Chapitre 28

Espaces vectoriels

Ce chapitre s'inscrit dans la suite du chapitre 17 et il entame un gros bloc appelé algèbre linéaire. Il sera complété par cinq autres chapitres (les chapitres 29, 33, 34, 36 et 37) en première année et plusieurs en seconde année.

Le but de ce chapitre est de généraliser la notion de vecteur du plan ou de l'espace. On va pour cela s'intéresser aux propriétés vérifiées par les vecteurs, et on appellera ensuite vecteur tout élément vérifiant ces propriétés. On verra que cela concerne des types d'objets a priori très différents (des fonctions, des suites, des matrices, des polynômes, etc.) et nous montrerons des résultats généraux que nous pourront alors appliquer à tous ces types d'objets.

Conformément au programme, $\mathbb{K}$ désigne dans ce chapitre le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (mais les résultats demeurent valables pour un corps $\mathbb{K}$ quelconque).

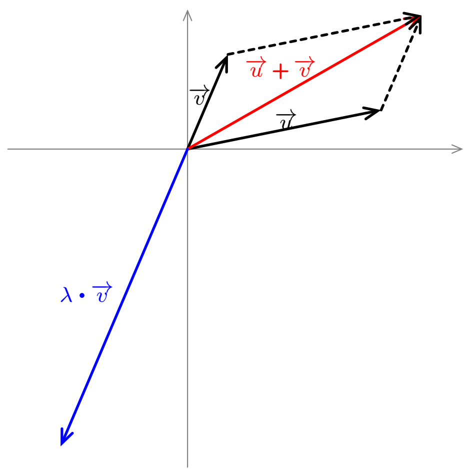
I Structure d'espace vectoriel

1) Rappels sur les vecteurs du plan et de l'espace

Listons ce que l'on peut faire avec les vecteurs du plan ou de l'espace, étudiés au lycée :

L'ensemble des vecteurs est donc un groupe pour l'addition de vecteurs.

- On peut sommer des vecteurs et la somme de vecteurs est commutative et associative.
- Il existe un vecteur nul $\overrightarrow{0}$ qui est l'élément neutre de l'addition de vecteurs.
- Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ admet un vecteur opposé, c'est-à-dire un vecteur $\overrightarrow{v}$ tel que $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$. On le note $-\overrightarrow{u}$.
- On peut multiplier tout vecteur $\overrightarrow{u}$ par des réels, c'est-à-dire écrire $\lambda\cdot\overrightarrow{u}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On a les propriétés suivantes : pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ et tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$,
  1. $1\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}$.
  2. $\lambda\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=\lambda\cdot\overrightarrow{u}+\lambda\cdot\overrightarrow{v}$.
  3. $(\lambda+\mu)\cdot\overrightarrow{u}=\lambda\cdot\overrightarrow{u}+\mu\cdot\overrightarrow{u}$.
  4. $\lambda\cdot(\mu\cdot\overrightarrow{u})=(\lambda\times\mu)\cdot\overrightarrow{u}$.



C'est là la grande nouveauté par rapport au chapitre 17 : on dispose d'une opération qui « mélange » vecteurs et réels (c'est une opération dite externe, ce n'est pas une loi de composition interne car on l'applique à deux objets de types différents.

Sur le dessin ci-dessus, on a pris $\lambda<0$.

Comme on l'a dit en introduction, on va en fait adopter le point de vue inverse et appeler vecteur tout objet qui vérifie ces propriétés et espace vectoriel tout ensemble de vecteurs. Nous allons ensuite bâtir toute une théorie. Les résultats démontrés pourront alors être appliqués aux vecteurs du plan et de l'espace mais aussi à de nombreux types d'objets très variés (fonctions, suites, polynômes, matrices, etc). L'avantage est que l'on pourra se représenter géométriquement les espaces vectoriels, même les plus « abstraits » comme des univers géométriques semblables au plan ou à l'espace.

2) Loi externe

On se donne dans ce paragraphe un ensemble non vide E.

Définition. *Une loi externe de $\mathbb{K}$ sur E est une application φ de $\mathbb{K}\times E$ dans E.*

On note toujours l'élément de $\mathbb{K}$ à gauche et l'élément de E à droite !

Notation : Comme pour une LCI dans le chapitre 17, une loi externe sera notée de façon opérationnelle plutôt que fonctionnelle : pour tous $\lambda\in\mathbb{K}$ et $x\in E$, au lieu de note $\varphi(\lambda,x)$, on note $\lambda\cdot x$ ou encore plus simplement λx.

Exemples :

- *La multiplication par un réel pour les vecteurs du plan ou de l'espace est une loi externe de $\mathbb{K}$ sur le plan ou l'espace.*
- ***Loi externe sur*** $\mathbb{K}^n$***.*** *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{K}^n$ une loi externe $\cdot$ par :*

$$\forall u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad \lambda \cdot u = (\lambda u_1, \dots, \lambda u_n).$$

- ***Loi externe sur*** $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$***.*** *Pour tout $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on définit sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une loi externe $\cdot$ par :*

$$\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad \lambda \cdot M = (\lambda M_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}.$$

Multiplier une fonction de $\mathbb{R}^D$ par un λ complexe non réel donne une fonction de $\mathbb{C}^D$. Autrement dit la multiplication par un complexe n'est pas une loi externe de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}^D$.

- ***Loi externe sur*** $\mathbb{K}^D$***.*** *Soit D une partie de $\mathbb{R}$. On définit sur $\mathbb{K}^D$ une loi externe $\cdot$ par*

$$\forall f \in \mathbb{K}^D, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad \lambda \cdot f : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda f(x) \end{array} \right. .$$

- ***Loi externe sur*** $\mathbb{K}^\mathbb{N}$***.*** *On définit sur $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ une loi externe $\cdot$ par*

$$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^\mathbb{N}, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad \lambda \cdot (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

- ***Loi externe sur*** $\mathbb{K}[X]$***.*** *On définit sur $\mathbb{K}[X]$ une loi externe $\cdot$ par*

$$\forall P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X], \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad \lambda \cdot P = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k X^k.$$

La loi $\cdot$ sur E n'est pas la même que la loi $\cdot$ sur E^X. Cette dernière consiste en la multiplication de toutes les images (via la loi $\cdot$). Pourtant, dans la suite, nous n'allons jamais différencier la notation entre les différentes lois externes. Comme dans le chapitre 17, l'objectif est d'uniformiser toutes les notations.

- ***Plus généralement : loi externe sur*** E^X***.*** *Supposons que E soit muni d'une loi externe $\cdot$. Soit X un ensemble non vide quelconque. On définit sur E^X (l'ensemble des fonctions de X dans E) une loi externe $\cdot$ par :*

$$\forall f \in E^X, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad \lambda \cdot f : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda \cdot f(x) \end{array} \right. .$$

3) Structure d'espace vectoriel

Définition. *Soit E un ensemble. On dit que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel s'il est muni d'une loi de composition interne $+$ et d'une loi externe $\cdot$ de $\mathbb{K}$ sur E vérifiant les propriétés suivantes :*

- *$(E, +)$ est un groupe abélien dont l'élément neutre est noté 0_E ou 0 et est appelé le vecteur nul.*
- *La loi interne $+$ et la loi externe $\cdot$ vérifient les quatre propriétés suivantes :*

$(C_1) : \forall x \in E,\ 1 \cdot x = x.$
$(C_2) : \forall \lambda \in K,\ \forall (x,y) \in E^2,\ \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y.$
$(C_3) : \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E,\ (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x.$
$(C_4) : \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E,\ \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x.$

Les éléments de E sont appelés vecteurs, les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires, la loi interne $+$ est appelée addition, et la loi externe $\cdot$ est appelée multiplication (ou produit) par un scalaire.

La propriété (C_1) est appelée compatibilité du neutre multiplicatif de $\mathbb{K}$, la propriété (C_2) est appelée distributivité de $\cdot$ sur l'addition dans $\mathbb{K}$, la propriété (C_3) est appelée distributivité de $\cdot$ sur $+$ et la propriété (C_4) est appelée propriété d'associativité externe (ou pseudo-associativité).

Remarques :

- Nous verrons dans le paragraphe I.4 que cette structure se retrouve partout en mathématiques et que nous en avons déjà vu de nombreux exemples.

- Nous verrons dans la feuille d'exercices associée que les propriétés (C_1), (C_2), (C_3) et (C_4) sont toutes nécessaires pour établir des propriétés intuitives que l'on pourra utiliser librement dans la suite. D'ailleurs il y a techniquement 10 propriétés : le fait que $+$ soit une LCI, que $\cdot$ soit une LCE, l'associativité de $+$, la commutativité de $+$, l'existence d'un élément neutre, l'existence pour tout vecteur d'un symétrique et les quatre propriétés supplémentaires.. Nous montrerons d'autres propriétés dans le paragraphe I.5.

Dans l'énoncé de la définition, on a différentié les notations de l'addition $+$ sur E de l'addition $+$ sur $\mathbb{K}$. C'était la dernière fois : dans la pratique, cela ne pose aucun problème de confondre toutes les additions.
⚠ La multiplication par un scalaire est notée par un point $(\lambda \cdot x)$ ou par une absence de symbole (λx) mais jamais par une multiplication $(\lambda \times x)$, notation qu'on réserve plutôt à une loi interne notée multiplicativement (par exemple le produit de deux matrices carrées de taille n).

- De la même façon qu'un groupe est un couple $(G, *)$ avec G un ensemble et $*$ une loi interne vérifiant certaines propriétés, un espace vectoriel est un triplet $(E, +, \cdot)$ avec E un ensemble, $+$ une loi interne et $\cdot$ une loi externe vérifiant certaines propriétés. La loi $+$ étant commutative, elle sera toujours notée additivement et la loi $\cdot$ sera toujours notée de la même façon. On pourra donc parler plus simplement d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E (ou même d'un espace vectoriel E si le corps $\mathbb{K}$ est sous-entendu) plutôt que de $(E, +, \cdot)$.
- Dorénavant, un vecteur n'est plus « une flèche » ou « un truc défini par une norme, un sens et une direction » mais un élément d'un espace vectoriel, dont la définition est tout à fait rigoureuse.
- Un scalaire est un élément du corps $\mathbb{K}$ sur lequel est défini l'espace vectoriel. En général, il n'y a aucune ambiguïté tant que le produit d'un vecteur et d'un scalaire est un élément de E (c'est-à-dire que le produit est bien une loi externe).

  Par exemple, sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, les scalaires doivent être des réels sinon on peut sortir de l'ensemble.

L'existence de $-x$ découle simplement du fait que $(E, +)$ est un groupe.

Définition (opposé). *Pour tout $x \in E$, on note $-x$ l'opposé (ou symétrique) de x.*

Définition (soustraction). *Pour tout $(x, y) \in E^2$, on note $x - y = x + (-y)$, l'addition de x avec l'opposé de y.*

⚠ **IL N'Y A PAS DE NOTION DE PRODUIT DE VECTEURS EN GÉNÉRAL.**

Par exemple on n'a pas défini de multiplication pour deux matrices de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$.

ET ENCORE MOINS DE DIVISION DE VECTEURS ! ! ! !

D'ailleurs on ne divise pas non plus par un scalaire : on note $\dfrac{1}{\lambda}x$ et jamais $\dfrac{x}{\lambda}$ lorsque $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Dans certains espaces vectoriels, il existe toutefois un produit interne (comme dans $\mathbb{K}^{\mathbb{R}}$ ou dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Si ce produit munit l'espace d'une structure d'anneau, alors on parle de structure d'algèbre.

Proposition. *Tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

DÉMONSTRATION. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$ donc $\lambda x \in E$. Les quatre propriétés supplémentaires sont vérifiées pour les λ complexes dont pour les λ réels. Dès lors E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. $\square$

⚠ La réciproque est fausse.

Par exemple, il est immédiat que $E = \mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Mais multiplier un vecteur de $\mathbb{R}$ (un réel ici) par un scalaire complexe non réel donne un complexe non réel, c'est-à-dire un élément qui n'appartient pas à E : la loi n'est pas externe.

4) Premiers exemples

Exemples :

- *Le corps $\mathbb{K}$ (muni de l'addition et de la multiplication externe... qui est alors interne) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul est le réel 0.*
- ***Espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.** Pour tout $n \geqslant 2$, on munit $\mathbb{K}^n$ d'une addition $+$ par : pour tous $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n$ et $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n$,*

$$u + v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n).$$

Cette addition et la multiplication externe définie dans le paragraphe I.2 munissent $\mathbb{K}^n$ d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul est le n-uplet $(0,\ldots,0)$.

Plus généralement :

En d'autres termes, on somme coordonnée par coordonnée et on multiplie toutes les coordonnées par λ. Ici, par soucis de simplicité (et car c'est l'usage et c'est le but d'uniformisation de ce chapitre), nous avons noté de la même façon les additions et multiplications externes sur les différents espaces vectoriels $E_1,\ldots,E_n$ et encore de la même façon pour l'espace vectoriel E.

Théorème. *Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Soient $E_1,\ldots,E_n$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On définit sur $E = E_1 \times \cdots \times E_n$,*

- *une addition $+$ par : pour tous $u=(u_1,\ldots,u_n) \in E$ et $v=(v_1,\ldots,v_n) \in E$, $u+v=(u_1+v_1,\ldots,u_n+v_n)$.*
- *une addition externe $\cdot$ par : pour tous $u=(u_1,\ldots,u_n) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda\cdot u = (\lambda\cdot u_1,\ldots,\lambda\cdot u_n)$.*

Alors E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration.

- Il est immédiat que $+$ est une LCI et que $\cdot$ est une LCE sur E.
- L'addition se fait coordonnée par coordonnée. L'addition dans chaque E_i étant associative et commutative, on en déduit que c'est aussi le cas pour l'addition sur E. Il est immédiat que $(0,\ldots,0)$ est neutre pour l'addition et que tout $(u_1,\ldots,u_n) \in E$ admet $(-u_1,\ldots,-u_n)$ pour symétrique. Ainsi E est un groupe pour l'addition.
- Vérifions les quatre dernières propriétés.
  - ⋆ Pour tout $(u_1,\ldots,u_n) \in E$, $1\cdot u = (1\cdot u_1,\ldots,1\cdot u_n) = (u_1,\ldots,u_n) = u$. Donc (C_1) est vraie sur E.
  - ⋆ Soient $u=(u_1,\ldots,u_n)$ et $v=(v_1,\ldots,v_n)$ dans E. Soit $\lambda \in K$. On a

Dans les n-uplets, on utilise le fait que les propriétés (C_1), (C_2), (C_3) et (C_4) sont vraies pour $E_1,\ldots,E_n$.

$$\begin{aligned}\lambda\cdot(u+v) &= \lambda\cdot(u_1+v_1,\ldots,u_n+v_n)\\ &= (\lambda\cdot(u_1+v_1),\ldots,\lambda\cdot(u_n+v_n))\\ &= (\lambda\cdot u_1+\lambda\cdot v_1,\ldots,\lambda\cdot u_n+\lambda\cdot v_n)\\ &= (\lambda\cdot u_1,\ldots,\lambda\cdot u_n)+(\lambda\cdot v_1,\ldots,\lambda\cdot v_n)\\ &= \lambda\cdot u+\lambda\cdot v.\end{aligned}$$

Donc (C_2) est vraie sur E.

  - ⋆ Soient $u=(u_1,\ldots,u_n)$ et $(\lambda,\mu) \in K^2$. On a

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)\cdot u &= ((\lambda+\mu)\cdot u_1,\ldots,(\lambda+\mu)\cdot u_n)\\ &= (\lambda\cdot u_1+\mu\cdot u_1,\ldots,\lambda\cdot u_n+\mu\cdot u_n)\\ &= (\lambda\cdot u_1,\ldots,\lambda\cdot u_n)+(\mu\cdot u_1,\ldots,\mu\cdot u_n)\\ &= \lambda\cdot u+\mu\cdot u.\end{aligned}$$

Donc (C_3) est vraie sur E.

  - ⋆ Soient $u=(u_1,\ldots,u_n)$ et $(\lambda,\mu) \in K^2$. On a

$$\begin{aligned}\lambda\cdot(\mu\cdot u) &= \lambda\cdot(\mu\cdot u_1,\ldots,\mu\cdot u_n)\\ &= (\lambda\cdot(\mu\cdot u_1),\ldots,\lambda\cdot(\mu\cdot u_n))\\ &= ((\lambda\times\mu)\cdot u_1,\ldots,(\lambda\times\mu)\cdot u_n)\\ &= (\lambda\times\mu)\cdot u.\end{aligned}$$

Donc (C_4) est vraie sur E. □

On connaît bien ces quatre exemple ci-contre et on a vu dans les chapitres dédiés qu'ils étaient des groupes abéliens pour l'addition. Il est facile de vérifier que la multiplication externe vérifie les quatre propriétés. On le fera une bonne fois pour toute dans la preuve du théorème plus général ci-dessous.

On rappelle qu'une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$, qu'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une application de $[\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$ dans $\mathbb{K}$ et qu'un polynôme est une une suite presque nulle. Dès lors ces trois exemples sont bien un cas particulier du théorème ci-contre.

Ici encore, par soucis de simplicité (et car c'est l'usage et c'est le but d'uniformisation de ce chapitre), nous avons noté de la même façon l'addition et la multiplication externe sur E et celles sur E^X.

Exemples :

- ***Espace vectoriel*** $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$***.*** *Pour tout* $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$*, l'addition sur* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *(cf. chapitre 23) et la multiplication externe définie dans le paragraphe I.2 munissent* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *d'une structure de* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Le vecteur nul est la matrice nulle* $0_{n,p}$.
- ***Espace vectoriel*** $\mathbb{K}^D$***.*** *Soit* D *une partie non vide de* $\mathbb{R}$*. L'addition sur* $\mathbb{K}^D = \mathcal{F}(D,\mathbb{K})$ *(cf. partie A du chapitre 4) et la multiplication externe définie dans le paragraphe I.2 munissent* $\mathbb{K}^D$ *d'une structure de* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Le vecteur nul est la fonction nulle de* D *dans* $\mathbb{K}$*.*
- ***Espace vectoriel*** $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$***.*** *L'addition sur* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *(cf. partie A du chapitre 14) et la multiplication externe définie dans le paragraphe I.2 munissent* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *d'une structure de* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Le vecteur nul est la suite nulle.*
- ***Espace vectoriel*** $\mathbb{K}[X]$***.*** *L'addition sur* $\mathbb{K}[X]$ *(cf. chapitre 21) et la multiplication externe définie dans le paragraphe I.2 munissent* $\mathbb{K}[X]$ *d'une structure de* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Le vecteur nul est le polynôme nul.*

Plus généralement :

Théorème. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soit* X *un ensemble non vide quelconque. On définit sur* $E^X = \mathcal{F}(X,E)$*,*

- *une addition* $+$ *par :*

$$\forall f \in E^X, \qquad \forall g \in E^X, \qquad f+g : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array} \right.$$

- *une addition externe* $\cdot$ *par :*

$$\forall f \in E^X, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad \lambda\cdot f : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda\cdot f(x) \end{array} \right.$$

Alors E^X *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

Démonstration.

- Soient f et g dans E^X et $\lambda \in \mathbb{K}$. Comme E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, pour tout $x \in X$, $f(x)+g(x) \in E$ et $\lambda\cdot f(x) \in E$. Ainsi $f+g$ et $\lambda\cdot f$ sont des éléments de E^X. On en déduit que $+$ est bien une LCI sur E^X et $\cdot$ une LCE sur E^X.
- Montrons que E^X est un groupe pour l'addition.
  - ⋆ Soient f, g et h dans E^X. Soit $x \in X$. Par associativité de $+$ sur E (car c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel),

$$\begin{aligned}((f+g)+h)(x) &= (f+g)(x)+h(x)\\ &= (f(x)+g(x))+h(x)\\ &= f(x)+(g(x)+h(x))\\ &= f(x)+(g+h)(x)\\ &= (f+(g+h))(x).\end{aligned}$$

    Ainsi $(f+g)+h = f+(g+h)$.
  - ⋆ Soient f et g dans E^X. Soit $x \in X$. Par commutativité de $+$ sur E (car c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel),

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x)$$

    Ainsi $f+g = g+f$.

Cette démonstration est très fastidieux (même si facile). Rassurez-vous c'est la quasi dernière fois que l'on montre qu'un espace est un espace vectoriel. Dès le prochain paragraphe, nous verrons la notion de sous-espace vectoriel.

- ⋆ Introduisons

$$\widetilde{0} : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & 0_E \end{array} \right.$$

On a $\widetilde{0} \in E^X$. Soit $f \in E^X$. Pour tout $x \in X$,

$$(f + \widetilde{0})(x) = f(x) + \widetilde{O}(x) = f(x) + 0_E = f(x).$$

Ainsi $f + \widetilde{0} = f$. Comme $+$ est commutative, on en déduit que $\widetilde{0}$ est l'élément neutre pour $+$.

- ⋆ Soit $f \in E^X$. Notons

$$-f : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & -f(x) \end{array} \right. .$$

Pour tout $x \in X$,

$$(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = 0_E = \widetilde{0}(x).$$

Ainsi $f + (-f) = \widetilde{0}$. Comme $+$ est commutative, on en déduit que f admet un symétrique pour $+$.

Ces quatre points permettent de conclure que E^X est un groupe abélien pour l'addition.

- Vérifions les quatre dernières propriétés.
  - ⋆ Soit $f \in E^X$. Pour tout $x \in X$, $(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$ (puisque (C_1) est vérifiée sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E). On en déduit que $1 \cdot f = f$ donc (C_1) est vérifiée par E^X.
  - ⋆ Soient f et g dans E^X et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $x \in X$,

$$(\lambda \cdot (f + g))(x) = \lambda \cdot (f + g)(x) = \lambda \cdot (f(x) + g(x)).$$

Comme (C_2) est vérifiée sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, il vient que

$$(\lambda \cdot (f + g))(x) = \lambda \cdot f(x) + \lambda \cdot g(x) = (\lambda \cdot f)(x) + (\lambda \cdot g)(x) = (\lambda \cdot f + \lambda \cdot g)(x).$$

On en déduit que $\lambda \cdot (f + g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$ donc (C_2) est vérifiée par E^X.

  - ⋆ Soit f dans E^X et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Pour tout $x \in X$, $((\lambda + \mu) \cdot f)(x) = (\lambda + \mu) \cdot f(x)$. Comme (C_3) est vérifiée sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, il vient que

$$((\lambda + \mu) \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(x) = (\lambda \cdot f + \mu \cdot f)(x)$$

On en déduit que $(\lambda + \mu) \cdot f = \lambda \cdot f + \mu \cdot f$ donc (C_3) est vérifiée par E^X.

  - ⋆ Soit f dans E^X et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Pour tout $x \in X$,

$$(\lambda \cdot (\mu \cdot f))(x) = \lambda \cdot (\mu \cdot f)(x) = \lambda \cdot (\mu \cdot f(x)).$$

Comme (C_4) est vérifiée sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, il vient que

$$(\lambda \cdot (\mu \cdot f))(x) = (\lambda \times \mu) \cdot f(x) = ((\lambda \times \mu) \cdot f)(x).$$

On en déduit que $\lambda \cdot (\mu \cdot f) = (\lambda \times \mu) \cdot f$ donc (C_4) est vérifiée par E^X.

Ainsi E^X est un espace vectoriel. □

5) Premières propriétés des espaces vectoriels

Considérons E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le but de ce paragraphe est de démontrer des propriétés qui nous permettront de travailler de façon intuitive sur E, sans nous poser de question.

Déjà, puisque E est un groupe pour l'addition, on en déduit que :

Ce résultat est toujours valable si $x+y=z+x$ puisque le groupe est abélien. On peut simplifier comme sur $\mathbb{R}$.

Proposition. *Tout élément de E est régulier, c'est-à-dire que :*

$$\forall (x,y,z) \in E^3, \qquad x+y=x+z \Rightarrow y=z$$

Explorons maintenant un peu plus les liens entre l'addition et la multiplication externe.

Proposition (propriétés des zéros). *Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$.*

1. $0 \cdot x = 0_E$.
2. $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.
3. $\lambda \cdot x = 0_E \iff \lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E$.

On aurait pu charger la définition d'un espace vectoriel de nombreuses autres propriétés. Mais les dix suffisent à en obtenir beaucoup d'autres, comme nous le voyons dans ce paragraphe.

Remarque : Comme on l'a dit plus haut, on écrira parfois 0 à la place de 0_E pour désigner le vecteur nul. On écrira par exemple la proposition précédente avec $0 \cdot x = 0$, $\lambda \cdot 0 = 0$ et $\lambda \cdot x = 0 \iff \lambda = 0 \text{ ou } x = 0$. Il n'y a aucune ambiguïté dans ce qui précède si on réfléchit tant soit peu à la nature des objets qu'on manipule : en effet, quand on écrit une quantité du type $\lambda \cdot x$, la quantité λ (ce qu'il y a avant le point) est un scalaire et x (ce qu'il y a après le point) est un vecteur, et le résultat final est un vecteur. Par conséquent, dans l'égalité $0 \cdot x = 0$, le premier zéro est le zéro réel, et le deuxième zéro est le vecteur nul, tandis que dans l'équivalence $\lambda \cdot x = 0 \iff \lambda = 0 \text{ ou } x = 0$, le premier zéro est le vecteur nul, le deuxième zéro est le zéro réel, et le dernier zéro est le vecteur nul.

Démonstration.

□

Ces propriétés ressemblent comme deux gouttes d'eau à celles dans un anneau. Mais il faut refaire la démonstration : ici c'est une loi externe et non interne.

Proposition (propriétés de la soustraction). *Soient $(x,y) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$.*

1. $\lambda \cdot (x-y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y$.
2. $(\lambda - \mu) \cdot x = \lambda \cdot x - \mu \cdot x$.
3. $-(\lambda \cdot x) = (-\lambda) \cdot x = \lambda \cdot (-x)$.

Démonstration.

$\square$

Remarques :

- Le troisième point de la proposition précédente assure que

$$\underbrace{-x}_{\text{opposé de } x} = \underbrace{(-1) \cdot x}_{\text{produit de } x \text{ par } -1}$$

On parlera ensuite du cas où $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$

- Puisque $(E, +)$ est un groupe, nous avons vu dans le chapitre 17 la notation nx lorsque $n \in \mathbb{N}$ et $x \in E$. Rappelons qu'il s'agit de $nx = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ fois}}$. Quand on note le produit externe sans $\cdot$, il y a donc conflit avec $n \cdot x$, le produit (externe) de x par le réel n. En fait tout va bien :

Proposition. *Soit $x \in E$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :*

$$\underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ fois}} = \underbrace{n \cdot x}_{\text{produit de } x \text{ par } n}$$

Démonstration. Raisonnons par récurrence :

- $1x = x$ et la propriété (C_1) assure que $1 \cdot x = x$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons l'égalité vraie au rang n. Alors

$$(n+1)x = nx + x = n \cdot x + x = (n+1) \cdot x.$$

On utilise tout à tour la définition de $(n+1)x$, l'hypothèse de récurrence et la propriété (C_3)

Ainsi l'égalité est vraie au rang $n + 1$.

D'où l'égalité pour tout $n \in \mathbb{N}$, par récurrence. $\square$

Dorénavant, nous arrêtons donc d'utiliser le symbole $\cdot$ entre scalaire et vecteur sauf ambiguïté.

Remarque : On déduit de ces deux dernières propriétés (ainsi que de (C_4) et (C_1)) que, pour tous $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$ et $x \in E$,

$$nx = \underbrace{-x - \cdots - x}_{-n \text{ fois}} = (-n) \cdot (-x) = (-n) \cdot ((-1) \cdot x) = ((-n) \times (-1)) \cdot x = n \cdot x.$$

Ainsi, on peut travailler dans un espace vectoriel de façon intuitive, « comme sur $\mathbb{R}$ », et il ne sera plus nécessaire de les justifier avec les propriétés (C_1), (C_2), (C_3) et (C_4).

6) Combinaisons linéaires

Nous avons déjà rencontré des combinaisons linéaires de vecteurs (sans les appeler vecteurs) dans les chapitres précédents. En vrac : la dérivée d'une combinaison linéaire de fonctions dérivables est la combinaison linéaire de leur dérivée, des combinaisons linéaires d'intégrales de fonctions, l'écriture d'un polynôme comme une combinaison linéaire de monômes, etc. Nous allons généraliser ce principe à des combinaisons linéaires de vecteurs dans un espace vectoriel : d'abord un nombre fini puis un nombre quelconque.

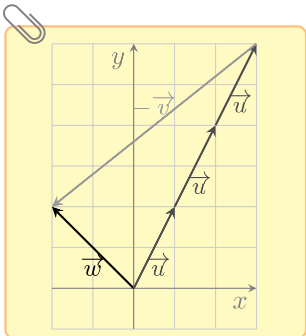
a) Combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs

Par stabilité de E pour l'addition (et par récurrence immédiate sur le nombre de vecteurs), la somme d'un nombre fini de vecteurs de E est encore un vecteur de E :

On parle aussi bien de combinaison linéaire de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ que de combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$.

Définition (combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs). *Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. On dit que $x \in E$ est combinaison linéaire de $(x_1, \ldots, x_n)$ s'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que*

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n.$$



Exemples :

- *Dans $\mathbb{R}^2$, le vecteur $\vec{w} = (-2, 2)$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u} = (1, 2)$ et $\vec{v} = (5, 4)$. En effet :*
- *Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $(-1, 0, 4)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$. En effet :*
- *Dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P = 2X^4 + 5X^2 + 3X - 2X + 5$ est combinaison linéaire des vecteurs (qui sont des polynômes) $X^4 - X$, $X^2 + 1$ et X. En effet :*
- *Le vecteur $x \longmapsto \cos(2x)$ est combinaison linéaire des vecteurs $x \longmapsto \cos^2(x)$ et $x \longmapsto 1$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. En effet :*

Autrement dit x et y sont colinéaires si l'un est combinaison linéaire de l'autre.

Définition (vecteurs colinéaires). *Soit $(x, y) \in E^2$.*

- *On dit que x est colinéaire à y s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda y$.*
- *On dit que x et y sont colinéaires si x est colinéaire à y* ***ou*** *si y est colinéaire à x.*

Remarque : Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur puisque, pour tout $x \in E$, $0_E = 0 \cdot x$.

Proposition. *Deux vecteurs x et y de E sont colinéaires si et seulement si $x = 0_E$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x$.*

Démonstration. Si $x = 0_E$, alors x est colinéaire à y et donc x et y sont colinéaires. Cela montre le sens indirect. Réciproquement, supposons que les vecteurs x et y de E sont colinéaires. Si y est colinéaire à x, c'est fini. Si y n'est pas colinéaire à x, c'est que x est colinéaire à y : il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda y$. Mais, alors $\lambda = 0$ (car sinon $y = \frac{1}{\lambda}x$, ce qui est exclu) et donc $x = 0_E$. Par conséquent $x = 0_E$ ou y est colinéaire à x. $\square$

b) Combinaison linéaire d'un nombre quelconque de vecteurs

Dans toute la suite du chapitre, on se donne I une famille d'indices quelconque.

Cette définition est analogue à celle pour les polynômes dans le chapitre 21, ou pour les valuations p-adiques dans le chapitre 12.

Définition (famille presque nulle de scalaire). *On dit qu'une famille de scalaire $(\lambda_i)_{i \in I}$ est presque nulle (ou à support fini) si tous les éléments de la famille sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux.*

Remarques :

- 0_E est combinaison linéaire de toute famille de vecteurs de E (en prenant tous les coefficients égaux à 0).
  ⚠ La réciproque est fausse : une combinaison linéaire peut être nulle sans que tous les coefficients le soient.

  Par exemple $2 \cdot (1, 1) - 1 \cdot (2, -3) + 5 \cdot (0, 1) = (0, 0)$.
- Si I est fini, la notion de famille presque nulle indexée par I n'a pas d'intérêt.

- Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille presque nulle de scalaire. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille (pas forcément presque nulle) de vecteurs de E. On définit alors

$$\sum_{i\in I}\lambda_i x_i = \sum_{\substack{i\in I\\ \lambda_i\neq 0}}\lambda_i x_i$$

qui est une somme finie de vecteurs de E donc qui appartient à E.
- L'ensemble $\{i\in I \,|\, \lambda_i\neq 0\}$ est appelé le support de la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$. Si la famille est presque nulle, le support est fini. D'où l'appellation « famille de scalaires à support fini ».

On parle aussi bien de combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i\in I}$ que de combinaison linéaire des vecteurs x_i, $i\in I$.

Définition (combinaison linéaire d'une famille quelconque de vecteurs). *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $x\in E$ est combinaison linéaire de $(x_i)_{i\in I}$ s'il existe $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille **presque nulle** de scalaires telle que $x=\sum_{i\in I}\lambda_i x_i$.*

Pour tout $i\in I$, on dit que λ_i est le coefficient de x devant x_i dans la combinaison linéaire.

La famille $(x_i)_{i\in I}$ peut être infinie, mais la somme ci-contre est impérativement finie !

Remarque : En d'autres termes, un vecteur x est combinaison linéaire des x_i, $i\in I$, lorsqu'il est combinaison linéaire d'un nombre fini d'entre eux (mais le nombre n'est pas fixé : il peut être combinaison linéaire de 2 vecteurs comme de 2025 vecteurs).

Exemple : *$\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ puisque tout polynôme est combinaison linéaire d'un nombre fini de X^k, $k\in\mathbb{N}$. Rappelons que la notation*

$$P=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kX^k$$

désigne en fait une somme finie.

II Sous-espaces vectoriels

Dans toute la suite, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On a vu que montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel est fastidieux. Heureusement, comme dans le chapitre 17 avec les sous-groupes, sous-corps et sous-anneaux, il existe une notion de sous-espace vectoriel. Dans la pratique, la plupart des espaces vectoriels que l'on rencontra seront en fait des sous-espaces vectoriels d'un des espaces vectoriels de référence du paragraphe I.4.

1) Définition et caractérisations

On abrège souvent « sous-espace vectoriel » en « s.e.v ».

Définition. *Soit F une partie de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F est stable par les lois $+$ et $\cdot$ et si $(F,+,\cdot)$ est un espace vectoriel. En d'autres termes, un sous-espace vectoriel de E est un espace vectoriel inclus dans E pour les mêmes lois que E (restreintes à F).*

En particulier, si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $(F,+)$ est un sous-groupe de $(E,+)$ et donc en particulier :

La réciproque est fausse, comme on le verra dans les exemples ci-dessous.

Proposition. *Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $0_E\in F$.*

Par contraposée :

Corollaire. *Soit F une partie de E. Si $0_E\notin F$, alors F n'est pas un sous-espace vectoriel de E.*

Remarques :

- $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E. Nous verrons plein d'exemples dans les prochains paragraphes.
- ⋆ Si G est un sous-espace vectoriel de E et si F est un sous-espace vectoriel de G, alors F est un sous-espace vectoriel de E.
  ⋆ Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \subset G$, alors F est un sous-espace vectoriel de G.

Comme pour les sous-groupes, sous-anneaux et sous-corps il existe une caractérisation pratique :

Proposition (première caractérisation des sous-espaces vectoriels). *Une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :*

- $F \neq \varnothing$,
- *F est stable par somme :* $\forall (x, y) \in F^2$, $x + y \in F$,
- *F est stable par multiplication par un scalaire :* $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times F$, $\lambda \cdot x \in F$.

Compte tenu de la proposition précédente, pour montrer que $F \neq \varnothing$, on montre en général que $0_E \in F$. Et, si ce n'est pas le cas, on conclut directement que F n'est pas un sous-espace vectoriel.

Démonstration.

□

Proposition (deuxième caractérisation des sous-espaces vectoriels). *Une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :*

- $F \neq \varnothing$,
- *F est stable par combinaison linéaire :* $\forall (x, y) \in F^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda x + \mu y \in F$.

En un mot, comme pour les sous-groupes et les sous-anneaux, on peut fusionner certaines propriétés. En l'occurrence ici, on fusionne les deux stabilités en une seule condition à vérifier.

Démonstration.

□

Proposition (troisième caractérisation des sous-espaces vectoriels). *Une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :*

- $F \neq \varnothing$,
- $\forall (x, y) \in F^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda x + y \in F$.

Cette caractérisation est mal-aimée par certains auteurs à cause de l'absence de symétrie du second critère (contrairement à son analogue dans la deuxième caractérisation) qui la rend moins « élégante ». Mais on l'a retrouve souvent malgré tout donc pas de problème pour l'utiliser.

Démonstration. Le sens direct se montre comme celui de la deuxième caractérisation. Réciproquement supposons que F vérifie les deux conditions.

□

Remarque : Dans la deuxième caractérisation, on a vu qu'une combinaison linéaire de deux vecteurs d'un sous-espace vectoriel F appartient encore à F. Cela découle du fait que F est un espace vectoriel. Cela se généralise donc à une combinaison linéaire quelconque de vecteurs de F :

Le concept de sous-espace vectoriel est fait pour ça : que l'on reste dans celui-ci lorsqu'on fait des additions et des multiplications par un scalaire.

Proposition (stabilité par combinaison linéaire). *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F. Alors, pour toute famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I}$ de scalaires, $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i \in F$.*

2) Interprétation géométrique

Proposition/Définition.

- *L'ensemble $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé sous-espace vectoriel nul.*
- *Si $x \neq 0$, l'ensemble $D = \{\lambda \cdot x \,|\, \lambda \in \mathbb{K}\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé droite vectorielle engendrée par x.*
- *Si x et y sont deux vecteurs non colinéaires, l'ensemble*

$$P = \{\lambda \cdot x + \mu \cdot y \,|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}.$$

  est un sous-espace vectoriel de E appelé plan vectoriel engendré par x et y.

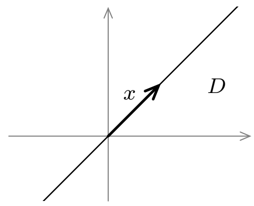
Démonstration.

□

Si $x = 0$, on pourrait encore définir D mais alors il s'agit de $\{0_E\}$ que l'on ne peut pas qualifier de droite.

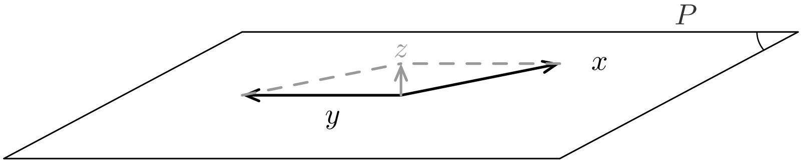
Interprétation géométrique.

- Géométriquement, D est la droite contenant x et passant par 0 (d'où le nom de « droite vectorielle » contrairement à une « droite affine » qui ne passe pas forcément par 0, cf. chapitre 37) : c'est l'ensemble de tous les vecteurs colinéaires à x.



- Géométriquement, P est le plan contenant x et y passant par 0 (d'où le nom de « plan vectoriel » contrairement à un « plan affine » qui ne passe pas forcément par 0, cf. chapitre 37) : c'est l'ensemble de tous les vecteurs qui s'écrivent comme combinaison linéaire de x et de y.

Si x et y sont colinéaire, alors on peut encore définir P mais alors :
• Si $x = y = 0$, $P = \{0_E\}$,
• Si $x \neq 0$ (resp. $y \neq 0$), P est la droite vectorielle engendrée par x (resp. y).
Dans les deux cas, on ne pourrait pas qualifier P de plan.



- Ces notions seront encore généralisées dans le paragraphe II.4.
- Une droite vectorielle est encore appelée un sous-espace vectoriel de dimension 1. Un plan vectoriel est encore appelé un sous-espace vectoriel de dimension 2. Nous en reparlerons dans le chapitre 33, consacré à la notion de dimension.

3) Exemples usuels

a) Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$

Exemples :

F est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ donc est un ensemble de **couples**. Par conséquent, lorsqu'on veut prouver que F est stable par somme, il faut prendre deux éléments de F donc deux couples. De même, si on est dans $\mathbb{K}^3$, il faut prendre deux triplets pour prouver que l'ensemble en question est stable par somme.

Dans l'écriture $5y - 3x = 0$, il faut retenir qu'il s'agit de $5\times$(deuxième coordonnée)$-3\times$(première coordonnée)$=0$. Une fois que cela est compris, ce type d'exercice est extrêmement facile.

- *L'ensemble $F = \{(x,y) \in \mathbb{K}^2 \,|\, 5y - 3x = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^2$. En effet :*

Là aussi, la condition à vérifier est : $5\times$(première coordonnée)$+3\times$(deuxième coordonnée)$-10\times$(troisième coordonnée)$=0$. Ce genre d'exercice doit être fait en claquant des doigts !

- *L'ensemble $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \,|\, 5x + 3y - 10z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$. En effet :*

Ce principe de preuve fonctionne aussi quand il y a plusieurs équations (il suffit juste alors de prouver que chaque équation est vérifiée) :

Proposition. *L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à p inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.*

Remarque : En d'autres termes, pour tout $p \geqslant 1$, pour toute famille $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, l'ensemble des $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant les équations

$$(S) \quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & 0 \\ & & & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & 0 \end{array}\right.$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$. On pourra donc répondre directement à ce genre de question !

On rappelle qu'un système homogène est un système dont le second membre est nul. Si le second membre n'est pas nul, et qu'il y a au moins une solution, l'ensemble des solutions n'est pas un sous-espace vectoriel (car ne contient pas le vecteur nul) mais un sous-espace affine (cf. chapitre 37).

Démonstration. Reprenons les notations de la remarque ci-dessus : soit $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$, et prouvons que l'ensemble F des solutions du système

$$(S) \quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$. Le système étant homogène, le p-uplet nul $(0, \dots, 0)$ est solution donc F est non vide. Soient $x = (x_1, \dots, x_p)$ et $y = (y_1, \dots, y_p)$ deux éléments de F et soient λ et μ deux scalaires. Tout d'abord :

$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_p + \mu y_p)$$

Là encore, il faut se dire : « $a_{i,1} \times$(première coordonnée)$+\cdots$ ».

donc, pour tout $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$:

$$\begin{aligned} & a_{i,1}(\lambda x_1 + \mu y_1) + \cdots + a_{i,p}(\lambda x_p + \mu y_p) \\ & \quad = \lambda(a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,p}x_p) + \mu(a_{i,1}y_1 + \cdots + a_{i,p}y_p) \\ & \quad = \lambda 0 + \mu 0 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\lambda x + \mu y$ est solution de toutes les équations du système donc $\lambda x + \mu y \in F$. $\square$

Exemple : *L'ensemble des triplets (x, y, z) de $\mathbb{K}^3$ vérifiant*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 4x & + & y & - & 3z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$.

Remarques :

- On peut montrer (on le fera dans le chapitre 33) que lorsqu'une partie de $\mathbb{K}^p$ n'est pas l'ensemble des solutions d'un système linéaire, ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$. C'est par exemple le cas quand des coordonnées sont multipliées entre elles, mises à une puissance, quand il y a des inégalités, quand des équations sont égales à des réels non nuls, quand on ajoute des réels. Néanmoins, parfois cela peut être le cas sans que cela se « voit » au premier coup d'oeil.

  Par exemple, on a envie de dire que

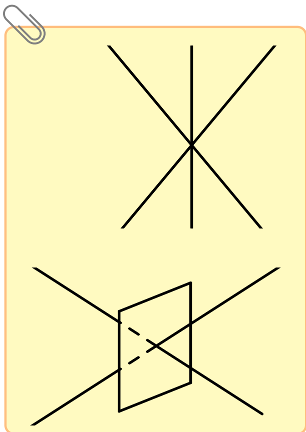
$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + x^2y + y^2x + y^3 + x + y = 0\}$$

n'est pas un sous-espace vectoriel compte tenu de toutes ces puissances. Mais en fait si : pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$x^3 + x^2y + y^2x + y^3 + x + y = (x^2 + y^2 + 1)(x + y)$$

et, puisque $x^2 + y^2 + 1$ n'est jamais nul, $(x,y) \in F$ si et seulement si $x + y = 0$. Par conséquent $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

- Dans le premier exemple ci-dessus, F est la droite d'équation $y = \dfrac{3}{5}x$, dans le deuxième, F est le plan d'équation $5x + 3y - 10z = 0$, et dans le troisième (celui avec les deux équations), F est une intersection de deux plans donc une droite. On peut en fait prouver que tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^2$ ou de $\mathbb{K}^3$ sont de ce type :



Théorème (sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^2$ et $\mathbb{K}^3$).
- *Les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^2$ sont $\{0\}$, les droites vectorielles et $\mathbb{K}^2$ tout entier.*
- *Les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^3$ sont $\{0\}$, les droites vectorielles, les plans vectoriels et $\mathbb{K}^3$ tout entier.*

Démonstration. Admis provisoirement : on le montrera à la main en TD et ce sera immédiat quand on aura fait le chapitre 33 (et on le montrera officiellement à ce moment là). $\square$

Remarque : Géométriquement, une droite vectorielle est une droite passant par l'origine (on rappelle que 0_E appartient à tous les sous-espaces vectoriels de E, et donc des droites vectorielles sont toujours sécantes en 0) et un plan vectoriel est un plan passant par l'origine. Ci-dessous, trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^2$ (premier dessin dans la marge) et trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^3$ (deuxième dessin dans la marge).

b) Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$

Théorème. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Le polynôme nul appartient à $\mathbb{K}_n[X]$ donc $\mathbb{K}_n[X]$ est non vide.
- Soient $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $Q \in \mathbb{K}_n[X]$. On a $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q)) \leqslant n$ si bien que $P + Q \in \mathbb{K}_n[X]$. Ainsi $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par somme.
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $\deg(\lambda P) \leqslant \deg(P) \leqslant n$ donc $\lambda P \in \mathbb{K}_n[X]$. Ainsi $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par multiplication par un scalaire, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. $\square$

Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors

$$\deg(\lambda P) = \deg(P)$$

et si $\lambda = 0$,

$$\deg(\lambda P) = -\infty \leqslant \deg(P).$$

Remarques :

- C'est la raison pour laquelle on a défini $\mathbb{K}_n[X]$ comme l'ensemble des polynômes de degré **inférieur ou égal à** n et non pas de degré **égal à** n. En effet, l'ensemble des polynômes de degré n n'a que peu d'intérêt en pratique puisque ce n'est pas un espace vectoriel : il n'est ni stable par somme (par exemple, X^n et $-X^n$ sont de degré n mais pas leur somme), ni par multiplication par un scalaire (car si P est de degré n, $0.P$ ne l'est pas) !
- Ici, contrairement à $\mathbb{K}^n$ dans le paragraphe précédent, il n'est pas aussi simple de caractériser les espaces vectoriels. En tout cas, les $\mathbb{K}_n[X]$ sont loin d'être les seuls !

Exemples :

- *L'ensemble $F = \{P \in \mathbb{K}[X] \,|\, P'(2) = P(1)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. En effet :*

- *L'ensemble $H = \{P \in \mathbb{K}[X] \,|\, P(0) = 0\}$. Montrons que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.*

- *Plus généralement, donnons-nous B un polynôme et posons $F = \{QB \,|\, Q \in \mathbb{K}[X]\}$ c'est-à-dire que F est l'ensemble des polynômes multiples de B. Prouvons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.*

C'est une généralisation de l'exemple précédent qui est tout simplement le cas où $B = X$.

- *Il découle du cas général précédent que, pour tout $a \in \mathbb{K}$,*

$$\{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, P(a) = P'(a) = 0\} = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, (X-a)^2 \text{ divise } P\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Rappelons que a est racine **au moins** double (i.e. est une racine multiple) de P si et seulement si $P(a) = P'(a) = 0$.

c) Sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Théorème. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors*

- *l'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales d'ordre n et à coefficients dans $\mathbb{K}$,*
- *l'ensemble $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) des matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures) d'ordre n et à coefficients dans $\mathbb{K}$,*
- *l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$) des matrices symétriques (respectivement antisymétriques) d'ordre n et à coefficients dans $\mathbb{K}$,*

sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles d'ordre n n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car il ne contient pas la matrice nulle.

Démonstration. Ces espaces contiennent la matrice nulle et sont stables par somme et multiplication par un scalaire. □

d) Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^D$

Théorème. *Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Soit D est une partie de $\mathbb{R}$. Alors*

- *l'ensemble $\mathscr{C}^0(D,\mathbb{K})$ des applications continues de D dans $\mathbb{R}$,*
- *l'ensemble $\mathscr{D}^1(D,\mathbb{K})$ des applications dérivables de D dans $\mathbb{R}$,*
- *l'ensemble $\mathscr{C}^n(D,\mathbb{K})$ des applications de classe $\mathscr{C}^n$ de D dans $\mathbb{K}$*

sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(D,\mathbb{K}) = \mathbb{K}^D$.

Dire que, si f est décroissante, alors $-f$ ne l'est pas n'est PAS un contre-exemple puisque c'est faux pour $f = 0$. **Il faut un contre-exemple explicite**.

Démonstration. Ces espaces contiennent la fonction nulle et sont stables par somme et multiplication par un scalaire d'après les chapitres 18 et 19. □

Exemples :

- *L'ensemble des applications décroissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$. En effet, si f est la fonction $x \mapsto -x$, alors $-f$ est la fonction $x \mapsto x$ qui n'est pas décroissante : $-f \notin F$. Comme F n'est pas stable par multiplication par un scalaire, ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*
- *Soit $T > 0$. L'ensemble F des fonctions T-périodiques sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. En effet :*

  L'ensemble des fonctions périodiques tout court n'est pas un sous-espace vectoriel car n'est pas stable par somme (cf. exercice de la feuille de TD n° 5 où l'on a montré que $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \cos\left(x\sqrt{2}\right)$ sont périodiques mais leur somme ne l'est pas).

e) Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$

Exemples :

- *L'ensemble $\mathcal{C}$ des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$. En effet :*

L'ensemble des suites géométriques n'est pas un sous-espace vectoriel, ce que l'on verra en TD.

- *L'ensemble $\mathcal{A}$ des suites arithmétiques est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$. En effet :*

4) Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition. *Une intersection quelconque de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.*

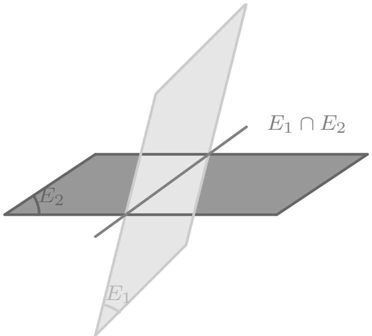
DÉMONSTRATION.

□

Lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, ce résultat est bien connu (cf. dessin ci-contre). On le vérifie aisément sur un exemple et on peut bien sûr le montrer en résolvant un système. Mais ce résultat sera bien plus simple à montrer quand on aura vu la notion de dimension et d'hyperplan (cf. chapitre 33) donc laissons sa preuve en suspens.

Exemples :

- *Dans $\mathbb{K}^3$, une intersection de plans vectoriels est donc un sous-espace vectoriel. S'ils sont distincts, alors on peut montrer que c'est une droite vectorielle de $\mathbb{K}^3$.*



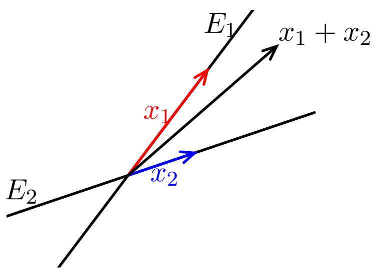
- *Si $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors on a vu que $\mathbb{K}_n[X]$ et $\{P \in \mathbb{K}[X] \,|\, P(a)=0\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$. Leur intersection $\{P \in \mathbb{K}_n[X] \,|\, P(a)=0\}$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.*

Dans la feuille de TD n° 17, on a vu qu'une union de deux sous-groupes est un groupe si et seulement si l'un des deux est inclus dans l'autre. En particulier, une union de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel si et seulement si l'un des deux est inclus dans l'autre.

⚠ L'union de deux sous-espaces vectoriels n'en est pas un en général.

Par exemple, si $F=\{P \in \mathbb{K}[X] \,|\, P(0)=0\}$ et $G=\{P \in \mathbb{K}[X] \,|\, P(1)=0\}$, on a $X \in F \cup G$ (car $X \in F$), $X-1 \in F \cup G$ (car $X-1 \in G$) mais $X+X-1$ n'appartient ni à F ni à G donc n'appartient pas à $F \cup G$. Ce dernier n'est donc pas stable pas somme et donc ce n'est pas un sous-espace vectoriel.

Autre exemple, avec un dessin : $F_1 \cup F_2$ n'est que l'union des deux droites et n'est pas le plan engendré par x_1 et x_2. Or on a vu que les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ étaient $\{0\}$ et les droites et plans vectoriels.



Une question se pose maintenant : si on se donne une partie quelconque de E et qui n'est pas un sous-espace vectoriel, qui est le plus petit sous-espace vectoriel qui la contient ? Comment le construire rigoureusement ? Réponse dans le prochain paragraphe.

5) Sous-espace vectoriel engendré par une partie

On se donne dans ce paragraphe, une partie non vide A de E (qui n'est pas forcément un sous-espace vectoriel de E).

a) Définition et exemples

On a bien sûr $\mathrm{Vect}(A) \subset E$ et on verra plus bas qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E.

Définition. *On appelle sous-espace engendré par A l'ensemble des éléments de E qui sont combinaison linéaire de vecteurs de A. On le note $\mathrm{Vect}(A)$.*

Remarques :

- Quand on parle de combinaison linéaire de vecteurs de A, on parle de combinaison linéaire d'un nombre quelconque **fini** de vecteurs de E.
- Autrement dit, $\mathrm{Vect}(A)$ est l'ensemble des vecteurs de E qui s'écrivent sous la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ où $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n$ sont des vecteurs de A et les $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires.
  On a donc :

  Avec des quantificateurs :

- Quand on écrit $A = \{x_i \,|\, i \in I\}$, les x_i sont distincts par convention dans l'écriture d'un ensemble. Cette convention n'a pas lieu dans une famille $(x_i)_{i\in I}$ où plusieurs vecteurs peuvent se répéter. Supposons que $x \in E$ s'écrive comme combinaison linéaire de vecteurs d'une famille $(x_i)_{i\in I}$ dans laquelle deux vecteurs sont égaux, disons x_{i_0} et y_{i_0} : il existe $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille presque nulle de scalaire telle que

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i = \sum_{i \in I\backslash\{i_0, j_0\}} \lambda_i x_i + \lambda_{i_0} x_{i_0} + \lambda_{j_0} x_{j_0} = \sum_{i \in I\backslash\{i_0, j_0\}} \lambda_i x_i + (\lambda_{i_0} + \lambda_{j_0}) x_{i_0}.$$

  Ainsi x est encore combinaison linéaire de vecteurs de la famille $(x_i)_{i\in I\backslash\{j_0\}}$. La réciproque est immédiate (en mettant un scalaire nul devant x_{j_0}). On en déduit :

Si ce nombre n'est pas fini, alors c'est que les scalaires de la combinaison linéaire sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux et donc c'est en fait bien une combinaison linéaire d'un nombre fini d'entre eux.

Proposition/Définition. *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On appelle sous-espace engendré par la famille $(x_i)_{i\in I}$ l'ensemble des éléments de E qui sont combinaison linéaire de $(x_i)_{i\in I}$. On le note $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$.*

On a $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I} = \mathrm{Vect}(\{x_i \,|\, i \in I\})$.

Cas particulier important : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille finie de vecteurs de E. Le nombre de vecteurs dans une combinaison linéaire de $(x_1, \dots, x_n)$ est fixe égal à n (même si certains scalaires peuvent être nuls) et les vecteurs eux-mêmes sont fixés (tandis que dans le cas général, on fait varier et le nombre de vecteurs, et les vecteurs eux-mêmes). On a donc plus simplement

Avec des quantificateurs :

Lorsque A est une partie finie, on note

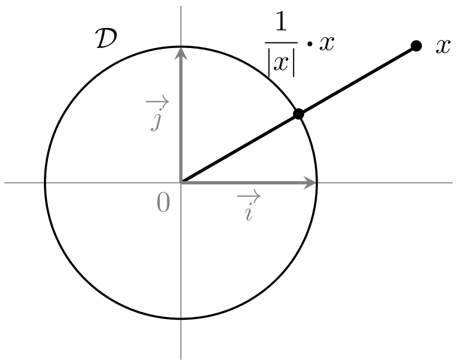
$$A = \{x_1, \dots, x_n\}$$

et alors $\mathrm{Vect}(A)$ est égal à

$$\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n).$$

Exemples :

- $\mathrm{Vect}(\{0_E\}) = \{0_E\}$.
- *Si* $x \neq 0$, *alors* $\mathrm{Vect}(x) = \{\lambda x \,|\, \lambda \in \mathbb{K}\}$ *est la droite vectorielle engendrée par* x *(d'où son nom), cf. paragraphe II.2.*
- *Si* x *et* y *sont non colinéaires, alors* $\mathrm{Vect}(x, y) = \{\lambda x + \mu y \,|(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}$ *est la plan vectoriel engendrée par* x *et* y*, cf. paragraphe II.2.*
- $\mathbb{K}_n[X] =$
- $\mathbb{K}[X] =$
- *Montrons que, si* $\mathcal{D}$ *est le cercle unité de* $\mathbb{R}^2$*, alors* $\mathrm{Vect}(\mathcal{D}) = \mathbb{R}^2$.



- *Notons* $x_1 = (1, 1, 1)$ *et* $x_2 = (1, 0, -1)$. *Donnons plus généralement tous les vecteurs de* $\mathrm{Vect}(x_1, x_2)$.

On rencontre souvent la situation inverse : étant données une ou plusieurs équations qui définissent un espace-vectoriel, peut-on trouver une famille $(x_i)_{i \in I}$ telle que $F = \mathrm{Vect}(x_i)_{i \in I}$? On dira dans le paragraphe III.1 que $(x_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice.

Exemples :

- *Soit F le plan d'équation $x + 2y + 3z = 0$. Exprimons-le sous forme de* Vect.

- *Écrivons $F = \{P \in \mathbb{K}_3[X] \,|\, P(1) = 0\}$ sous la forme d'un* Vect. *Soit $P \in \mathbb{K}_3[X]$.*

Remarques :

Et plus généralement les constants λ_i de l'écriture d'une combinaison linéaire doivent être indépendantes les unes des autres pour conclure.

- ⚠ Dans l'exemple ci-dessus une erreur grave et classique vous attend au tournant : les constantes a, b, c doivent être indépendantes les unes des autres pour conclure. Si on développe l'égalité ci-dessus pour obtenir :

$$F = \{aX^3 + (b-a)X^2 + (c-b)X - c \,|\, (a,b,c) \in \mathbb{K}^3\}$$

alors il serait faux d'écrire $F = \mathrm{Vect}(1, X, X^2, X^3)$ puisque les constantes dépendent les unes des autres (il n'y a aucune raison que ce soit le cas dans une combinaison linéaire quelconque) ! Plus précisément :

  ⋆ cette écriture entraîne que $F \subset \mathrm{Vect}(1, X, X^2, X^3)$.

  ⋆ mais l'inclusion réciproque est fausse puisque

$$\mathrm{Vect}(1, X, X^2, X^3) = \{aX^3 + bX^2 + cX + d \,|\, (a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4\} = \mathbb{K}_3[X]$$

  et, bien sûr $F \neq \mathbb{K}_3[X]$ (puisque $X \notin F$).

Autre argument pour contrer cette erreur : nous allons voir dans un instant que $A \subset \mathrm{Vect}(A)$ si bien que les vecteurs de A appartiennent à $\mathrm{Vect}(A)$. Dans cet exemple, cela signifie que les vecteurs de la famille ou de la partie doivent impérativement apparaître à F : c'est le cas pour $X - 1$, $X(X-1)$ et $X^2(X-1)$ mais pas pour X, X^2 et X^3.

b) Propriétés des sous-espaces engendrés

Cela justifie a posteriori le nom d'espace vectoriel engendré.

Proposition. *Le sous-espace engendré $\mathrm{Vect}(A)$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient A.*

DÉMONSTRATION.

□

Remarque : Par conséquent, pour prouver qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel de E, il suffit de l'écrire comme un Vect.

Il s'ensuit que

$$\mathrm{Vect}(A) = A$$

si et seulement si A est un sous-espace vectoriel.

Proposition. $\mathrm{Vect}(A)$ *est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant A, c'est-à-dire que si F est un sous-espace vectoriel de E contenant A, alors* $\mathrm{Vect}(A) \subset F$.

DÉMONSTRATION.

□

Corollaire. $\mathrm{Vect}(A)$ *est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent A :*

$$\mathrm{Vect}(A) = \bigcap_{\substack{F \text{ s.e.v. de } E \\ A \subset F}} F.$$

Preuve déjà faite en exemple de cours dans le chapitre 16.

DÉMONSTRATION. Notons I l'intersection ci-dessus.

□

Remarque : Supposons que $A = \varnothing$. S'il n'y a pas véritablement de sens à parler de combinaison linéaire des vecteurs de A (puisqu'il n'y en a pas), les caractérisations précédentes permette de donner un sens à $\mathrm{Vect}(A)$: il s'agit du plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\varnothing$. Comme tous les sous-espaces vectoriels contiennent $\varnothing$ et que $\{0_E\}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E, il est naturel de poser :

Définition. *Par convention,* $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \{0_E\}$.

En particulier, pour tout $x \in E$,

$$\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(Z \cup \{x\})$$

Proposition (ajouter ou retirer un vecteur d'un Vect**).** *Soient A et B des parties de E.*

- *Si $A \subset B$, alors $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$.*
- *Pour tout $x \in E$, si $x \in \mathrm{Vect}(A \backslash \{x\})$, alors $\mathrm{Vect}(A) = \mathrm{Vect}(A \backslash \{x\})$.*
  Autrement dit, on peut enlever de $\mathrm{Vect}(A)$ tout vecteur qui est combinaison linéaires des autres vecteurs de A.

DÉMONSTRATION.

□

Ainsi un Vect est invariant si on remplace un vecteur x de la famille par un vecteur y qui est combinaison linéaire de x et d'autres vecteurs de la famille, avec un coefficient non nul devant x.

Proposition (remplacer un vecteur dans un Vect**).** *Soit A une partie non vide de E. Soit $(x, y) \in E^2$. Supposons que y est une combinaison linéaire de $A \cup \{x\}$ avec un coefficient non nul devant x. Alors $\mathrm{Vect}(A \cup \{x\}) = \mathrm{Vect}(A \cup \{y\})$.*

DÉMONSTRATION.

□

Remarque : En particulier :

- Pour tout $x \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}^*$, $\mathrm{Vect}(A \cup \{x\}) = \mathrm{Vect}(A \cup \{\alpha x\})$.
- Pour tous $x \in E$, $y \in A$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}$, $\mathrm{Vect}(A \cup \{x\}) = \mathrm{Vect}(A \cup \{\alpha x + \beta y\})$.

On peut donc faire des opérations élémentaires sur les vecteurs d'un Vect. Pratique pour le simplifier !

Exemple : *Déterminons $F = \mathrm{Vect}(X + X^3, 7, X, X^2 + 1, -5X^3)$.*

III Familles génératrices, libres, liées et bases

Dans toute cette partie, I désigne un ensemble quelconque non vide d'indices.

1) Familles génératrices

a) Notion de famille (ou partie) génératrice

On dit aussi que $(x_i)_{i\in I}$ engendrent E ou encore que les x_i, $i \in I$ engendrent E ou encore que les x_i, $i \in I$, forment une famille génératrice.

Définition. *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E si $E = \mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$, c'est-à-dire si tout élément de E est combinaison linéaire de $(x_i)_{i\in I}$.*

Remarques : Reprenons les remarques du paragraphe précédent (sur les sous-espaces engendrés) avec cette nouvelle notion :

Attention à l'ordre des quantificateurs.

- Autrement dit $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E si, pour tout $x \in E$, il existe une famille presque nulle de scalaire $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$.
- Avec des quantificateurs, $\mathscr{G}$ est une famille génératrice de E si et seulement si :
- Par définition, $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$. Par conséquent, si on cherche une famille génératrice d'un espace vectoriel, il suffit de l'écrire comme un Vect.
- **Cas particulier important :** lorsque la famille est finie, disons $(x_1, \dots, x_n)$, le nombre de vecteurs dans la combinaison linéaire est fixe égal à n (même si certains coefficients peuvent être nuls) et les vecteurs eux-mêmes sont fixés. Dès lors $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille génératrice de E si et seulement si :

... tandis que dans le cas général, on fait varier et le nombre de vecteurs, et les vecteurs eux-mêmes (cf. paragraphe II.5.a).

Dans la pratique, on confondra parfois $A = \{x_i \,|\, i \in I\}$ et $(x_i)_{i\in I}$ pour parler simplement de famille incluse dans une autre ou d'union de parties, etc. C'est un abus pratique de notation qui ne pose pas de problème puisque l'espace engendré par une famille et l'ensemble des éléments de la famille est le même (on a vu que cela ne changeait pas l'espace engendré d'enlever un vecteur présent en double ou d'ajouter un vecteur déjà présent). Il faut toutefois bien avoir en tête que cette identification a ses limites : par exemple un élément peut être répété plusieurs fois dans une famille, pas dans une partie.

- Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille de vecteurs de E, on a $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I} = \mathrm{Vect}(X)$ avec $A = \{x_i \,|\, i \in I\}$ (la différence entre ces deux notations est que, en écrivant $A = \{x_i \,|\, i \in I\}$, on ne conserve qu'une seule fois chaque vecteur dans l'écriture et que l'ordre ne compte pas). Réciproquement, si X est une partie non vide de E, on peut l'écrire sous la forme $A = \{x_i \,|\, i \in I\}$ et alors $\mathrm{Vect}(A) = \mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$. Cela justifie la définition suivante :

Définition. *On dit qu'une partie A non vide de E est génératrice de E (ou que A engendre E) lorsque $E = \mathrm{Vect}(A)$, c'est-à-dire lorsque tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de vecteurs de A.*

Exemples : *Reprenons les exemples du paragraphe précédent sur les sous-espaces engendrés :*

- *Les familles $\varnothing$ et (0_E) engendrent $\{0_E\}$.*
- *Si $x \neq 0_E$, la famille (x) engendre la droite vectorielle engendrée par x.*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1, X, \dots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$*
- *$(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}[X]$.*
- *$(X-1, X(X-1), X^2(X-1))$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel $\{P \in \mathbb{K}_3[X] \,|\, P(1) = 0\}$.*
- *$((-2,1,0), (-3,0,1))$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2y + 3z = 0\}$.*

Méthode. Avant d'aller plus loin, donnons-une méthode générale permettant de trouver une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel F de E : on se donne un vecteur x de F et on cherche à l'écrire sous la forme $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ avec

Il faut réussir à faire apparaître des scalaires, ce qui est automatique lorsque $E = \mathbb{K}^n$ (les scalaires proviendront des coordonnées) ou $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ou $E = \mathbb{K}[X]$ (les scalaires proviendront des coefficients). Si on travaille avec des équivalents, on peut tout de suite conclure que

$$F = \mathrm{Vect}(x_i)_{i \in I}.$$

Avantage supplémentaire : si on ne savait pas que F était un sous-espace vectoriel, cela prouve que c'en est un.

- des vecteurs $x_1, \dots, x_n, \dots$ (qui **ne dépendent pas** de x) et qui appartiennent à F.
- des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ (qui dépendent de x) et qui sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

On conclut alors que $F \subset \mathrm{Vect}(x_i)_{i \in I}$. Mais, dans la mesure où les x_i appartiennent aux sous-espace vectoriel F, on a $\mathrm{Vect}(x_i)_{i \in I} \subset F$. Dès lors $(x_i)_{i \in I}$ est génératrice de F

Exemples :

- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, notons e_i le vecteur de $\mathbb{K}^n$ dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la $i^{\text{ième}}$ qui vaut 1. Alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$, c'est-à-dire que $\mathbb{K}^n = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. En effet :*

  Par exemple :

On note de la même façon ces vecteurs peu importe l'espace $\mathbb{K}^n$, c'est-à-dire qu'on note e_1 à la fois le vecteur $(1,0)$ et le vecteur $(1,0,0)$ par exemple, mais en pratique, il n'y a aucune ambiguïté sur la taille des vecteurs que l'on manipule donc cela ne pose aucun problème.

- ⚠ *Il n'y a pas unicité de la famille génératrice. Par exemple, pour tout $(x,y) \in \mathbb{K}^2$,*

$$(x,y) = (2x+3y)\,(1,1) + (-x-3y)\,(1,0) + (-2y-2x)\,(0,1)$$

  donc $((1,1),(1,0),(0,1))$ est génératrice de $\mathbb{K}^2$. Mais $((1,0),(0,1))$ est aussi génératrice (on voit que $(1,1)$ est superflu dans la première famille).
- *Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ et $j \in [\![1\,;p]\!]$, notons $E_{i,j}$ la matrice élémentaire (de taille $n \times p$) d'indice (i,j). Alors $(E_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$ est génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. En effet :*

Remarque : Le fait qu'une famille soit ou non génératrice peut dépendre du corps sur lequel on se place (et alors on écrit $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ pour préciser qu'on se place sur le corps $\mathbb{K}$). En effet, selon que l'on prenne $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les scalaires utilisés pour écrire des combinaisons linéaires sont des réels ou des complexes et cela peut tout changer.

Par exemple (1) est une famille génératrice de $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (car tout complexe z s'écrit sous la forme $z = 1 \cdot z$). En revanche, si on voit $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(1) = \mathbb{R}$ donc (1) n'est pas génératrice de $\mathbb{C}$. Remarquons que, pour tout $z \in \mathbb{R}$,

$$z = \underbrace{\mathrm{Re}(z)}_{\in \mathbb{R}} \cdot 1 + \underbrace{\mathrm{Im}(z)}_{\in \mathbb{R}} \cdot i$$

$(1, \mathrm{i})$ *engendre $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire $\mathbb{C} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(1,i)$).*

b) Opérations sur les vecteurs d'une famille génératrice

Reprenons maintenant les propriétés des Vect vues dans le paragraphe précédent pour obtenir des propriétés des familles génératrices :

Proposition (ajouter un vecteur dans une famille génératrice). *Si on ajoute un vecteur à une famille génératrice, alors celle-ci reste génératrice.*

On confond ici la famille $\mathscr{G}$ et la partie contenant les vecteurs de la famille. On a vu que cela revenait au même.

Démonstration.

□

On a vu aussi dans le paragraphe précédent qu'un Vect étant invariant si on retire à une famille génératrice un vecteur qui est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille ou encore si effectue des opérations élémentaires sur les vecteurs de la famille. Par conséquent :

On dit qu'un tel vecteur est superflu.

Proposition (retirer un vecteur dans une famille génératrice). *Si on retire à une famille génératrice un vecteur qui est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille, alors celle-ci reste génératrice.*

Rappelons que les opérations élémentaires consistent :
- à échanger l'ordre de deux vecteurs
- à multiplier un vecteur par un scalaire non nul
- remplacer un vecteur x par une combinaison linéaire des vecteurs de la famille avec un coefficient non nul devant x.

Proposition (opérations élémentaires dans une famille génératrice). *Si on effectue des opérations élémentaires sur les vecteurs d'une famille génératrice, alors celle-ci reste génératrice.*

Ainsi, quand on dispose d'une famille génératrice, il est naturel de vouloir la nettoyer de tous ses vecteurs superflus (en faisant des opérations élémentaires pour faire apparaitre des combinaisons linéaires permettant de retirer des vecteurs) pour qu'elle contienne le moins de vecteurs possibles. Mais comment savoir quand s'arrêter ? C'est l'objet du prochain paragraphe.

2) Familles libres, familles liées

a) Cas d'un nombre fini de vecteurs

Définition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. On appelle combinaison linéaire triviale de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ la combinaison linéaire dont tous les coefficients sont nuls, c'est-à-dire $0 \cdot x_1 + \cdots + 0 \cdot x_n$.*

Remarque : La combinaison linéaire triviale est évidemment nulle (c'est-à-dire égale au vecteur nul), mais la réciproque est fausse en général.

Par exemple, si on note $x_1 = (1, 0)$, $x_2 = (0, 1)$ et $x_3 = (1, 1)$, alors $x_1 + x_2 - x_3 = 0$: on a une combinaison linéaire nulle qui n'est pas la combinaison linéaire triviale.

On dit également que les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont libres ou linéairement indépendants ou encore qu'ils forment une famille libre.

Définition (famille libre). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si la seule combinaison linéaire qui les annule est la combinaison linéaire triviale, c'est-à-dire*

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

On dit également que les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont liés ou linéairement dépendants ou encore qu'ils forment une famille liée.

Définition (famille liée). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée si elle n'est pas libre, c'est-à-dire s'il existe $\lambda_1 \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ **non tous nuls** tels que $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$.*

⚠ Dans la définition d'une famille liée, on a bien dit « non tous nuls », ce qui n'est pas la même chose que « tous non nuls ».

Exemples :

- $(1,1),(0,1)$ *et* $(1,0)$ *forment une famille liée car*
- *La famille* $\big((1,0,1),(1,1,3),(2,-1,0)\big)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *est-elle libre ?*

Précisons que $(0,0,0)$ était solution du système ci-dessus. Il n'est pas étonnant de trouver que $(0,0,0)$ conviennent pour une famille liée ! En effet, les scalaires $(0,0,0)$ sont toujours solutions : la famille est libre si c'est la seule !

- *La famille* $\big((1,0,1),(1,1,3),(3,-1,0)\big)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *est-elle libre ?*
- *Soient* $n \in \mathbb{N}$. *Montrons que* $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ *est libre.*

On aurait aussi pu prendre $\alpha = 0$ mais cela ne permet pas de conclure. En effet la combinaison linéaire triviale est toujours nulle et la famille est libre lorsque c'est la seule qui est nulle.

- *Qu'en est-il de la famille* $(X^2+X+1, X+2, -3, X^2-4)$ *de* $\mathbb{R}[X]$ *?*
- *Sur* $\mathbb{C}$ *vu comme un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel,* $(1, \mathrm{i})$ *est libre.*
- *La famille* $(\sin, \cos, \sin^2, \cos^2)$ *de* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *est-elle libre ?*
- *Montrons que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la famille* $(x \mapsto 1, x \mapsto e^x, x \mapsto e^{2x}, \dots, x \mapsto e^{nx})$ *de* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *est libre.*

Ci-contre, on a à faire à des sous-espaces vectoriels de fonctions. La méthode est très classique : montrer que des familles de n fonctions (avec n petit) sont libres, revient à montrer que n scalaires sont nuls donc on essaie de trouver un système de n équations et de le résoudre. On peut essayer d'évaluer la combinaison linéaire nulle en n réels bien choisis pour obtenir ces n équations. On peut aussi faire apparaître un polynôme ou encore utiliser des arguments de limites. Même technique pour les familles de suites.

- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne $a_1, \dots, a_n$ des réels tels que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, on pose $f_i : x \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda_i x}$. Montrons que $(f_1, \dots, f_n)$ est libre. Il s'agit d'une généralisation de l'exemple précédent mais la technique utilisée ne fonctionne plus.*

- *La famille $((1)_{n\in\mathbb{N}}, (2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (3^n)_{n\in\mathbb{N}})$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est-elle libre ?*

Remarquons que, dans les exemples de familles libres ci-contre, on a seulement raisonné par implications la plupart du temps et non par équivalences. Et c'est suffisant pour montrer qu'une famille est libre puisque la réciproque est évidente (la combinaison linéaire triviale est nulle)...

- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, notons e_i le vecteur de $\mathbb{K}^n$ dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la $i^{\text{ème}}$ qui vaut 1. Alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de $\mathbb{K}^n$. En effet, donnons-nous $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$. Alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$ si bien que tous les λ_i sont tous nuls.*
- *Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille $(1, X, \dots, X^n)$ est libre. En effet, donnons-nous $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\lambda_n X^n + \cdots + \lambda_1 X + \lambda_0 = 0$. Par unicité des coefficients d'un polynôme, $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$. Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ et $j \in [\![1\,;p]\!]$, notons $E_{i,j}$ la matrice élémentaire (de taille $n \times p$) d'indice (i,j). Alors $(E_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ est libre. En effet, donnons-nous $(\lambda_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ une famille de scalaires telle que*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \lambda_{i,j} E_{i,j} = 0_{n,p}$$

... En revanche, les équivalences sont indispensables pour trouver une combinaison linéaire nulle non triviale et prouver qu'une famille est liée (à moins de deviner une telle combinaison linéaire et de vérifier qu'elle l'est).

Pour tous i et j, le coefficient d'indice (i,j) du membre de gauche vaut $\lambda_{i,j}$ (car les autres matrices élémentaires ont un coefficient nul à cet endroit) et celui du membre de droite vaut 0 si bien que $\lambda_{i,j}=0$.

La définition d'une famille liée (en tant que famille non libre) est la définition officielle mais la caractérisation suivante est plus parlante :

Proposition. *La famille $(x_1,\dots,x_n)$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres, c'est-à-dire*

$$\exists i\in [\![1\,;n]\!],\qquad x_i\in \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n).$$

Démonstration.

□

Une famille libre est donc libre si et seulement si aucun vecteur n'est combinaison linéaire des autres. On en déduit les cas particuliers suivants :

Proposition.

- *Soit $x\in E$. La famille à un élément (x) est libre si et seulement si x est non nul.*
- *Soit $(x_1,x_2)\in E^2$. La famille (x_1,x_2) est libre si et seulement si x_1 et x_2 ne sont pas colinéaires.*

Erreur très très classique ! !

Ce n'est plus vrai si on a au moins trois vecteurs ! Une famille dont tous les vecteurs sont deux à deux non colinéaires n'est pas forcément libre.

Par exemple, la famille $\big((1,0,1),(1,1,3),(2,-1,0)\big)$ est liée (cf. exemples ci-dessus), alors que ses vecteurs sont deux à deux non colinéaires.

À partir de trois vecteurs, il n'y a rien d'autre que la définition pour montrer qu'une famille est libre.

b) Cas général

Définition. *On dit qu'une famille quelconque de vecteurs de E est libre si toute sous-famille finie est libre. Elle est dite liée dans le cas contraire.*

Remarques :

- Par conséquent, quand on veut commencer par prouver qu'une famille infinie est libre, on commence par se donner une sous-famille finie quelconque. On commence donc par écrire : soit $(x_1,\dots,x_n)$ une sous-famille finie. Montrons qu'elle est libre.

En effet, il y a un ordre naturel sur les réels.

- Lorsque la famille est indexée par une partir de un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (typiquement $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}_+$, voire $\mathbb{R}$), on commencera par écrire : soient $i_1, \dots, i_n$ tels que $i_1 < \cdots < i_n$, montrons que $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ forment une famille libre. Cela permet de s'assurer que les indices sont distincts.

Exemple : *La famille $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre. En effet :*

Par négation de la définition d'une famille libre, une famille quelconque est liée lorsqu'elle contient une sous-famille finie liée. Si une famille contient une sous-famille (pas forcément finie) est liée, c'est que la sous-famille contient une sous-famille finie liée et donc c'est donc aussi le cas de la famille originelle, qui est par conséquent liée. Dans tous les cas (que la sous-famille soit finie ou non), on a donc le résultat suivant :

On dira parfois qu'une « sur-famille » d'une famille liée est elle-même liée.

Proposition. *Si une famille contient une sous-famille liée, alors cette famille est elle-même liée .*

Par contraposée :

Corollaire. *Une sous-famille d'une famille libre est libre.*

⚠ Attention, une famille dont toutes les sous-familles strictes sont libres peut être liée ! Par exemple, on peut avoir (x_1, x_2, x_3) liée mais (x_1, x_2) libre, ainsi que (x_1, x_3) et (x_2, x_3), voir le dernier exemple du paragraphe précédent.

La caractérisation des familles liées finies se généralise aussi :

Proposition. *Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs s'écrit comme combinaison linéaire des autres.*

Démonstration.

- Si $(x_i)_{i\in I}$ est liée, alors elle admet une sous-famille finie liée et, dans cette sous famille un vecteur est donc combinaison linéaire des autres et donc des autres vecteurs de la famille originelle.
- Réciproquement, supposons que l'un des vecteurs soit combinaison linéaire des autres, disons x_{i_0}. Alors x_{i_0} est combinaison linéaire d'un nombre fini d'autres vecteurs de la famille. Les vecteurs en questions et x_{i_0} forment alors une famille liée finie et donc $(x_i)_{i\in I}$ est liée. $\square$

En particulier :

⚠ Comme on vient de le voir, réciproque fausse !

Corollaire.

- *Si une famille contient le vecteur nul, elle est automatiquement liée.*
- *Une famille de vecteurs contenant deux vecteurs colinéaires est automatiquement liée.*

Comme pour les familles génératrices, on peut encore généraliser la notion de famille libre/liée à une partie quelconque de vecteurs de E :

Définition. *On dit qu'une partie A non vide de E est libre (respectivement liée) si la famille constituée des vecteurs de A est libre (respectivement liée).*

Définition. *Par convention, $\varnothing$ est libre.*

c) Opérations sur les vecteurs d'une famille libre

Proposition (ajouter ou retirer un vecteur dans une famille libre).

- *Si on retire un vecteur à une famille libre, celle-ci reste libre.*
- *Si on ajoute un vecteur à une famille libre qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de la famille, alors elle reste libre. Autrement dit, si $\mathscr{L}$ est libre et $y \notin \mathrm{Vect}(\mathscr{L})$, alors ajouter y à $\mathscr{L}$ la laisse libre.*

On peut la noter $\mathscr{L} \cup (y)$ par abus de notation.

Démonstration.

- On a déjà vu plus haut qu'une sous-famille d'une famille libre est libre.
- Soit $\mathscr{L}$ une famille libre et $y \notin \mathrm{Vect}(\mathscr{L})$.

On a déjà vu qu'une sur-famille d'une famille liée est liée donc ajouter un vecteur à une famille liée la laisse liée. En tout généralité, il est bien plus compliqué de dire ce qui se passe lorsqu'on retire un vecteur à une famille liée. Ce n'est de toute façon pas très intéressant puisque l'objectif est surtout d'obtenir des familles libres et que, en présence d'une famille liée, on essaye de lui enlever des vecteurs (qui sont combinaison linéaire des autres) jusqu'à ce qu'elle devienne libre.

d) Le cas des familles de polynômes échelonnées en degré

Définition. *On dit qu'une famille de polynômes non nuls est échelonnée en degré si elle est constituée de polynômes de degrés deux à deux distincts.*

Remarque : Autrement dit

- Une famille $(P_0, \dots, P_n)$ de $\mathbb{K}[X]$ est échelonnée en degré si (quitte à renuméroter) $P_0 \neq 0$ et si, pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, $\deg(P_k) < \deg(P_{k+1})$.
- Une famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$ est échelonnée en degré si (quitte à renuméroter) $P_0 \neq 0$ et si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\deg(P_k) < \deg(P_{k+1})$.

Proposition. *Une famille de polynômes échelonnée en degré est libre.*

Démonstration.

La réciproque est fausse : une famille de polynômes peut être libre même si deux polynômes de la famille sont de même degré. Par exemple la famille $(X+1, X)$ est libre (puisque $X+1$ et X ne sont pas colinéaires) mais pas échelonnée en degré.

Alors qu'elle n'est pas échelonnée en degré puisque $\deg(P_k) = n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

□

Exemple : *La famille* $(2, X+1, 5X^2-2, X^4+3X^2+1)$ *est libre car échelonnée en degré.*

La réciproque est fausse : une famille libre n'est pas forcément échelonnée en degré !

Par exemple : fixons $n \in \mathbb{N}$ puis a et b deux éléments de $\mathbb{K}$ tels que $a \neq b$. Pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, notons $P_k = (X-a)^k(X-b)^{n-k}$. Montrons que $(P_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est est une famille libre.

e) Unicité des coefficients dans une famille libre

Proposition (Unicité des coordonnées sur une famille libre). *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille libre. On suppose qu'il existe deux familles presque nulles $(\alpha_i)_{i\in I}$ et $(\beta_i)_{i\in I}$ telles que*

$$\sum_{i\in I} \alpha_i x_i = \sum_{i\in I} \beta_i x_i$$

Alors, pour tout $i \in I$, $\alpha_i = \beta_i$.

Démonstration. On a alors $\sum_{i\in I}(\alpha_i - \beta_i)x_i = 0$ et la famille est libre donc, pour tout $i \in I$, $\alpha_i - \beta_i = 0$ donc $\alpha_i = \beta_i$. □

Ainsi la liberté d'une famille garantit l'unicité des scalaire dans toute combinaison linéaire, quand le caractère générateur assure l'existence de combinaisons linéaires. On retrouve le fameux duo existence/unicité. Dans le prochain paragraphe, on les regroupe tout naturellement.

3) Bases

a) Définition et premiers exemples

Définition. *Une base de E est une famille de vecteurs de E qui est à la fois libre et génératrice.*

L'appellation « base canonique » signifie que c'est la base qu'on utilise par défaut : sauf mention du contraire, on munira toujours les espaces-vectoriels ci-contre de leurs bases canoniques.

Théorème.

- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, notons e_i le vecteur de $\mathbb{K}^n$ dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la $i^{\text{ème}}$ qui vaut 1. Alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée base canonique.*
- *Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ et $j \in [\![1\,;p]\!]$, notons $E_{i,j}$ la matrice élémentaire (de taille $n \times p$) d'indice (i,j). Alors $(E_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée base canonique.*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée base canonique.*
- *$(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, appelée base canonique.*

Démonstration. Montré dans les exemples des paragraphes III.1.a (pour le caractère générateur) et III.2.a et III.2.b (pour la liberté). □

Exemples :

- *Sur $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, (1) est une base. Si on considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, une base est $(1, \mathrm{i})$.*
- *Par convention, $\varnothing$ est libre et $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \{0_E\}$ donc $(\varnothing)$ est une base de $\{0_E\}$.*

⚠ À part pour $\{0_E\}$ (dont seule $\varnothing$ est une base), il n'y a jamais unicité d'une base et même il y en a une infinité (il suffit de multiplier un vecteur par un scalaire non nul par exemple).

b) Existence et unicité de la décomposition selon une base

Disons le tout de suite : ce théorème est la raison d'être de ce chapitre !

Théorème (Existence et unicité de la décomposition selon une base). *Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. Alors $\mathscr{B}$ est une base si et seulement si, pour tout $x \in E$, il existe une unique famille de scalaires presque nulle $(\alpha_i)_{i \in I}$ telle que $x = \displaystyle\sum_{i \in I} \alpha_i e_i$.*

Le cas échéant, pour tout $i \in I$, on dit que α_i est la coordonnée d'indice i de x dans la base $\mathscr{B}$.

Il y a donc unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base donnée.
⚠ Ne pas confondre avec il y a unicité d'une base. On vient de dire qu'un espace vectoriel non nul admet une infinité de bases.

Démonstration.

⚠ Si on change de base, les coordonnées d'un vecteur changent.

Par exemple :

Exemple : *Montrons que la famille* $(1,1,1),(1,2,3),(2,1,1)$ *est une base et donnons les coordonnées de* $(1,-1,1)$ *dans cette base.*

Dans certains exercices, les coordonnées de x sont notées $(x_i)_{i\in I}$ (par exemple on note parfois (x_1,x_2,x_3) un vecteur de $\mathbb{K}^3$) et, dans d'autres, $(x_i)_{i\in I}$ désigne une famille de vecteurs. Il faut donc être vigilant, car selon les cas certaines notations peuvent désigner des vecteurs ou des scalaires.

Avec la méthode du pivot de Gauss, on trouve que la matrice A *est inversible, d'inverse*

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 5 & -3\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

c) Bases de polynômes échelonnée en degré

On a vu qu'une famille de polynômes échelonnée en degré est libre. Nous admettons temporairement le résultat suivant concernant les bases de polynômes échelonnées en degré (nous la montrerons dans le chapitre 33).

Théorème. *Soit* $n\in\mathbb{N}$. *Si* $\mathscr{B}$ *est une famille de* $n+1$ *polynômes échelonnée en degré (c'est-à-dire, pour tout* $k\in[\![0\,;n]\!]$, $\mathscr{B}$ *contient un et un seul polynôme de degré* k*), alors* $\mathscr{B}$ *est une base de* $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemple : *La famille* $(2, X-4, X^2-3X+1, X^3-5, X^4+X)$ *est une base de* $\mathbb{K}_4[X]$.

Théorème. *Soit* $n\in\mathbb{N}$. *Si* $\mathscr{B}$ *est une famille de polynômes qui contient un et un seul polynôme de degré* k *pour tout* $k\in\mathbb{N}$, *alors c'est une base de* $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration.

IV Somme de sous-espaces vectoriels

Dans ce paragraphe, on se donne F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriel de E.

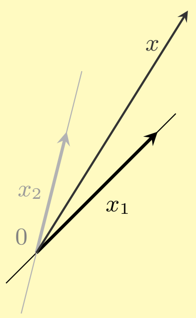
1) Somme de deux sous-espaces vectoriels

Autrement dit $F_1 + F_2$ est l'ensemble des vecteurs de E qui s'écrivent comme la somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2.

Définition. *On appelle somme de F_1 et F_2 et on note $F_1 + F_2$ l'ensemble*

$$F_1 + F_2 = \left\{x_1 + x_2 \,\middle|\, (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2\right\}.$$

Remarque : Avec des quantificateurs, pour tout $x \in E$,



Puisque dans cet exemple, il y a unicité, on dira dans le chapitre 29 que x_1 est le projeté de x sur F_1 parallèlement à F_2, et que x_2 est le projeté de x sur F_2 parallèlement à F_1.

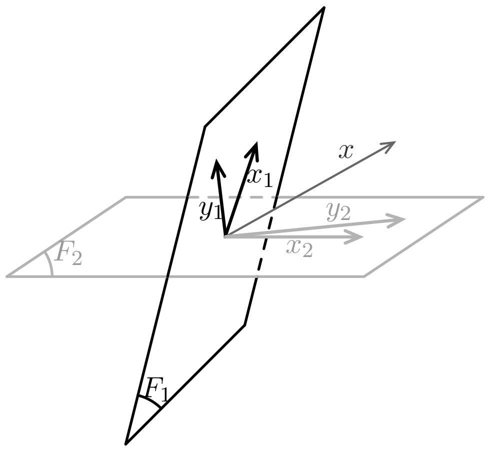
Exemples :

- *Dans $\mathbb{R}^2$, si F_1 et F_2 sont deux droites vectorielles (rappelons qu'une droite est un sous-espace vectoriel engendré par un vecteur non nul) distinctes, alors $\mathbb{R}^2 = F_1 + F_2$. En effet donnons-nous (a_1, b_1) et (a_2, b_2) deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$ tels que $F_1 = \mathrm{Vect}((a_1, b_1))$ et $F_2 = \mathrm{Vect}((a_2, b_2))$. Alors $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a*

$$(x, y) = \underbrace{\frac{xb_2 - ya_2}{a_1b_2 - a_2b_1}(a_1, b_1)}_{=x_1 \in F_1} + \underbrace{\frac{ya_1 - xb_1}{a_1b_2 - a_2b_1}(a_2, b_2)}_{=x_2 \in F_2}.$$

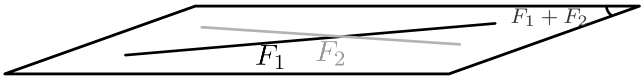
  Ici. on peut même montrer que $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$ sont uniques (cf. critères d'unicité du paragraphe suivant).

- *Dans $\mathbb{R}^3$, si F_1 et F_2 sont deux plans vectoriels (rappelons qu'un plan vectoriel est un sous-espace vectoriel engendré par deux vecteurs non colinéaires) distincts, on a encore $\mathbb{R}^3 = F_1 + F_2$ (cf. chapitre 33 pour une preuve) mais il n'y a pas unicité de x_1 et de x_2.*
  Sur le dessin ci-dessous le vecteur x s'écrit à la fois $x = x_1 + x_2$ et $x = y_1 + y_2$ avec x_1, y_1 distincts dans F_1 et x_2, y_2 distincts dans F_2.



⚠ On n'a pas forcément $E = F_1 + F_2$.

Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, si F_1 et F_2 sont deux droites vectorielles distinctes, alors $F_1 + F_2$ est un plan vectoriel (i.e. contenant 0) mais pas $\mathbb{R}^3$ tout entier :



Toutes ces considérations d'existence et d'unicité sont au cœur de ce chapitre.

Proposition. *La somme $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient F_1 et F_2.*

DÉMONSTRATION.

□

Exemple : *On vérifie aisément que les ensembles $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = 0\}$, $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = y = 0\}$ et $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = z = 0\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Montrons que $F_1 + F_2 = G$.*

Rappelons que, en général, l'union de deux sous-espaces vectoriel n'est pas un sous-espace vectoriel (cf. paragraphe II.5). En revanche on a :

Proposition. *Soient A et B des parties de E. On a $\mathrm{Vect}(A \cup B) = \mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B)$.*

DÉMONSTRATION.

□

Ainsi F_1+F_2 est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) qui contient $F_1 \cup F_2$. Cela se voit particulièrement bien sur le dernier dessin ci-dessus, celui des deux droites vectorielles dans $\mathbb{R}^3$.

Corollaire. $F_1 + F_2 = \mathrm{Vect}(F_1 \cup F_2)$.

DÉMONSTRATION. Puisque F_1 et F_2 sont des espaces vectoriels, on a $F_1 = \mathrm{Vect}(F_1)$ et $F_2 = \mathrm{Vect}(F_2)$ donc l'égalité découle de la proposition précédente. □

Corollaire. *Supposons que F_1 et F_2 admettent des familles génératrices $\mathscr{G}_1$ et $\mathscr{G}_2$ respectivement. Alors la concaténation des familles $\mathscr{G}_1$ et $\mathscr{G}_2$ (c'est-à-dire la famille obtenue en mettant bout à bout les deux familles) est génératrice de $F_1 + F_2$.*

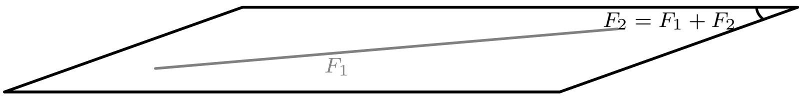
La concaténation de $\mathscr{G}_1$ et $\mathscr{G}_2$ est souvent notée $(\mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2)$ mais aussi $\mathscr{G}_1 \cup \mathscr{G}_2$ en l'assimilant à la partie contenant tous les vecteurs de $\mathscr{G}_1$ et tous les vecteurs de $\mathscr{G}_2$. On a vu que cela ne changeait rien pour l'espace engendré.

DÉMONSTRATION. Par hypothèse $F_1 = \mathrm{Vect}(\mathscr{G}_1)$ et $F_2 = \mathrm{Vect}(\mathscr{G}_2)$ donc, la proposition précédente

$$\mathrm{Vect}(\mathscr{G}_1 \cup \mathscr{G}_2) = \mathrm{Vect}(\mathscr{G}_1) + \mathrm{Vect}(\mathscr{G}_2) = F_1 + F_2.$$

Cela signifie que $\mathscr{G}_1 \cup \mathscr{G}_2$ (qui est la concaténation de $\mathscr{G}_1$ et $\mathscr{G}_2$) engendre $F_1 + F_2$. □

Proposition. *Si $F_1 \subset F_2$, alors $F_1 + F_2 = F_2$.*



La réciproque est vraie, puisque $F_1 \subset F_1 + F_2$.

DÉMONSTRATION. L'inclusion $F_2 \subset F_1 + F_2$ a été prouvée plus haut. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in F_1 + F_2$: il existe alors $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. Comme $F_1 \subset F_2$, on a $x_1 \in F_2$ et, F_2 étant un sous-espace vectoriel de E, il est stable par somme donc $x = x_1 + x_2 \in F_2$. D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité. □

2) Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Définition. *On dit que F_1 et F_2 sont en somme directe si tout élément de $F_1 + F_2$ se décompose de façon unique comme somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2. La somme est alors notée $F_1 \oplus F_2$.*

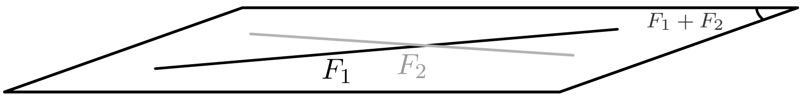
Remarques :

- Avec des quantificateurs, la somme est directe si et seulement si :

$$\forall x \in F_1 + F_2, \quad \exists!(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2, \quad x = x_1 + x_2$$

- D'un point de vue ensembliste, $F_1 \oplus F_2 = F_1 + F_2$, c'est-à-dire que $F_1 \oplus F_2$ est le même ensemble que $F_1 + F_2$: c'est l'ensemble des éléments de E qui peuvent s'écrire comme somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2. La seule différence est que, quand la somme est directe, une telle écriture est unique.

Proposition. *La somme de $F_1 + F_2$ est directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.*



Démonstration.

□

Exemples :

- *Reprenons l'exemple du paragraphe précédent avec les sous-espaces vectoriels $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = y = 0\}$ et $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$. Nous avons déterminé $F_1 + F_2$.*

  Ainsi $F_1 \cap F_2 = \{(0, 0, 0)\}$. Nous en déduisons que la somme est directe.
- *Soient x et y deux vecteurs non colinéaires de E. Alors $\mathrm{Vect}(x) \oplus \mathrm{Vect}(y) = \mathrm{Vect}(x, y)$. En effet :*

Ce dernier exemple se généralise avec la notion de concaténation de bases et de base adaptée :

Définition. *On suppose que F_1 et F_2 sont en somme directe. Soit $\mathscr{B}$ une base de $F_1 \oplus F_2$. On dit que cette base est adaptée à cette somme directe si cette base est la concaténation d'une base de F_1 et d'une base de F_2.*

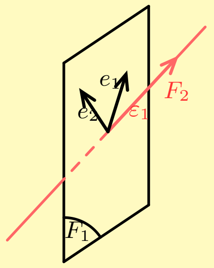
Théorème (de concaténation des bases). *Supposons que F_1 et F_2 admettent des bases respectives $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$. Les sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si la concaténation de $\mathscr{B}_1$ et de $\mathscr{B}_2$ est une base de $F_1 + F_2$.*

Mais le fait que la concaténation est génératrice de $F_1 + F_2$ est vrai même si la somme n'est pas directe.

Démonstration. Si $\mathscr{B}_1$ ou $\mathscr{B}_2$ sont vides, alors il n'y a rien à faire. Notons $\mathscr{B}$ la concaténation des bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$. On a déjà vu que $\mathscr{B}$ est génératrice $F_1 + F_2$.

- Supposons que F_1 et F_2 sont en somme directe. Montrons qu'elle est libre.

- Réciproquement supposons que $\mathscr{B}$ soit une base de $F_1 + F_2$. Montrons que la somme est directe.



Ici, dans $\mathbb{R}^3$, (e_1, e_2) est une base du plan F_1 et (ε_1) une base de la droite F_2. La concaténation $(e_1, e_2, \varepsilon_1)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ donc

$$\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2.$$

D'où l'équivalence. $\square$

3) Sous-espaces supplémentaires

Si on dit seulement que F_1 et F_2 sont supplémentaires, il est sous-entendu que c'est dans E.

Définition. *On dit que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E (ou que F_1 est un supplémentaire de F_2 dans E, ou le contraire) si $E = F_1 \oplus F_2$, c'est-à-dire si tout élément de E s'écrit de façon unique comme somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2.*

Il découle du paragraphe précédent que :

En fait il n'y a qu'à montrer que $E \subset F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2 \subset \{0_E\}$ puisque les inclusions contraires sont immédiates.

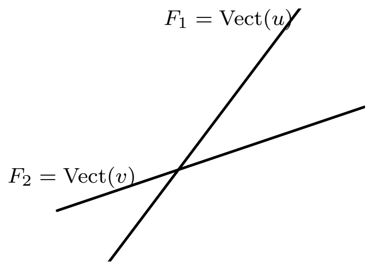
Proposition. *F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E si et seulement si $E = F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.*

Théorème (de concaténation des bases). *Supposons que F_1 et F_2 admettent des bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$. Alors F_1 et F_2 sont supplémentaires si et seulement si la concaténation de $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ est une base de E.*

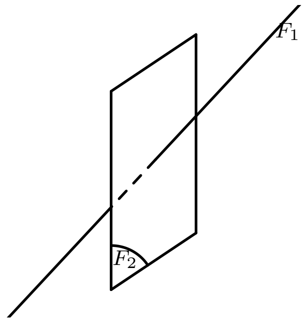
Exemples :

- *On a aussi vu en début du paragraphe IV.1 que, lorsque u et v sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$, alors $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}(u) + \mathrm{Vect}(v)$ et on a vu que la somme était directe dans le paragraphe précédent. Autrement dit deux droites vectorielles distinctes de $\mathbb{R}^2$ sont supplémentaires.*

On voit donc sur cet exemple que $\mathrm{Vect}(u)$ admet une infinité de supplémentaires (toute autre droite vectorielle).



- *Si $E = \mathbb{R}^3$, tout plan vectoriel est supplémentaire avec toute droite vectorielle non contenue dans le plan. Cela sera immédiat quand on aura vu la théorie de la dimension dans le chapitre 33.*



Ici il est facile de voir que l'intersection est réduite à 0 mais trouver la décomposition n'est pas aisé.

Montrons-le sur un exemple : la droite vectorielle $F_1 = \mathrm{Vect}((-1, 0, 1))$ et le plan vectoriel $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - y - z = 0\}$ sont supplémentaires.

Autre méthode possible : utiliser le théorème de concaténation des bases. Une base de F_1 est $((-1,0,1))$ et on trouve facilement qu'une base de F_2 est $((1,1,0),(1,0,1))$. On vérifiant que la concaténation de ces deux bases donne une base de $\mathbb{R}^3$, on conclut et on trouve la décomposition exacte.

- *Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A = \frac{M+M^T}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $B = \frac{M-M^T}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et $M = A + B$. Ainsi $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et donc il y a égalité. De plus seule la matrice nulle est à la fois symétrique et antisymétrique donc $S_n(\mathbb{K}) \cap A_n(\mathbb{K}) = \{0\}$. On en déduit que $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
- *Notons $\mathcal{I}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{P}(\mathbb{R},\mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions impaires (resp. paires) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On montre facilement que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On a vu dans le chapitre 2 que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme somme d'une fonction impaire et d'une fonction paire. Dès lors $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathcal{I}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \oplus \mathcal{P}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*
- *Soit B un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Le sous-espace vectoriel $F = \left\{P \in \mathbb{K}[X] \,\middle|\, B \text{ divise } P\right\}$ est un supplémentaire de $\mathbb{K}_n[X]$. En effet :*

Ne pas confondre le fait qu'il y a unicité de la décomposition $E = F \oplus G$ (c'est faux sauf si $F = \varnothing$ ou E) avec le fait qu'il y a unicité de la décomposition d'un vecteur x de E comme somme d'un élément de F et d'un élément de G (quand $E = F \oplus G$).

Remarques :

- ⚠ E et $\{0_E\}$ sont supplémentaires, et dans ce cas particulier, il y a unicité (c'est-à-dire E est l'unique supplémentaire de $\{0\}$ et réciproquement). Mais, en général, il n'y a pas unicité du supplémentaire (cf. exemple des droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$ plus haut).
- ⚠ Ne pas confondra pas **un** supplémentaire avec **le** complémentaire. En effet :
  - ⋆ Deux sous-espaces vectoriels supplémentaires ne sont jamais disjoints car ils contiennent 0.
  - ⋆ le complémentaire d'un sous-espace vectoriel de E n'est pas un sous-espace vectoriel de E car ne contient pas 0, alors qu'un supplémentaire est par définition un sous-espace vectoriel de E.
- ⚠ Ne pas confondre « deux espaces vectoriels sont en somme directe » et « deux espaces vectoriels sont supplémentaires ». En effet, deux espaces vectoriels supplémentaires sont en somme directe, mais la réciproque est fausse ! Il faut une condition supplémentaire : que leur somme (directe) soit égale à l'espace tout entier.

  Par exemple, deux droites distinctes dans $\mathbb{R}^3$ sont en somme directe mais ne sont pas supplémentaires car n'engendrent pas tout l'espace.