Chapitre 11

Équations différentielles linéaires

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Introduction

Une équation différentielle est une équation fonctionnelle (c'est-à-dire dont l'inconnue est une fonction de la variable réelle et à valeurs complexes) faisant également intervenir les dérivées successives de la fonction recherchée. On note souvent y l'inconnue. Le plus grand exposant de dérivation de y qui figure dans l'équation différentielle est appelé ordre de l'équation.

Ci-contre, on se contente d'une définition un peu vague de la notion d'équation différentielle. Elle est largement suffisante dans ce chapitre.

Par exemple :

- ⋆ (E_1) *:* $y' = 1 + y^2$ *est une équation différentielle d'ordre* 1 *dont l'inconnue* y *est une fonction dérivable (sur un domaine de* $\mathbb{R}$ *à préciser). Puisque* $\tan' = 1 + \tan^2$*, la fonction* $\tan$ *est solution... sur l'intervalle* $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ *pour tout* $k \in \mathbb{Z}$*. La fonction constante égale à* i *est solution sur* $\mathbb{R}$ *tout entier.*

  Elle est même de classe $\mathscr{C}^1$ puisque y est continue donc $y' = 1 + y^2$ aussi.

- ⋆ (E_2) *:* $y'' = -y$ *est une équation différentielle d'ordre* 2 *dont l'inconnue* y *est une fonction deux fois dérivable (sur un domaine de* $\mathbb{R}$ *à préciser). Puisque* $\cos'' = -\cos$ *et* $\sin'' = -\sin$*, les fonctions* $\cos$ *et* $\sin$ *sont solutions de* (E_2) *sur* $\mathbb{R}$ *tout entier. On peut remarquer que toute combinaison linéaire de* $\cos$ *et* $\sin$ *est aussi solution.*

  C'est-à-dire les fonctions du type $\lambda\cos + \mu\sin$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

- ⋆ (E_3) *:* $xy' + y = x^2$ *est une équation différentielle d'ordre* 1 *dont l'inconnue* y *est une fonction dérivable (sur un domaine de* $\mathbb{R}$ *à préciser)... il est sous entendu que* y *est la fonction inconnue et que* x *est la variable de* y *(c'est-à-dire le* x *de* $y : x \longmapsto y(x)$*).*

Stop ! Il y a une grosse erreur de type (et ambiguïté de notation) ici ! En toute rigueur, on devrait plutôt écrire au choix :

- $xy'(x) + y(x) = x^2$ pour tout x.
- $gy' + y = f$ avec $g : x \longmapsto x$ et $f : x \longmapsto x^2$.

Pourtant, lorsque l'on désigne une équation différentielle, c'est quasiment toujours sous une forme mélangeant y, y', y'', etc. et des termes dépendant de la variable x comme dans l'exemple d'équation (E_3). C'est l'usage, c'est ainsi ! Pour autant cet abus n'est autorisé que pour désigner l'équation différentielle. Dans un calcul (dans une démonstration typiquement), on écrit $y(x) = \cdots$ en ayant introduit x au préalable.

Reprenons les exemples :

- ⋆ *On observe que, si* $y_0 : x \longmapsto \dfrac{x^2}{3}$*, alors, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,*

$$xy_0'(x) + y_0(x) = x \times \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{3} = x^2.$$

  Ainsi y_0 *est solution de l'équation* (E_3) *sur* $\mathbb{R}$*.*

- ⋆ (E_4) *:* $y^{(11)} = \cos(x)$ *est une équation différentielle d'ordre* 11*. On remarque que* $(-\sin)^{(11)} = \cos$ *si bien que* $-\sin$ *est solution de* (E_4) *sur* $\mathbb{R}$*.*

  Remarquons que, si P est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 10, alors $-\sin + P$ est solution de (E_4).

- ⋆ (E_5) *:* $y'' - \mathrm{e}^{x+y} = x\cos(x)$ *est une équation différentielle d'ordre* 1*.*
- ⋆ (E_6) *:* $y^{(3)} + 3y'' - \ln(x)y' + y = \sqrt{x}$ *est une équation différentielle d'ordre* 3*.*

Résoudre une équation différentielle quelconque est un problème très difficile et on ne sait pas le faire explicitement en général (mais, sous certains conditions raisonnables, on sait prouver l'existence et l'unicité éventuelles d'une solution). Comme on le voit sur le premier exemple ci-dessus, le domaine de $\mathbb{R}$ sur lequel est étudiée l'équation différentielle a une influence sur l'ensemble des solutions. C'est donc un problème en soi.

Parmi les équations ci-contre, (E_2), (E_3), (E_4) et (E_6) sont dites linéaires puisqu'elles peuvent s'écrire comme combinaison linéaire de l'inconnue, de ses dérivées successives et d'autres fonctions. Ce n'est pas le cas des trois autres qui sont dites non linéaires.

Dans ce chapitre nous étudierons les équations différentielles linéaires du type :

- $y' + a(x)y = b(x)$, où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
  On parle d'équation différentielle linéaire du premier ordre.
- $y'' + ay' + by = f(x)$, où $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et f une fonction continue sur un intervalle et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
  On parle d'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

Les équations différentielles linéaires seront étudiées plus généralement en deuxième année.

II Équations différentielles linéaires du premier ordre

1) Définition

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ qui est l'union d'un nombre fini d'intervalles non vides et non réduits à un point.

On parlera parfois d'une équa-diff ou d'une ED pour une équation différentielle, et d'une EDL pour une équation différentielle linéaire.

Définition. *On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation (d'inconnue y dérivable) de la forme*

$$\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$$

où α, β et γ sont trois fonctions définies sur D et à valeurs dans $\mathbb{K}$. La fonction γ est appelée second membre.

L'équation est dite homogène lorsque γ est la fonction nulle. L'équation différentielle

$$\alpha(x)y' + \beta(x)y = 0$$

est appelée l'équation différentielle homogène associée à $\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$.

L'équation différentielle homogène (EHA pour les intimes) est aussi linéaire du premier ordre.

Remarques :

- Résoudre cette équation sur D consiste à déterminer toutes les fonctions y dérivables sur D telles que, pour tout $x \in D$, $\alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) = \gamma(x)$.
- On se restreindra dans ce chapitre au cas où les fonctions α, β et γ (et plus tard les fonctions a et b) sont continues.
- Lorsque α est la fonction constante égale à 1, on dit que l'EDL est normalisée (ou résolue en y'). La première chose à faire est de se ramener à ce cas de figure. Pour ce faire, il suffit de diviser par $\alpha(x)$ dans l'équation. Mais cela n'est possible que sur des intervalles où la fonction α ne s'annule pas (on parle de domaine d'intégration de l'EDL). Quitte à réduire le domaine d'étude de l'EDL, on se ramène donc à une équation différentielle de la forme

$$y' + a(x)y = b(x),$$

  avec a et b des fonctions continues (puisque, par hypothèse, α, β et γ le sont) sur un intervalle I (sur lequel α ne s'annule pas donc) non vide et non réduit à un point.
- Nous parlerons un peu des endroits où α s'annule dans le paragraphe II.7 et dans chapitre 22.

Cette hypothèse sert à affirmer qu'elles admettent des primitives et cela sera utile dans les calculs et démonstrations des paragraphes suivants.

avec $a = \dfrac{\beta}{\alpha}$ et $b = \dfrac{\gamma}{\alpha}$.

Exemple : *Les domaines d'intégration de l'EDL du premier ordre $xy' + (x^2+1)\,y = x$ sont $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, et sur chacun des domaines d'intégration, cette équa-diff est équivalente à :*

L'hypothèse que I est intervalle va être primordiale pour affirmer plus bas qu'une fonction dérivable de dérivée nulle est constante.

Dans la suite du paragraphe **II**, on se donne :

- un **intervalle** I non vide et non réduit à un point,
- deux fonctions a et b continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$,

et on considère l'équation différentielle (d'inconnue y) linéaire $y' + a(x)y = b(x)$. Ainsi l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$ est son EHA et la fonction b est son second membre.

2) Résolution de l'équation homogène associée

Puisque a est continue sur I, par hypothèse, elle admet des primitives sur I.

Théorème. *L'ensemble des solutions de (H) : $y' + a(x)y = 0$ sur I est :*

$$\left\{ x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-A(x)} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

où A est une primitive de a sur I.

Attention au signe ! Il ne faut pas oublier le $-$ dans l'exponentielle.

Démonstration.

$\square$

Corollaire. *Si a est une constante, alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire (H) : $y' + ay = 0$ est*

$$\left\{ x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-ax} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

Exemple : *Résolvons l'EDL du premier ordre (H) : $y' + \left(x + \dfrac{1}{x}\right) y = 0$.*

3) Ensemble des solutions

Revenons au cas avec second membre :

On verra dans le paragraphe suivant qu'il existe toujours une solution particulière et on verra même une méthode pour en trouver une à coup sûr (mais pas toujours totalement explicite cela dit).

Proposition. *Considérons l'équation différentielle linéaire du premier ordre $(E) : y' + a(x)y = b(x)$. Soit y_0 une solution particulière de (E).*

Soit y une fonction dérivable sur I. Alors y est solution de (E) si et seulement si $y - y_0$ est solution de $(H) : y' + a(x)y = 0$, son équation homogène associée. Autrement dit l'ensemble des solutions de (E) est

$$\left\{x \mapsto y_0(x) + \lambda \mathrm{e}^{-A(x)} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{K}\right\}.$$

où A désigne une primitive de a sur I.

En d'autres termes encore, si S_H désigne l'ensemble des solutions de (H), alors l'ensemble des solutions de (E) est

$$\{y + y_0 \,|\, y \in S_H\},$$

Nous dirons au chapitre 37 que l'ensemble des solutions est un espace affine.

Démonstration.

Nous ferons de nouveau ce type de raisonnement lorsque l'on cherchera le terme général d'une suite artihmético-géométrique dans le chapitre 14, en résolvant des systèmes linéaires dans le chapitre 20 ou encore en résolvant des équations diophantiennes dans le chapitre 12.

On retient :

Solutions de l'EDL = Solution particulière + Solutions de l'EHA

4) Méthode de variation de la constante

Conformément au paragraphe précédent, il ne reste plus qu'à savoir trouver une solution particulière de $(E) : y' + a(x)y = b(x)$ sur I pour la résoudre entièrement.

Dans un premier temps, on peut en chercher une évidente. C'est notamment le cas lorsque a et b sont des constantes non nulles où alors $y_0 : x \longmapsto -\frac{b}{a}$ est solution évident de l'équation différentielle $y' + ay = b$. Si aucune solution évidente ne vient, on peut toujours appliquer la méthode de variation de la constante :

On peut noter

$$F : x \mapsto \int^x b(t)\mathrm{e}^{A(t)}\,dt$$

et donc une solution particulière est

$$y_0 : x \mapsto \mathrm{e}^{-A(x)}\int^x b(t)\mathrm{e}^{A(t)}dt.$$

Exemples :

- *Revenons à l'équation différentielle*

$$(E) : y' + \left(x + \frac{1}{x}\right) y = 1.$$

dont on a vu que les solutions de l'équation homogène associée, sur $\mathbb{R}_+^*$ *comme sur* $\mathbb{R}_-^*$*, étaient les fonctions de la forme* $x \longmapsto \dfrac{\lambda}{x}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$*.*

Les solutions de l'EHA étant les mêmes sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, on ne différencie pas les cas pour trouver une solution particulière. Mais il faut parfois le faire : cf. exercice 66 du chapitre 22.

- *Résolvons l'équation différentielle* (E) *:* $y' - \tan(x)y = x$ *sur* $I = \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

5) Problème de Cauchy

Maintenant que l'on sait résoudre des EDL du premier ordre sur un intervalle, on peut se poser la question de l'existence et de l'unicité de solutions dont le graphe passe par un point donné du plan.

Ici, y_0 est un élément quelconque de $\mathbb{K}$ et non une solution particulière de (E) !

Définition. *Considérons l'équation différentielle linéaire du premier ordre* $(E) : y' + a(x)y = b(x)$. *Soit* $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. *On appelle problème de Cauchy le système (d'inconnue* y*) suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' + a(x)y & = & b(x) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

Théorème. *Considérons l'équation différentielle linéaire du premier ordre $(E) : y' + a(x)y = b(x)$. Soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' + a(x)y & = & b(x) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

admet une unique solution sur I, c'est-à-dire qu'il existe une unique fonction $y : I \longrightarrow \mathbb{K}$ solution de (E) qui vérifie $y(x_0) = y_0$.

Démonstration. Notons A l'unique primitive de a sur I qui s'annule en x_0. Utilisons la méthode de variation de la constante. On se donne λ une fonction dérivable sur I et on pose $y : x \longmapsto \lambda(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$. Alors φ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$,

$$y'(x) + a(x)y(x) = \lambda'(x)\mathrm{e}^{-A(x)} - \lambda(x)A'(x)\mathrm{e}^{-A(x)} + a(x)\lambda(x)\mathrm{e}^{-A(x)} = \lambda'(x)\mathrm{e}^{-A(x)}.$$

Par conséquent :

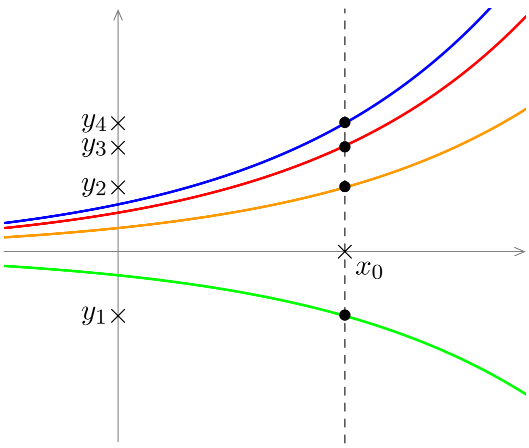
$$\begin{array}{lcl} y \text{ solution de } (E) & \iff & \forall x \in I,\ y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \\ & \iff & \forall x \in I,\ \lambda'(x) = b(x)\mathrm{e}^{A(x)} \\ & \iff & \lambda \text{ primitive de } x \mapsto b(x)\mathrm{e}^{A(x)} \text{ sur } I. \end{array}$$

De plus $y(x_0) = x_0$ si et seulement si $\lambda(x_0)\mathrm{e}^{-A(x_0)} = y_0$ si et seulement si $\lambda(x_0) = y_0$ (puisque $A(x_0) = 0$). Par conséquent y est solution du problème de Cauchy du théorème si et seulement si λ est une primitive de $x \mapsto b(x)\mathrm{e}^{A(x)}$ sur I qui vaut y_0 en x_0. Or on sait qu'une telle primitive existe et est unique. On en déduit l'existence et l'unicité au problème de Cauchy. $\square$

Remarques :

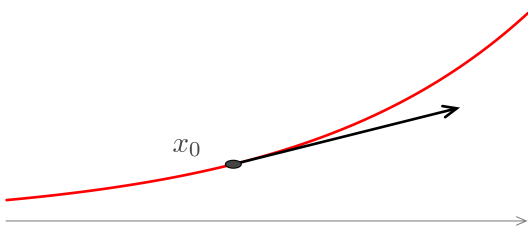
- **Interprétation géométrique.** Par un point du plan d'abscisse appartenant à I et d'ordonnée quelconque passe une et une seule solution. Les graphes des solutions recouvrent donc le plan et deux graphes de solutions distinctes ne se coupent jamais.

  Ci-dessous on a tracé quatre solutions d'une même EDL passant respectivement par des points (x_0, y_1), (x_0, y_2), (x_0, y_3) et (x_0, y_4) avec $y_1 < 0 < y_2 < y_3 < y_4$:



Plus précisément les graphes recouvrent le « rectangle » infini, formé de tous les points du plan d'abscisse appartenant à I. Les graphes des solutions forment donc une partition du plan de ce « rectangle ».

- Argument intuitif pour bien comprendre l'unicité : si y est solution et que l'on sait que $y(x_0) = y_0$, alors $y'(x_0) = b(x_0) - a(x_0) \times y_0$, donc on connaît la pente de y en x_0. On peut donc se dire que l'on « connaît y au voisinage de x_0 ».



On sait résoudre totalement les EDL du premier ordre mais les calculs peuvent prendre du temps. Ce résultat est surtout utile pour gagner du temps, dans des raisonnements du type : « on a deux solutions au problème de Cauchy donc elles sont égales »

Ensuite on recommence : « on connaît y et y' en un autre point pas trop loin de x_0 » etc. si bien qu'on la connaît partout.

- En étant un peu plus précis à la fin de la démonstration, on trouve que l'unique solution du problème de Cauchy est $y : x \longmapsto \lambda(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$, avec

$$\lambda : x \longmapsto y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{A(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi l'unique solution est

$$y : x \longmapsto y_0\mathrm{e}^{-A(x)} + \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{A(t)-A(x)}\,\mathrm{d}t,$$

Cette primitive pouvant se noter

$$A : x \longmapsto \int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s.$$

avec A l'unique primitive de a qui s'annule en x_0. Inutile cependant de retenir cette dernière formule. Si on demande de résoudre le problème de Cauchy du théorème, on procède ainsi :

  ⋆ On résout d'EDL de façon générique avec les méthodes précédentes, c'est-à-dire on trouve une solution particulière φ_0 (éventuellement via la méthode de variation de la constante) et on dit qu'une solution est de la forme $y : x \longmapsto \varphi_0(x) + \lambda\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et A n'importe quelle primitive de a sur I.

  ⋆ On veut que $y(x_0) = y_0$ donc $y_0 = \varphi(x_0) + \lambda\mathrm{e}^{-A(x_0)}$ et on trouve $\lambda = (y_0 - \varphi(x_0))\mathrm{e}^{A(x_0)}$ de façon unique. On trouve donc l'unique solution recherchée.

Exemple : *Résolvons sur* $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ *le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' - \tan(x)y &= x \\ y(0) &= -1 \end{cases}$$

Si y est une solution, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = 1 + x\tan(x) + \dfrac{\lambda}{\cos(x)}$, conformément à l'étude du paragraphe précédent.

6) Principe de superposition

Il découle de la linéarité de la dérivation que :

Proposition (principe de superposition). *Soient $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$. Soient b_1 et b_2 des fonctions continues sur I. Si :*

- *y_1 est une solution particulière de l'EDL $y' + a(x)y = b_1(x)$ sur I ,*
- *y_2 est une solution particulière de l'EDL $y' + a(x)y = b_2(x)$ sur I,*

alors $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ est une solution particulière sur I de l'EDL

$$(E) \;:\; y' + a(x)y = \alpha_1 b_1(x) + \alpha_2 b_2(x).$$

⇝ Démonstration laissée en exercice.

On généralise aisément ce résultat au cas où le second membre est combinaison linéaire d'un nombre quelconque (fini) de fonctions continues.

Remarque : Pour résoudre une EDL du type $(E) : y' + a(x)y = \alpha_1 b_1(x) + \alpha_2 b_2(x)$, on procède donc ainsi :

- On commence par résoudre l'EHA pour trouver que les solutions sont toutes les fonctions de la forme $x \longmapsto \lambda\mathrm{e}^{-A(x)}$, avec A une primitive de A sur I.

- On cherche une solution particulière y_1 de $(E) : y' + a(x)y = b_1(x)$ et une solution particulière y_2 de $(E) : y' + a(x)y = b_2(x)$ (en les devinant ou en utilisant la méthode de variation de la constante).
- On conclut que l'ensemble des solutions de (E) est

$$\{x \mapsto \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \lambda \mathrm{e}^{-A(x)} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Corollaire. *Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ mais que la fonction a soit à valeurs réelles. Notons $(E) : y' + a(x)y = b(x)$ puis*

$$(E_1) \ : \ y' + a(x)y = \mathrm{Re}(b(x)) \qquad \text{et} \qquad (E_2) \ : \ y' + a(x)y = \mathrm{Im}(b(x))$$

Une fonction $y_0 : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est une solution de (E) sur I si et seulement si $\mathrm{Re}(y_0)$ est une solution de (E_1) et $\mathrm{Im}(y_0)$ est une solution de (E_2)

Démonstration. Supposons que y_0 soit solution de (E). Alors y_0 est dérivable sur I donc $\mathrm{Re}(y_0)$ et $\mathrm{Im}(y_0)$ aussi, $\mathrm{Re}(y_0)' = \mathrm{Re}(y_0')$ et $\mathrm{Im}(y_0)' = \mathrm{Im}(y_0')$. Pour tout $x \in I$, on a $y_0'(x) + a(x)y_0(x) = b(x)$ si bien que

$$\mathrm{Re}(y_0)'(x) + a(x)\,\mathrm{Re}(y_0(x)) = \mathrm{Re}(y_0')(x) + \mathrm{Re}(a(x)y_0(x)) = \mathrm{Re}(y'(x) + a(x)y(x)),$$

car $a(x) \in \mathbb{R}$. Ainsi $\mathrm{Re}(y_0)'(x) + a(x)\,\mathrm{Re}(y_0(x)) = \mathrm{Re}(b(x))$. On en déduit que $\mathrm{Re}(y_0)$ est une solution de (E_1). On montre de même (en prenant cette fois la partie imaginaire) que $\mathrm{Im}(y_0)$ est une solution de (E_2). La réciproque découle du principe de superposition puisque $\mathrm{Re}(y_0) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(y_0) = y_0$. $\square$

En prenant $b_1 = \mathrm{Re}(b)$, $b_2 = \mathrm{Im}(b)$, $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = \mathrm{i}$

7) Retour sur le cas général

Revenons un instant sur le cas général des EDL décrit dans le paragraphe II.1. Il s'agit des équations différentielles du type :

$$\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x),$$

avec α, β et γ des fonctions définies sur D (et supposées continues pour se simplifier la vie dans ce chapitre). On a vu comment les résoudre sur chaque intervalle où α ne s'annule pas (tout simplement en divisant par $\alpha(x)$ pour les x tels que $\alpha(x) \neq 0$ et en se ramenant ainsi à une EDL dont on a étudié les solutions dans tout le paragraphe II).

Pour le moment, nous ne disposons pas d'outils simples pour étudier des « recollements » de fonctions.

On peut maintenant se demander si les solutions trouvées sur les différents intervalles peuvent ou non se « recoller » pour former des solutions sur D tout entier. Voyons quelques exemples dès maintenant, même si nous en étudierons surtout dans les exercices du chapitre 22 quand nous aurons proprement défini la continuité et la dérivabilité.

Exemple :

- *Reprenons à l'équation différentielle*

$$(E) : xy' + \left(x^2 + 1\right) y = 1.$$

Supposons qu'elle admette une solution y sur $\mathbb{R}$ tout entier. Alors y est solution,de $y' + \left(x + \dfrac{1}{x}\right) y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a vu plus haut qu'il existe alors $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y(x) = \dfrac{1 + \lambda \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x}$.

Pour gagner un peu temps de temps : on remarque que $x \longmapsto \dfrac{x^2}{3}$ est solution particulière sur $\mathbb{R}$.

- *Considérons l'équation différentielle (E) : $xy' + y = x^2$.*

III Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

1) Définition

Soit I une intervalle non vide et non réduit à un point.

Définition. *On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants toute équation (d'inconnue y deux fois dérivable) de la forme*

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

où $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et f est une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ appelée second membre.

L'équation est dite homogène lorsque f est la fonction nulle. L'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = 0$$

est appelée l'équation différentielle homogène associée à $y'' + ay' + by = f(x)$.

L'EHA est aussi linéaire du second ordre à coefficients constants.

Remarques :

- Résoudre cette équation sur I consiste à déterminer toutes les fonctions y deux fois dérivables sur I telles que, pour tout $x \in I$, $y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$.
- Une équation différentielle de la forme $\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = f(x)$, avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^2$ est aussi une EDL du second ordre. Il suffit de diviser par α pour se ramener au cas décrit dans la définition ci-dessus et étudiée dans les prochains paragraphes.

Dans toute la suite on suppose que a et b sont deux éléments de $\mathbb{K}$.

- Si $b = 0$, alors l'EDL (E) : $y'' + ay' + by = f(x)$ devient $(y')' + ay' = f(x)$. Ainsi y est solution de (E) si et seulement si y' est solution de $z' + az = P(x)$ (d'inconnue z). Cette dernière est une EDL du premier ordre. On peut donc la résoudre totalement (cf. paragraphe II) puis prendre toutes les primitives des solutions (sans oublier la constante additive).

2) Équation homogène associée

a) Équation caractéristique

• Si $a=b=0$, alors l'équation est juste $y''=f(x)$ et, alors, si F désigne une primitive de f sur I puis G une primitive de F sur I, l'ensemble des solutions est

$$\{x \mapsto \lambda x+\mu+G(x) \mid (\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2\}.$$

Les deux constantes λ et μ sont les deux constantes additives qui apparaissent quand on primitive deux fois f.

Cela motive l'introduction du concept suivant :

Définition. *L'équation $r^2+ar+b=0$, d'inconnue $r\in\mathbb{K}$, est appelée équation caractéristique de l'EDL homogène (H) : $y''+ay'+by=0$.*

Remarque : On peut aussi dire que $z\longmapsto z^2+az+b$ est le polynôme caractéristique de (H). On parle alors de ses racines plutôt que des solutions de l'équation caractéristique.

b) Cas où $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

Théorème. *Supposons que $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Considérons l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants (H) : $y''+ay'+by=0$ sur I. Notons (C) : $r^2+ar+b=0$ l'équation caractéristique de (H). Notons $\Delta=a^2-4b^2$ le discriminant de (C).*

- *Si $\Delta\neq 0$, alors (C) admet deux solutions simples r_1 et r_2 et l'ensemble des solutions de (H) sur I est :*

$$\left\{x\mapsto\lambda e^{r_1x}+\mu e^{r_2x}\mid(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2\right\}.$$

- *Si $\Delta=0$, alors (C) admet une solutions double r_0 et l'ensemble des solutions de (H) sur I est :*

$$\left\{x\mapsto(\lambda x+\mu)e^{r_0x}\mid(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2\right\}.$$

Dans le cas d'une EDL du second ordre, il y a deux constantes à choisir, l'ensemble des solutions est engendré par deux fonctions. On dira au chapitre 33 que l'ensemble des solutions de (H) est un espace vectoriel de dimension 2. Dans le cas d'une EDL du premier ordre, c'est un espace vectoriel de dimension 1.

Sur $\mathbb{C}$, il n'y a que deux cas pour le discriminant : $\Delta=0$ et $\Delta\neq 0$. Parler du signe de Δ n'a de sens que sur $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION.

□

Exemples :

- *Considérons l'équation différentielle* (H_1) : $y'' - 2y' - 3y = 0$.

- *Considérons l'équation différentielle* (H_2) : $y'' + 4y' + 4y = 0$.

- *Considérons l'équation différentielle* (H_3) : $y'' + y' + y = 0$.

- *Considérons l'équation différentielle* (H_4) : $y'' + (\mathrm{i} - 1)y' - \frac{\mathrm{i}}{2}y = 0$.

Les équations (H_1), (H_2) et (H_3) sont à coefficients réels donc on pourrait chercher des solutions à valeurs réelles. On constate que pour (H_1) et (H_2), prendre λ et μ réels dans l'ensemble des solutions, permet de trouver des solutions à valeurs réelles. Par contre pour (H_3), passer par les nombres complexes est indispensable. On verra au paragraphe suivant que l'on peut tout de même trouver toutes les solutions à valeurs réelles.

c) Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Théorème. *Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (et donc que a et b sont réels). Considérons l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants (H) : $y'' + ay' + by = 0$ sur I. Notons (C) : $r^2 + ar + b = 0$ l'équation caractéristique de (H). Notons $\Delta = a^2 - 4b^2$ le discriminant de (C).*

- *Si $\Delta > 0$, alors (C) admet deux solutions réelles r_1 et r_2 et l'ensemble des solutions de (H) sur I est :*
$$\left\{x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{r_1 x} + \mu \mathrm{e}^{r_2 x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
- *Si $\Delta = 0$, alors (C) admet une solution double r_0 et l'ensemble des solutions de (H) sur I est :*
$$\left\{x \mapsto (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^{r_0 x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
- *Si $\Delta < 0$, alors (C) admet deux solutions non réelles conjuguées $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$ et l'ensemble des solutions de (H) sur I est :*
$$\left\{x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\big(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)\,\big|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

On résout toujours (C) dans $\mathbb{C}$, même si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Lorsque $\Delta \geqslant 0$, on remarque qu'il s'agit du même ensemble de solutions que dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ à ceci près que λ et μ sont des réels.

Démonstration. Les cas où $\Delta \geqslant 0$ et $\Delta = 0$ se démontrent exactement comme dans le cas complexe du paragraphe précédent. Supposons que $\Delta < 0$. Alors (C) admet deux solutions simples (non réelles et conjuguées) $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$.

- Soit $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution de (H) sur I. Puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, le théorème du paragraphe précédent assure qu'il existe A et B des complexes tels que
$$\forall x \in I, \qquad y(x) = A\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x} + B\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)x}.$$
Pour tout $x \in I$, on a alors :
$$\begin{aligned} y(x) &= (\mathrm{Re}(A) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(A))\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos(\beta x) + \mathrm{i}\sin(\beta x)) \\ &\qquad + (\mathrm{Re}(B) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(B))\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos(-\beta x) + \mathrm{i}\sin(-\beta x)) \\ &= \mathrm{e}^{\alpha x}\big(\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x)\big), \end{aligned}$$
avec $\lambda = \mathrm{Re}(A) + \mathrm{Re}(B) + \mathrm{i}(\mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B))$ et $\mu = \mathrm{Re}(A) - \mathrm{Re}(B) + \mathrm{i}(\mathrm{Im}(A) - \mathrm{Im}(B))$.
  - ⋆ En évaluant y en 0, on trouve $y(0) = 1 \times (\lambda + 0)$ si bien que $\lambda = y(0) \in \mathbb{R}$ (en effet y est à valeurs réelles).
  - ⋆ En évaluant y en $\frac{\pi}{2\beta}$, on trouve
$$y\left(\frac{\pi}{2\beta}\right) = \mathrm{e}^{\frac{\alpha\pi}{2\beta}}(\lambda \times 0 + \mu \times 1) = \mathrm{e}^{\frac{\alpha\pi}{2\beta}}\mu.$$
Ainsi $\mu = \mathrm{e}^{-\frac{\alpha\pi}{2\beta}}y\left(\frac{\pi}{2\beta}\right) \in \mathbb{R}$.

  Ainsi y appartient à l'ensemble des solutions annoncé.

Au passage, on trouve $\mathrm{Im}(A) = -\mathrm{Im}(B)$ et $\mathrm{Re}(A) = \mathrm{Re}(B)$ si bien que $\lambda = 2\,\mathrm{Re}(A)$ et $\mu = -2\,\mathrm{Im}(A)$.

- Réciproquement, on sait d'après le paragraphe III.2.b que les fonctions $y_1 : x \longmapsto \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}$ et $y_2 : x \longmapsto \mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)x}$ sont solutions de (H). Le principe de superposition entraîne alors que
$$\frac{y_1 + y_2}{2} : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x}}{2}\mathrm{e}^{\alpha x} = \cos(\beta x)\mathrm{e}^{\alpha x}$$
et
$$\frac{y_1 - y_2}{2\mathrm{i}} : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x}}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\alpha x} = \sin(\beta x)\mathrm{e}^{\alpha x}$$
sont solutions de (H).

On a vu le principe de superposition seulement pour les EDL du premier ordre. On énoncera le principe pour le deuxième ordre dans le paragraphe III.5 mais c'est la même chose est cela découle immédiatement de la linéarité de la dérivation.

On peut aussi, en les dérivant deux fois, vérifier directement que les fonctions $\varphi : x \mapsto \cos(\beta x)e^{\alpha x}$ et $\psi : x \mapsto \sin(\beta x)e^{\alpha x}$ sont des solutions. C'est plus technique et cela constitue un bon exercice de calcul. Pour conclure, on utilise le fait que $\alpha + i\beta$ est solution de (C) donc

$$(\alpha+i\beta)^2+a(\alpha+i\beta)+b=0$$

et donc, en prenant parties réelle et imaginaires, $\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + b = 0$ et $(2\alpha + a)\beta = 0$.

Le principe de superposition assure encore que, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $x \longmapsto \lambda\cos(\beta x)e^{\alpha x} + \mu\sin(\beta x)e^{\alpha x}$ est solution de (H).

On en déduit l'ensemble des solutions annoncé. □

Exemples :

- *Nous avons déjà résolu l'équation différentielle (H_3) : $y'' + y' + y = 0$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dans le paragraphe précédent. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:*

- *Considérons l'équation différentielle (H_5) : $y'' - 4y' + 13y = 0$.*

3) Ensemble des solutions

Revenons au cas avec second membre :

Proposition. *Considérons l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (E) : $y'' + ay' + by = f(x)$. Soit y_0 une solution particulière de (E).*

Soit y une fonction deux fois dérivable sur I. Alors y est solution de (E) si et seulement si $y - y_0$ est solution de (H) : $y'' + ay' + by = 0$, son équation homogène associée.

En d'autres termes encore, si S_H désigne l'ensemble des solutions de (H), alors l'ensemble des solutions de (E) est

$$\{y + y_0 \,|\, y \in S_H\},$$

Nous dirons au chapitre 37 que l'ensemble des solutions est un espace affine.

On verra dans le paragraphe suivant qu'il existe toujours une solution particulière et on verra même des méthodes pour en trouver dans certains cas particuliers.

DÉMONSTRATION. Comme y_0 est solution de (E), on a $y_0''(x) + ay_0'(x) + by'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) \quad &\iff \quad \forall x \in I, y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)\\
&\iff \quad \forall x \in I,\ y''(x) + ay'(x) + by(x) = y_0''(x) + ay_0'(x) + by'(x)\\
&\iff \quad \forall x \in I,\ \left(y''(x) - y_0''(x)\right) + a(y'(x) - y_0'(x))\\
&\qquad\qquad + b(y(x) - y_0(x)) = 0\\
&\iff \quad \forall x \in I,\ (y - y_0)''(x) + a(y - y_0)' + b(y - y_0)(x) = 0\\
&\iff \quad y - y_0 \text{ solution de } (H),
\end{aligned}$$

par linéarité de la dérivation. D'où l'ensemble des solutions de (E). □

On retient, comme pour le premier ordre :

Solutions de l'EDL $=$ Solution particulière $+$ Solutions de l'EHA

Exemple : *On a $\exp'' - 4\exp' + 13\exp = 10\exp$ si bien que $\varphi_0 : x \longmapsto \frac{1}{2}e^x$ est solution de l'équation différentielle (E) : $y'' - 4y' + 13y = 5e^x$. On a déjà vu en exemple dans le paragraphe III.2.c que son EHA $y'' - 4y' + 13y = 0$ admettait pour ensemble de solutions*

$$\left\{ x \mapsto e^{2x} \left(\lambda \cos(3x) + \mu \sin(3x)\right) \,\middle|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Par conséquent l'ensemble de solutions de (E) est

$$\left\{ x \mapsto \frac{1}{2}e^x + e^{2x} \left(\lambda \cos(3x) + \mu \sin(3x)\right) \,\middle|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

4) Problème de Cauchy

Ici, y_0 est un élément quelconque de $\mathbb{K}$ et non une solution particulière de (E) !

Définition. *Considérons l'équation différentielle linéaire du second ordre* (E) : $y'' + ay' + by = f(x)$. *Soit* $(x_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{K}^2$. *On appelle problème de Cauchy le système (d'inconnue* y*) suivant :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'' + ay' + by & = & f(x) \\ y(x_0) & = & y_0 \\ y'(x_0) & = & y_1 \end{array}\right.$$

Il y a donc une deuxième condition (celle sur la pente) par rapport au cas des EDL du premier ordre.

Résoudre un problème de Cauchy pour les EDL du second ordre consiste à se demander si, par un point donné du plan et avec une pente donnée, passe une ou plusieurs solutions.

Le théorème suivant est admis conformément au programme :

Théorème. *Considérons l'équation différentielle linéaire du second ordre* (E) : $y'' + ay' + by = f(x)$. *Soit* $(x_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{K}^2$. *Le problème de Cauchy*

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'' + ay' + by & = & f(x) \\ y(x_0) & = & y_0 \\ y'(x_0) & = & y_1 \end{array}\right.$$

admet une unique solution sur I*, c'est-à-dire qu'il existe une unique fonction* $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *solution de* (E) *qui vérifie* $y(x_0) = y_0$ *et* $y'(x_0) = y_1$.

Remarques :

Si on n'a pas la contrainte sur la dérivée en x_0, alors il y a une infinité de solutions. En d'autres termes, par un point donné du plan, il passe une infinité de solutions mais une seule avant une pente donnée.

- **Interprétation géométrique.** Par un point du plan d'abscisse appartenant à I et d'ordonnée quelconque passe une et une seule solution ayant une pente donnée en ce point.
- Sous réserve d'avoir trouvé une solution particulière φ_0 de (E), on sait qu'il existe une solution de la forme

$$x \longmapsto \varphi_0(x) + \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \quad \text{ou} \quad x \longmapsto \varphi_0(x) + (\lambda x + \mu) e^{r_0 x}$$

$$\text{ou} \quad x \longmapsto \varphi_0(x) + (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)) e^{\alpha x}$$

Ici, si (C) désigne l'équation caractéristique et Δ son discriminant :
- r_1 et r_2 sont les solutions simples de (C) lorsque $\Delta \neq 0$,
- r_0 est la solution simple de (C) lorsque $\Delta = 0$,
- $\alpha \pm i\beta$ sont les solutions simples de (C) lorsque $\Delta < 0$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ quelconques, selon que Δ est nul ou non et selon son signe si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si maintenant on se donne $(x_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{K}^2$, et que l'on veut résoudre le problème de Cauchy avec $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$, il suffit d'évaluer la solution générique trouvée en x_0, ainsi que sa dérivée en x_0 pour obtenir un système de deux équations dont λ et μ sont les inconnues. Le résoudre permet de trouver λ et μ de façon unique et donc d'obtenir l'unique solution recherchée.

Par exemple, résolvons le problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'' - 4y' + 13y & = & 5e^x \\ y(0) & = & \frac{1}{2} \\ y'(0) & = & -1 \end{array}\right.$$

Si y *est solution, on a vu dans le paragraphe précédent qu'il existe* λ *et* μ *des réels tels que, pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = \frac{1}{2} e^x + e^{2x} (\lambda \cos(3x) + \mu \sin(3x)).$$

- Ce théorème permet aussi de montrer des résultats plus abstraits.

  Par exemple, montrons qu'une solution non nulle de (H) : $y'' + ay' + by = 0$ sur $\mathbb{R}$ n'admet pas de tangente nulle en un point d'annulation.

5) Principe de superposition

Il découle de la linéarité de la dérivation que :

Proposition (principe de superposition). *Soient $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$. Soient f_1 et f_2 des fonctions continues sur I. Si :*

- *y_1 est une solution particulière de l'EDL $y'' + ay' + by = f_1(x)$ sur I ,*
- *y_2 est une solution particulière de l'EDL $y'' + ay' + by = f_2(x)$ sur I,*

alors $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ est une solution particulière sur I de l'EDL

$$(E) \ : \ y'' + ay' + by = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x).$$

On généralise aisément ce résultat au cas où le second membre est combinaison linéaire d'un nombre quelconque (fini) de fonctions continues.

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Remarque : Pour résoudre une EDL du type (E) : $y'' + ay' + by = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$, on procède donc ainsi :

- On commence par résoudre l'EHA (H) : $y'' + ay' + by = 0$. Notons S_H l'ensemble des solutions.
- On cherche une solution particulière y_1 de (E) : $y'' + ay' + by = f_1(x)$ et une solution particulière y_2 de (E) : $y'' + ay' + by = f_2(x)$ (cf. méthodes du paragraphe III.6).
- On conclut que l'ensemble des solutions de (E) est

$$\{x \mapsto \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + y(x) \,|\, y \in S_H\}.$$

Corollaire. *Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ mais que les constantes a et b soient réelles.. Notons (E) : $y'' + ay' + by = f(x)$ puis*

$$(E_1) \ : \ y'' + ay' + by = \mathrm{Re}(f(x)) \qquad \textit{et} \qquad (E_2) \ : \ y'' + ay' + by = \mathrm{Im}(f(x))$$

Une fonction $y_0 : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est une solution de (E) sur I si et seulement si $\mathrm{Re}(y_0)$ est une solution de (E_1) et $\mathrm{Im}(y_0)$ est une solution de (E_2)

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

6) Recherche d'une solution particulière dans quelques cas

La résolution générale (c'est-à-dire avec un second membre quelconque) des EDL du second ordre à coefficients constants n'est pas au programme. Le programme se limite à quelques cas particuliers que nous allons voir dans ce paragraphe.

Elle est hors programme mais pourtant accessible (quoique assez technique à mettre en œuvre) : chercher une solution du type $x \mapsto \lambda(x)e^{rx}$, avec r une racine de l'équation caractéristique et λ une fonction deux fois dérivable fonctionne bien, cf. exercice 17 du TD n° 11.

a) Cas d'un second membre polynomial ou exponentiel

Le programme prévoit la résolution dans le cas des EDL du second ordre à coefficients constants dans les cas où le second membre est polynomial ou exponentiel (de la forme $x \longmapsto Ae^{mx}$ avec $(A, m) \in \mathbb{K}^2$ pour être précis). Le théorème suivant permet de ne retenir qu'un seul résultat pour ces deux cas de figure :

m est solution de (C) si et seulement si $m^2+am+b=0$. Elle est double si et seulement $m = -\frac{a}{2}$.

Théorème. *Soit $m \in \mathbb{K}$ et soit $P : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction polynomiale. Considérons $(E) : y'' + ay' + by = P(x)e^{mx}$ une EDL du second ordre à coefficients constants. Notons (C) l'équation caractéristique de son EHA. Alors (E) admet une solution particulière de la forme $x \longmapsto Q(x)e^{mx}$ où Q est une fonction polynomiale de I dans $\mathbb{K}$*

- *avec $\deg(Q) = \deg(P)$ si m n'est pas solution de (C).*
- *avec $\deg(Q) = \deg(P) + 1$ si m est solution simple de (C).*
- *avec $\deg(Q) = \deg(P) + 2$ si m est solution double de (C).*

Démonstration. Admis (mais la preuve fera l'objet d'un exercice dans le TD n° 18).□

Ce théorème dit qu'on peut se lancer dans la recherche d'une fonction de la forme citée : on se donne alors Q avec le degré adéquat mais des coefficients quelconques puis on remplace y par la solution prétendue dans l'équation différentielle et enfin on trouve les coefficients de Q par unicité (en raisonnant par équivalence). Le théorème garantit que cela va fonctionner.

Corollaire (cas polynomial). *Soit $P : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction polynomiale. L'EDL du second ordre $y'' + ay' + by = P(x)$ admet une solution particulière Q qui est polynomiale de I dans $\mathbb{K}$*

- *avec $\deg(Q) = \deg(P)$ si 0 n'est pas solution de (C), c'est-à-dire si $b \neq 0$.*
- *avec $\deg(Q) = \deg(P) + 1$ si 0 est solution simple de (C), c'est-à-dire si $b = 0$ et $a \neq 0$.*
- *avec $\deg(Q) = \deg(P) + 2$ si 0 est solution double de (C), c'est-à-dire si $a = b = 0$.*

Le cas où 0 est solution de (C) est rare en pratique car il correspond à $b = 0$. On a déjà remarqué (dans la marge du paragraphe III.1) qu'alors on peut se ramener à une EDL du premier ordre (si $a \neq 0$) ou à une double primitivation (si $a = 0$), ce qui est assez simple dans ce cas puisque P est polynomiale.

Corollaire (cas exponentiel). *Soit $m \in \mathbb{K}$. L'EDL du second ordre $y''+ay'+by = e^{mx}$ admet une solution particulière*

- *de la forme $x \mapsto Ae^{mx}$, avec $A \in \mathbb{K}$, si m n'est pas solution de (C).*
- *dela forme $x \mapsto (Ax + B)e^{mx}$, avec $(A, B) \in \mathbb{K}^2$, si m est solution simple de (C).*
- *de la forme $x \mapsto (Ax^2 + Bx + C)e^{mx}$, avec $(A, B, C) \in \mathbb{K}^3$, si m est solution double de (C).*

Exemples :

- *Résolvons l'EDL $(E) : y'' + y' - 6y = 4xe^x$.*

- *Résolvons l'EDL* (E) : $y'' + 4y' + 4y = \text{sh}(2x)$.

b) Cas d'un second membre trigonométrique

Examinons le cas où le second membre est de la forme $x \longmapsto P(x)\cos(\theta x)$ ou $x \longmapsto P(x)\sin(\theta x)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $P : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction polynomiale,

- si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on écrit simplement $\cos(\theta x)$ et $\sin(\theta x)$ en fonction de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}$ pour tout $x \in I$ (via les formules d'Euler). On applique alors les résultats du paragraphe précédent avec $m = \mathrm{i}\theta$ puis $m = -i\theta$ et le principe de superposition pour conclure.
- si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on résout $y'' + ay' + by = P(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}$ et on passe à la partie réelle et la partie imaginaire. On a vu en corollaire dans la paragraphe III.5 sur cela fournissait une solution de $y'' + ay' + by = P(x)\cos(\theta x)$ et $y'' + ay' + by = P(x)\sin(\theta x)$ respectivement.

Exemple : *Résolvons l'EDL (E) : $y'' + y = 2\sin(x)$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.*