young). *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur I. Pour tout $a \in I$, la fonction*

$$R : x \longmapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

vérifie

$$\frac{R(x)}{(x-a)^n} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0.$$

Remarques :

- Cette formule est présentée et montrée dans ce chapitre puisqu'il s'agit d'une formule de Taylor. Pourtant nous l'utiliserons principalement dans le chapitre 26 car elle est l'ingrédient central pour montrer des développements limités.
- Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I, alors cette formule découle immédiatement de l'inégalité de Taylor Lagrange. En effet :

  Toute la difficulté de la démonstration ci-dessous et de montrer cela sans l'hypothèse que $f^{(n)}$ est dérivable.

Dans le chapitre 26, nous écrirons cette formule autrement avec la notation o.

Démonstration.

$\square$

Exemple : *Montrons que* $\dfrac{1-\cos(x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{2}$.