Chapitre 15

Ensembles et applications

Pour survivre dans ce chapitre, il faut impérativement donner des noms adéquats aux objets manipulés (cf. remarque dans la marche du paragraphe IV.1.b du chapitre 1).

L'objectif de ce chapitre est d'étudier plus en profondeur la théorie (naïve) des ensembles, déjà vue en partie dans le chapitre 1, et les fonctions allant d'un ensemble dans un autre.

I Rappels et compléments sur les ensembles

1) Notion d'ensemble et d'éléments

Dans le chapitre 1, nous avons introduit la notion d'ensemble. Rappelons quelques définitions :

On continue avec cette approche intuitive des ensembles.

Définition.

- *Un ensemble E est une collection d'objets appelés éléments de E.*
- *On note $x \in E$ pour dire que l'élément x appartient à E. On note $x \notin E$ pour dire que l'élément x n'appartient pas à E.*
- *On dit que deux ensembles E et F sont égaux, et on note $E = F$, si ils ont les mêmes éléments.*
- *On appelle ensemble vide, et on note $\varnothing$, l'ensemble ne contenant aucun élément.*

On peut donc prouver que deux ensembles sont égaux en raisonnant par équivalences.

Remarque : Avec des quantificateurs : $E = F$ si et seulement si

$$\forall x, \quad x \in E \iff x \in F.$$

On a vu qu'un ensemble peut être défini :

- par extension : en listant explicitement tous ses éléments entre accolades et séparés par des virgules ou des points virgules. Par convention un élément ne figure qu'une seule fois dans la liste et l'ordre dans lequel ils sont listés ne compte pas. L'inconvénient de ce mode de définition est qu'il est nécessite de connaître tous les éléments de l'ensemble. Par ailleurs, il est difficilement maniable avec un grand nombre d'éléments.
- par compréhension : si P est une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E, alors on note $\{x \in E \mid P(x)\}$ l'ensemble des éléments x de E tels que $P(x)$ est vraie.
- par opérations : en prenant l'union ou l'intersection d'ensembles. Nous en reparlerons dans le paragraphe I.3.c.

On a vu aussi qu'il pouvait être défini comme l'image d'un autre ensemble par une application. On en reparlera dans le paragraphe II.

Nous renvoyons au chapitre 1 pour plus de détails et plusieurs exemples.

Certains ensembles usuels ont même leur propre notation :

Par exemple :

- ⋆ *Les ensembles de nombres :* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$.
- ⋆ *Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\mathscr{C}^k(I, \mathbb{C})$ désigne l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ de I dans $\mathbb{C}$. On a $\exp \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\sin \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Par contre la fonction $\mathrm{abs} : x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0 si bien que $\mathrm{abs} \notin \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On a cependant $\mathrm{abs} \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*
- ⋆ *On a vu que $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des suites réelles.*

Définition (singleton). *Un ensemble à un élément est appelé un singleton.*

Si on note x cet élément, cet ensemble est donc noté $\{x\}$. On lit « singleton x ».

Remarque : Dans le chapitre 1, on a aussi défini la notion de partie d'un ensemble E (tout ensemble dont tous les éléments sont aussi des éléments de E). On en reparlera dans le paragraphe I.3.

2) Produit cartésien et famille d'éléments

Soient E et F des ensembles non vides.

a) Produit cartésien

Le produit cartésien $E \times F$ se prononce « E croix F ».

Définition. *On appelle couple d'éléments de E et F la donnée d'un élément x de E puis d'un élément y de F, dans cet ordre. On le note (x, y).*

On appelle produit cartésien de E et F, et on note $E \times F$, l'ensemble des couples d'éléments de E et F.

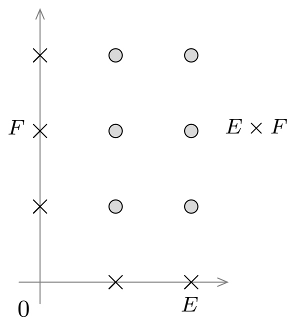
Si $E = F$, le produit est noté E^2 plus simplement.

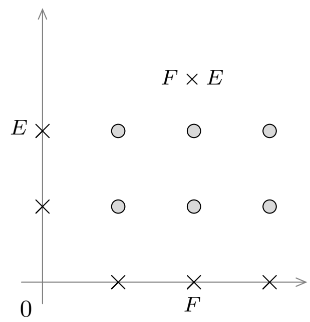
Remarques :

- Soit (a, b) et (x, y) deux couples de $E \times F$. On a $(a, b) = (x, y)$ si et seulement si $a = x$ et $b = y$.
- Si E et F sont des parties de $\mathbb{R}$, on peut voir le produit $E \times F$ comme l'ensemble de tous les points d'abscisse appartenant à E et d'ordonnée appartenant à F.

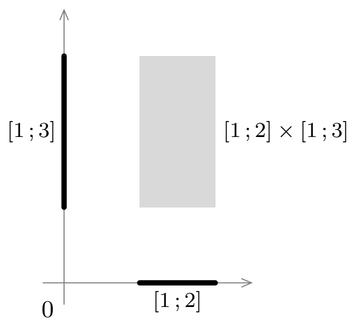
  Par exemple, ci-dessous on a représenté représenté $E \times F$ à gauche et $F \times E$ à droite lorsque $E = \{1; 2\}$ et $F = \{1; 2; 3\}$

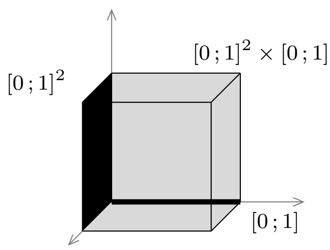
On voit bien sur la représentation ci-contre que :
• Contrairement aux unions et intersections (cf. paragraphe I.3.c), le produit cartésien est une opération « externe » : une union et une intersection de parties de E sont des parties de E, mais E^2 n'est pas une partie de E (par exemple, un produit d'intervalles est un rectangle du plan).
• En général $E \times F \neq F \times E$ et un couple (a, b) n'est pas égal en général au couple (b, a).





Autres exemples : ci-dessous, on a représenté à gauche $[1\,;2] \times [1\,;3]$ (qui est un rectangle du plan) et à droite $[0\,;1]^2 \times [0\,;1]$ (qui est un cube de l'espace).





Plus généralement, donnons-nous $n \in \mathbb{N} \backslash \{0; 1\}$ et n ensembles $E_1, \ldots, E_n$.

Si $n = 2$, on parle de couple. Si $n = 3$, on parle de triplet. Si $n = 4$, on parle de quadruplet.

Définition. *On appelle n-uplet d'éléments de $E_1, \ldots, E_n$ la donnée d'un élément x_1 de E_1, puis d'un élément x_2 de E_2, … et d'un élément x_n de E_n, dans cet ordre. On le note $(x_1, \ldots, x_n)$.*

On appelle produit cartésien de $E_1, \ldots, E_n$, et on note $E_1 \times \cdots \times E_n$, l'ensemble des n-uplet d'éléments de $E_1, \ldots, E_n$.

Si $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = E$, alors le produit est noté E^n plus simplement.

⚠ Ne pas confondre $(x_1, \ldots, x_n)$ avec l'ensemble $\{x_1; \ldots; x_n\}$.
Par exemple le triplet $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 2)$ n'est pas l'ensemble $\{x_1; x_2; x_3\} = \{1; 2\}$.

b) Famille d'éléments d'un ensemble

Définition. *Soit I un ensemble non vide (appelé ensemble d'indices) et E un autre ensemble non vide. On appelle famille d'éléments de E indexée par I la donnée, pour tout $i \in I$, d'un unique élément x_i de E (appelé terme d'indice i). On la note $(x_i)_{i\in I}$.*

La lettre i est muette. Notamment il ne faut jamais l'introduire et on peut la remplacer par n'importe quelle lettre non déjà utilisée.

Remarques :

- Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $I = [\![1\,;n]\!]$, alors $(x_i)_{i\in I}$ est le n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$.
- Si $I = \mathbb{N}$, alors $(x_i)_{i\in I}$ est la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- ⚠ Ne pas confondre :
  - ⋆ la famille $(x_i)_{i\in I}$,
  - ⋆ le terme x_i d'indice i qui est un élément de E (qui nécessite d'introduire i),
  - ⋆ l'ensemble $\{x_i \,|\, i \in I\}$ qui est l'ensemble de touts les termes constituant la famille. Il n'y a pas d'ordre dans un ensemble contrairement à une famille. Par ailleurs, un élément de E peut être répété plusieurs fois dans une famille mais pas dans un ensemble.

On reparlera de famille dans le paragraphe II.1 en faisant le lien avec les applications.

Définition. *Avec les notations de la définition précédente :*

- *Si J est une partie non vide de I, alors la famille $(x_j)_{j\in J}$ est dite une sous-famille de $(x_i)_{i\in I}$. On dit aussi que $(x_i)_{i\in I}$ est une sur-famille de $(x_j)_{j\in J}$.*
- *Si I et J sont deux ensembles non vides et disjoints (c'est-à-dire d'intersection vide) et si $(x_i)_{i\in I}$ et $(x_j)_{j\in J}$ sont deux familles d'éléments de E, alors la famille $(x_i)_{i\in I\cup J}$ est appelée la concaténation des familles $(x_i)_{i\in I}$ et $(x_j)_{j\in J}$.*

Exemple : *La famille $(1,1,2,8,1,3)$ est une sur-famille de $(1,1,3)$ et une sous-famille de $(4,2,1,1,2,8,2,1,3,9,5)$. Elle est la concaténation des familles $(1,1,2,8)$ et $(1,3)$.*

3) Parties d'un ensemble

Soient E et F désignent des ensembles non vides.

a) Inclusion

Définition.

- *On dit que E est inclus dans F, et on note $E \subset F$, lorsque tous les éléments de E sont aussi des éléments de F. On dit aussi que E est une partie (ou un sous-ensemble) de F.*
- *Si F n'est pas inclus dans E, on note $F \not\subset E$.*
- *Si $F \subset E$ et $F \neq E$, on dit que l'inclusion est stricte et on note $F \subsetneq E$.*

⚠ Ne pas confondre $\subset$ et $\in$. Par exemple, si $E = \{0;1;2\}$, alors $1 \in E$ et $\{1\} \subset E$. On ne parle d'inclusion que pour des ensembles : un ensemble est **inclus** dans un autre si tous ses éléments **appartiennent** au second ensemble.

Remarques :

- Avec des quantificateurs : $E \subset F$ si et seulement si

$$\forall x, \quad x \in E \quad \Longrightarrow \quad x \in F.$$

- On a $x \in E$ si et seulement si $\{x\} \subset E$.
- Tout ensemble est inclus dans lui-même.
- Par transitivité de l'implication, si $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$.

Pour montrer que E est inclus dans F, on se donne un élément x de E et on montre que x est un élément de F (on en a déjà parlé dans le paragraphe IV.3 du chapitre 1).

Exemples :

- *Nous avons $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$.*
- *Si f est une fonction à valeurs réelles qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors elle est continue sur $\mathbb{R}$. Mais $x \mapsto |x|$ est continue non dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $\mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subsetneq \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*

- *Si P est une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E, alors $\{x \in E \mid P(x)\}$ est une partie de E. Par exemple $\{x \in \mathbb{R} \mid 4x^2 + 5x - 3 > 0\} \subset \mathbb{R}$.*

L'équivalence suivante résulte des définitions quantifiées de l'inclusion et de l'égalité :

Pour montrer que $E = F$, on peut raisonner par équivalences successives. Mais le plus souvent, on montre que $E \subset F$ puis $F \subset E$ (on en a déjà parlé dans le paragraphe IV.3 du chapitre 1).

Proposition (double inclusion). *On a : $E = F \iff (E \subset F \text{ et } F \subset E)$.*

Proposition. *L'ensemble vide est inclus dans tout autre ensemble et il ne possède qu'une seul sous ensemble : lui-même.*

On rappelle que, si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des propositions, alors $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie lorsque $\mathcal{A}$ est fausse.

Démonstration.

- Soit E un ensemble. Soit x un élément quelconque. La proposition « $x \in \varnothing$ » est fausse (puisque x n'appartient pas à l'ensemble vide ; celui-ci ne contenant aucun élément) donc « $x \in \varnothing \implies x \in E$ » est vraie. Par conséquent : $\varnothing \subset E$.
- En particulier (en prenant $E = \varnothing$), $\varnothing \subset \varnothing$.
- Raisonnons par l'absurde et supposons que $\varnothing$ possède un sous ensemble F non vide. Ce sous-ensemble possède donc un élément x. Comme $F \subset \varnothing$, on a $x \in \varnothing$. C'est absurde. □

b) Ensemble des parties d'un ensemble

Il s'agit de l'ensemble qui contient toutes les parties possibles et imaginables de E. Les éléments de $\mathscr{P}(E)$ sont les parties de E. Il s'agit donc d'un ensemble d'ensembles, ce qui le rend difficilement maniable. On ne sait pas l'expliciter en général. Pour montrer qu'un élément appartient à $\mathscr{P}(E)$, il faut donc systématiquement utiliser l'équivalence qui définit l'**appartenance** à $\mathscr{P}(E)$ par l'**inclusion** dans E.

Définition. *Soit E un ensemble. On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. On a alors*
$$A \in \mathscr{P}(E) \iff A \subset E.$$

Exemples :

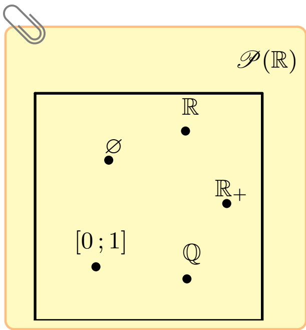
- $\mathscr{P}(\{0;1\}) =$
- $\mathscr{P}(\{P;F\}) =$
- $\mathscr{P}(\{1\}) =$
- $\mathscr{P}(\{-1;0;1\}) =$
- $\mathscr{P}(\varnothing) =$

Remarques :

- Quel que soit l'ensemble E, on a $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$ et $E \in \mathscr{P}(E)$.
- Pour tout élément x, on a
$$\{x\} \in \mathscr{P}(E) \iff \{x\} \subset E \iff x \in E.$$
- On verra dans le chapitre 30 que, si E est un ensemble à n éléments (avec $n \in \mathbb{N}$), alors $\mathscr{P}(E)$ est un ensemble à 2^n éléments : on liste d'abord la partie à 0 éléments (le vide), puis les n parties à 1 élément (les singletons), puis les $\frac{n(n-1)}{2}$ parties à 2 éléments, etc. Il devient donc rapidement fastidieux de décrire $\mathscr{P}(E)$ de façon exhaustive.

  Par exemple, si E contient 6 éléments, $\mathscr{P}(E)$ en contient 64.
- L'ensemble des parties joue un rôle important en théorie des probabilités puisqu'il sert à décrire l'ensemble des événements (cf. chapitre 31).

Par exemple, si on lance un dé à 6 faces, on peut coder le résultat par un élément de $\Omega = [\![1\,;6]\!]$ (en langage probabiliste on dira que Ω est l'univers associé à l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé). On appellera tout élément de $\mathscr{P}(E)$ (c'est-à-dire toute partie de Ω) un événement. Par exemple $\{1,3,5\}$ correspond à l'événement « obtenir un chiffre impair ».

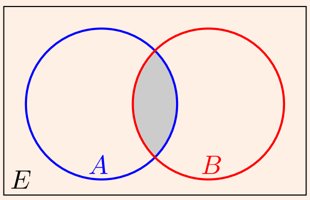


- Parmi les parties de $\mathbb{R}$, on connaît bien les intervalles et donc les unions d'intervalles. Mais il existe plein d'autres parties que nous sommes incapables d'appréhender. Cela fait de l'ensemble $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ un ensemble gigantesque qu'il nous est impossible de décrire totalement.

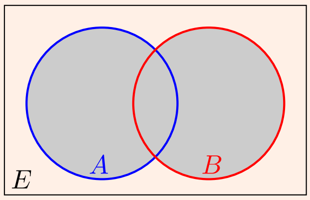
c) Union et intersection de parties

Dans le chapitre 1, nous avons défini l'union et l'intersection de deux ensembles. Dans le pratique, on fait rarement des unions et des intersections de deux ensembles qui n'ont rien à voir les uns avec les autres. En général, on travaille dans un « gros » ensemble et on fait plutôt des unions et intersections de parties de cet ensemble.

Définition. *Soient A et B deux parties de E. On définit les parties suivantes de E :*



$A \cap B = \{\, x \in E \,|\, x \in A \text{ et } x \in B \,\}$,
l'intersection de A et B.



$A \cup B = \{\, x \in E \,|\, x \in A \text{ ou } x \in B \,\}$,
l'union (ou réunion) de A et B.

Remarques :

Ainsi, pour montrer que $x \in A \cap B$, on montre que $x \in A$ et $x \in B$. Pour montrer que $x \in A \cup B$, on montre que $x \in A$ ou $x \in B$ (par exemple en supposant que $x \notin A$ et en montrant que $x \in B$).

- Pour tout $x \in E$, nous avons donc

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B,$$
$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B.$$

- Si P et Q sont deux propriétés qui portent sur les éléments de E, alors

$$\{x \in E \,|\, P(x)\} \cap \{x \in E \,|\, Q(x)\} = \{x \in E \,|\, P(x) \text{ et } Q(x)\},$$
$$\{x \in E \,|\, P(x)\} \cup \{x \in E \,|\, Q(x)\} = \{x \in E \,|\, P(x) \text{ ou } Q(x)\}.$$

Exemple : *On a $[0\,;2] \cap [1\,;3] = [1\,;2]$ et $[0\,;2] \cup [1\,;3] = [0\,;3]$.*

Définition. *Deux parties A et B de E sont dites disjointes si $A \cap B = \varnothing$. Dans ce cas, on dit que $A \cup B$ est une union disjointe.*

Remarques :

Cela signifie qu'il existe un élément dans l'un qui n'est pas dans l'autre.

- ⚠ Attention de ne pas confondre distincts et disjoints :
  - ⋆ A et B sont distincts (c'est-à-dire $A \neq B$) si et seulement si

$$(\exists x \in A,\ x \notin B) \text{ ou } (\exists x \in B,\ x \notin A).$$

  - ⋆ A et B sont disjoints si et seulement si $(\forall x \in A,\ x \notin B)$ et $(\forall x \in B,\ x \notin A)$.
- Deux ensembles disjoints (non vides) sont distincts mais la réciproque est fausse.

  Par exemple, $[0\,;2]$ et $[1\,;3]$ sont distincts mais pas disjoints.
- Pour montrer que deux parties A et B sont disjointes, on raisonne souvent par l'absurde (en supposant qu'il existe $x \in A \cap B$ et en aboutissant à une contradiction).

Proposition. *Soient A, B et C des parties de E.*

- ***Commutativité.*** $A \cup B = B \cup A$ *et* $A \cap B = B \cap A$,
- ***Associativité.*** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *et* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
- ***Distributivité.*** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *et* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
- ***Idempotence.*** $A \cap A = A$ *et* $A \cup A = A$,
- $\varnothing \cap A = \varnothing$ *et* $\varnothing \cup A = A$,
- $E \cap A = A$ *et* $E \cup A = E$,
- $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$.

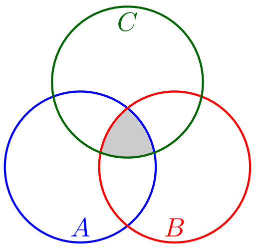
Moyen mnéomtechnique pour la distributivité de $\cup$ sur $\cap$: remplacer $\cup$ par $\times$ et $\cap$ par $+$ (dans sa tête) et distribuer comme si c'était des réels :

$$\begin{aligned} &A \cup (B \cap C) \\ &\quad = A \times (B + C) \\ &\quad = (A \times B) + (A \times C) \\ &\quad = (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

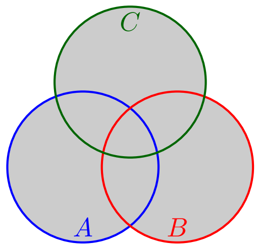
Pour l'autre, on fait pareil mais en remplaçant $\cup$ par $+$ et $\cap$ par $\times$.

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

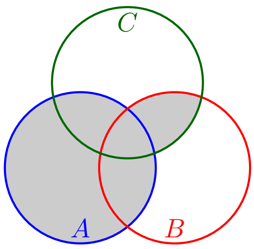
Remarque : L'associativité de la réunion et de l'intersection nous permettent d'écrire : $A \cup B \cup C$ et $A \cap B \cap C$ au lieu de $A \cup (B \cup C)$ et $A \cap (B \cap C)$ respectivement.



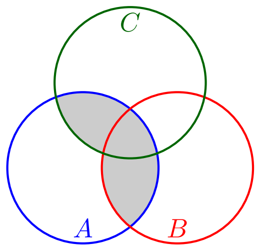
$A \cap B \cap C$



$A \cup B \cup C$



$(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$



$(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$

Plus généralement, on définit :

Ne pas confondre les deux : un élément appartient à l'intersection quand il appartient à **tous** les ensembles, et un élément appartient à l'union quand il appartient à **au moins un** des ensembles.

Définition. *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E (i.e. une famille d'éléments de $\mathscr{P}(E)$) indexée par un ensemble non vide I. On définit :*

- $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \,|\, \exists i \in I,\ x \in A_i\}$, *l'union de la famille* $(A_i)_{i \in I}$.
- $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \,|\, \forall i \in I,\ x \in A_i\}$, *l'intersection de la famille* $(A_i)_{i \in I}$.

Remarques :

- Pour tout $x \in E$, nous avons donc

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \quad \Longleftrightarrow \quad \exists i \in I,\ x \in A_i$$

et

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in I,\ x \in A_i.$$

Ainsi, pour montrer que $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, on trouve un $i \in I$ tel que $x \in A_i$. Pour montrer que $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$, on écrit : « soit $i \in I$ », puis on montre que $x \in A_i$.

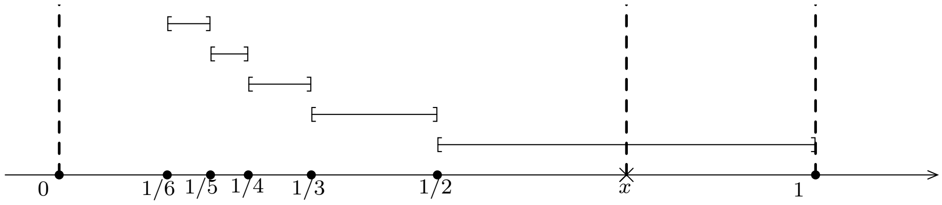
- Si $I = [\![p\,;n]\!]$ avec p et n des entiers naturels tels que $p \leqslant n$, alors on note $\displaystyle\bigcup_{i=p}^{n}$ et $\displaystyle\bigcap_{i=p}^{n}$ au lieu de $\displaystyle\bigcup_{i \in I}$ et $\displaystyle\bigcap_{i \in I}$.
Lorsque $I = \mathbb{N}$, on peut les noter $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{+\infty}$ et $\displaystyle\bigcap_{i=0}^{+\infty}$. Lorsque $I = \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{+\infty}$ et $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{+\infty}$, etc.

Exemples :

- $\tan$ *est définie sur*

- $\{x \in \mathbb{R} \,|\, \sin(x) > 0\} =$

- *Explicitions* $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{1}{k+1}\,;\frac{1}{k}\right]$*. Aidons-nous d'un dessin :*



En revanche l'intersection $\displaystyle\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{1}{k+1}\,;\frac{1}{k}\right]$ est vide. En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait un x dans cette intersection et celui-ci appartiendrait à la fois à $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ et à $\left[\frac{1}{4}\,;\frac{1}{3}\right]$, ce qui est absurde.

On peut conjecturer que cette union est égale à $]0\,;1]$*. Montrons-le par double inclusion :*

Proposition (distributivité). *Soient B une partie de E et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. Nous avons :*

- ***Distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$.*** $\displaystyle\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)$,

- ***Distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$.*** $\displaystyle\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)\cup B = \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B)$.

Démonstration. Montrons le premier point (l'autre est analogue).

$\square$

Pour montrer qu'une union est disjointe, on peut raisonner par contraposée en supposant que $A_i \cap A_j \neq \varnothing$ (donc il existe $x \in A_i \cap A_j$) et montrant que $i = j$.

Définition. *On dit que l'union* $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i$ *est disjointe si la famille* $(A_i)_{i\in I}$ *est constituée de parties deux à deux disjointes de* A, *c'est-à-dire*

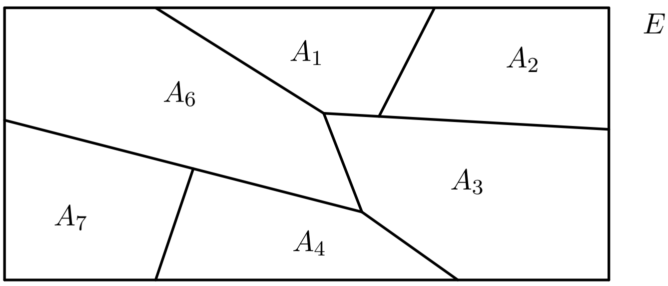
$$\forall (i,j) \in I^2, \quad i \neq j \quad \Longrightarrow \quad A_i \cap A_j = \varnothing.$$

Le côté non vide est indispensable. Si on s'autorise des parties vides, on parle plutôt de système complet d'événements (cf. chapitre 31).

Définition. *Soit* $(A_i)_{i\in I}$ *une famille de parties* ***non vides*** *de* E *indexée par un ensemble non vide* I. *On dit que* $(A_i)_{i\in I}$ *est une partition de* E *si :*

- *Les* A_i, $i \in I$, *sont deux à deux disjoints.*
- $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = E$.

En d'autres termes, une partition de E *est une famille de parties non vides de* E *dont l'union disjointe est égale à* E.



Exemples :

- $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$ *et* $\{0\}$ *forment une partition de* $\mathbb{R}$.
- *L'ensemble des nombres pairs et l'ensemble des nombres impairs forment une partition de* $\mathbb{Z}$. *Plus généralement, si* $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$, *notons, pour tout* $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, $k+n\mathbb{Z}$ *l'ensemble des entiers congrus à* k *modulo* n. *Alors la famille* $(n\mathbb{Z}, 1+n\mathbb{Z}, 2+n\mathbb{Z}, \dots, n-1+n\mathbb{Z})$ *est une partition de* $\mathbb{Z}$.

Cette partition est la partition associée à la relation d'équivalence « être congru modulo n », cf. chapitre 16.

Définition. *Soit* $(A_i)_{i\in I}$ *une famille de parties* ***non vides*** *de* E *indexée par un ensemble non vide* I. *Soit* F *une partie de* E. *On dit que* $(A_i)_{i\in I}$ *est un recouvrement de* F *si* $F \subset \displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i$. *On dit que c'est un recouvrement disjoint si les* A_i, $i \in I$, *sont de plus deux à deux disjoints.*

Exemples :

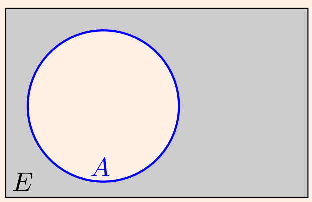
- *La famille* $([\![0\,;n]\!])_{n\in\mathbb{N}}$ *est un recouvrement (non disjoint !) de* $\mathbb{N}$.
- $\left]-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{3}{2}\right[$ *et* $\left]\dfrac{3}{2}\,;\dfrac{7}{2}\right[$ *forment un recouvrement disjoint de* $[0\,;1] \cup [2\,;3]$.

Remarque : Si $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement disjoint de F, alors $(A_i \cap F)_{i\in I}$ est une partition de F.

d) Complémentaire d'une partie

Définition. *Soit* A *une partie de* E.

L'ensemble $\overline{A} = \{x \in E \,|\, x \notin A\}$ *est une partie de* E *appelée complémentaire de* A *dans* E.



On trouve également les notations A^c ou $E\backslash A$ (voir la différence de parties ci-dessous). En probabilités, on utilisera surtout la notation $\overline{A}$, mais en topologie (cf. deuxième année), $\overline{A}$ désignera l'adhérence de A, et donc on privilégiera la notation A^c.

Remarques :

- Pour tout $x \in E$, nous avons donc

$$x \in \overline{A} \quad \Longleftrightarrow \quad x \notin A \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{non}(x \in A).$$

- Si P est une propriété qui porte sur les éléments de E, alors

$$\overline{\{x \in E \,|\, P(x)\}} = \{x \in E \,|\, \mathrm{non}(P(x))\}.$$

Proposition. *Soient A et B des parties de E. On a*

- $\overline{\varnothing} = E$, • $\overline{E} = \varnothing$, • $\overline{\overline{A}} = A$, • $A \subset B \Longleftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

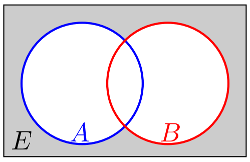
Nous avons déjà vu des lois de Morgan pour les propositions dans le chapitre 1. Ce sont en fait les mêmes ! Il y a en effet un lien très fort entre les opérations ensemblistes et les connecteurs logiques : le « et » logique est l'analogue de l'intersection, le « ou » est l'analogue de l'union, le « non » est l'analogue du passage au complémentaire, l'implication logique est l'analogue de l'inclusion, et l'équivalence logique est l'analogue de l'égalité (ensembliste).

Proposition (Lois de Morgan). *Si A et B sont des parties de E, alors*

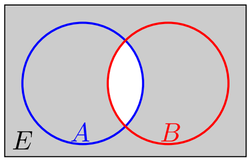
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \text{et} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Plus généralement, si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de E indexée par un ensemble non vide I, alors

$$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \qquad \text{et} \qquad \overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}.$$



$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$



$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Démonstration.

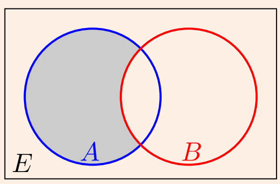
$\square$

e) Différence de parties

Dans le cas où $B \subset A$, on l'appelle encore « complémentaire de B dans A ».

Définition (différence). *Soient A et B deux parties de E.*

L'ensemble $A\backslash B = A \cap \overline{B} = \{\, x \in E \,|\, x \in A \text{ et } x \notin B \,\}$ est une partie de E appelée différence de A et B (on note aussi $A - B$). On l'appelle aussi « A privé de B ».



II Résultats généraux sur les applications

Soient E, F, G et H des ensembles non vides.

1) Notion d'application

On se contente d'une définition intuitive de la notion d'application.

Définition. *Une fonction ou une application f de E dans F (ou à valeurs dans F) est la donnée pour chaque élément x de E d'un unique élément de F, appelé image de x par f et noté $f(x)$.*

L'ensemble E est appelé ensemble de départ de f. L'ensemble F est appelée ensemble d'arrivée de f.

On peut condenser la notation par

$$f : x \in E \longmapsto \cdots$$

Rien ne dit que, pour chaque $x \in E$, on connaisse une expression explicite de $f(x)$. Par exemple $f(x)$ peut être définie comme l'unique élément de F vérifiant une certaine propriété dépendant de x.

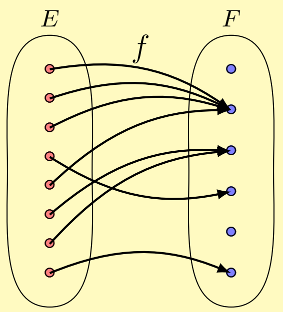
Définition.

- *On écrit « Soit $f : E \longrightarrow F$ » pour signifier « Soit f une fonction de E dans F ».*
- *Si on connaît, pour chaque $x \in E$, une expression de l'image de x par f, on note*

$$f : \begin{cases} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \text{une expression de l'image de } x \text{ par } f \end{cases}$$

Exemples :

Quand E et F sont des ensembles finis, on peut se représenter l'application par un diagramme sagittal (chaque rond de couleur représente un élément et chaque flèche indique comment chaque élément de E est envoyé sur un élément de F).



Raisonner sur un diagramme sagittal est interdit ! Ce n'est qu'une représentation qui peut prêter à confusion... surtout quand les ensembles sont infinis. Mais un tel diagramme peut aider à amorcer une preuve ou à trouver un contre-exemple.

Définition. *On note $\mathscr{F}(E,F)$ ou E^F l'ensemble des fonctions de E dans F.*

Définition (antécédent). *Soit $f : E \longrightarrow F$. Soit $y \in F$.*

- *On dit que y admet un antécédent par f si il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ (on dit aussi que y est atteint par f).*
- *Soit $x \in E$. Si $y = f(x)$, on dit que x est un antécédent de y par f.*

Exemples : *En reprenant les fonctions de l'exemple précédent :*

Remarques :

- Dans l'expression $x \longmapsto f(x)$, la lettre x est muette (donc, notamment, on peut la remplacer par une autre variable non utilisée et on ne doit pas introduire x avant de parler de $x \longmapsto f(x)$... mais si on parle de $f(x)$, alors il faut avoir introduit x avant).
- Ne pas confondre une application f avec la formule (si elle existe) donnant $f(x)$ en fonction de x. Ainsi on n'écrira jamais « Soit $f(x)$ une application » mais plutôt « Soit f une application qui à x associe $f(x)$ ».
- $f : E \longrightarrow F$ ne veut pas dire que tous les éléments de F sont atteints. Il peut ne pas exister d'antécédent par f à un élément y de F. Il peut aussi en exister plus d'un. Par contre un élément x de E admet une seule image par f.
- Le programme impose de confondre les notions d'applications et de fonctions. En fait la notion de fonction est plus générale que la notion d'application : une fonction associe à tout élément de l'ensemble de départ au plus un élément de l'ensemble d'arrivée (possiblement aucun). Lorsqu'on étudiera une fonction f cette année, on commencera toujours par déterminer son domaine de définition D_f. On se ramènera à l'étude de l'application f définie sur $E = D_f$.
- Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E indexée par I est en réalité une autre notation pour parler de l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ i & \longmapsto & x_i \end{array} \right.$. En particulier une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout entier naturel n associe le terme de rang n de la suite. L'usage veut que l'on préfère la notation en terme de famille lorsque l'ensemble des indices est une famille de $\mathbb{Z}$ et la notation en terme de fonction sinon.

  Dans le cas particulier où $I = [\![1\,;n]\!]$, avec $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. On a vu que $(x_i)_{i\in I}$ est le n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. L'ensemble des n-uplet d'éléments de E (que l'on note E^n) pourrait donc se noter aussi $E^{[\![1\,;n]\!]}$.

  On comprend donc que la notation E^F est héritée de la notation E^n des n-uplets.

- Lorsque l'on change l'ensemble de départ ou l'ensemble d'arrivée, ce n'est plus rigoureusement la même application en vertu de la définition suivante :

  ... même si, dans les faits, on ne précise pas toujours l'ensemble d'arrivée.

Définition. *Deux applications f et g sont égales si et seulement si elles ont le même ensemble de départ (notons-le E), le même ensemble d'arrivée et, pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.*

Définition (graphe). *Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction. On appelle graphe de f la partie $\mathcal{G}$ de $E \times F$ suivante :*

$$\mathcal{G} = \{(x, y) \in E \times F \,|\, y = f(x)\}.$$

Quand on fait de la théorie des ensembles pure et dure, on **définit** une fonction par son graphe. Pour définir rigoureusement le produit cartésien, pour tout $x \in E$ et $y \in F$, on définit le couple (x, y) comme l'ensemble $\{\{x\}; \{x; y\}\}$. Inutile de retenir cela, la définition donnée est largement suffisante.

Remarques :

- En d'autres termes, si $(x, y) \in E \times F$, alors $(x, y) \in \mathcal{G}$ si et seulement si $y = f(x)$.
- Dans le cas où E est une partie de $\mathbb{R}$ et où $F = \mathbb{R}$, $\mathcal{G}$ est donc la partie de $\mathbb{R}^2$ (qu'on a identifiée au plan) formée par les points dont l'ordonnée y est l'image par f de l'abscisse x.

2) Quelques applications particulières

Définition (application identité). *L'application* $\mathrm{Id}_E : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{cases}$ *est appelée identité de* E.

La fonction identité « ne fait rien ». Elle associe à tout élément de E lui-même. Au premier abord, on peut se dire qu'elle ne sert à rien. On verra dans les prochains paragraphes qu'elle joue un élément capital pour la composition (de la même manière que 0 joue un rôle fondamental pour l'addition de nombres et 1 pour la multiplication).

Définition (application constante). *On dit qu'une application* $f : E \longrightarrow F$ *est constante si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :*

- *pour tout* $(x,y) \in E^2$, $f(x) = f(y)$.
- *il existe* $\alpha \in F$ *tel que, pour tout* $x \in E$, $f(x) = \alpha$
  (on dit alors que f *est l'application constante égale à* α*).*

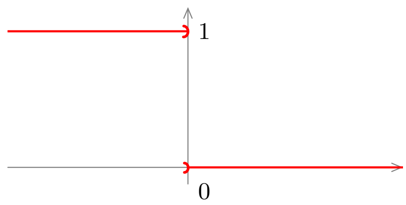
Définition (fonction indicatrice). *Soit* A *une partie de* E. *On appelle fonction indicatrice de* A *la fonction*

$$\mathbb{1}_A : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

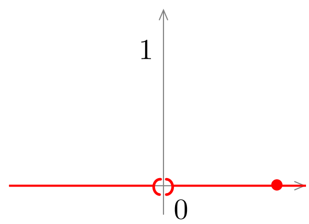
La fonction $\mathbb{1}_E$ est la fonction de E dans $\mathbb{R}$ qui est constante égale à 1.

Exemples :

- *Ci-dessous le graphe de* $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}$ *:*



- *Ci-dessous le graphe de* $\mathbb{1}_{\{0\}}$ *:*



Proposition. *Soient* A *et* B *des parties de* E.

- ***Caractérisation de l'inclusion.*** *On a* $A \subset B$ *si et seulement si* $\mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$.
- ***Caractérisation de l'égalité.*** *On a* $A = B$ *si et seulement si* $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

Démonstration.

□

Ces formules sont particulièrement utiles en combinatoire (cf. chapitre 30).

Proposition. *Soient* A *et* B *des parties de* E. *On a :*

- $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$,
- $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$,
- $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

Démonstration.

$\square$

Remarque : L'indicatrice permet de remontrer certains formules. Par exemple, si A, B et C sont des parties de E, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{A\cap(B\cup C)} = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_{B\cup C} &= \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C \\ &= \mathbb{1}_{A\cap B} + \mathbb{1}_{A\cap C} - \mathbb{1}_{A\cap B\cap C}.\end{aligned}$$

Comme $A\cap B\cap C = (A\cap B)\cap(A\cap C)$, on en déduit que $\mathbb{1}_{A\cap(B\cup C)} = \mathbb{1}_{(A\cap B)\cup(A\cap C)}$ et donc on retrouve la formule de distributivité : $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$.

3) Image directe et image réciproque

a) Image directe

Un élément de $f(A)$ admet toujours (au moins) un antécédent dans E par f. Autrement dit $f(A)$ est l'ensemble de toutes les images des éléments de E par f.

Ainsi, pour montrer que $y\in f(A)$, on justifie l'existence de $x\in A$ tel que $y=f(x)$. Autrement dit, on montre que y admet un antécédent par f.

Définition (image directe). *Soit f une application de E dans F. Soit A une partie de E. On appelle image de A par f et on note $\{\,f(x)\,|\,x\in A\,\}$ ou encore $f(A)$ l'ensemble*

$$\{\,y\in F\,\big|\,\exists x\in A,\, y=f(x)\,\},$$

des valeurs prises par $f(x)$ lorsque x parcourt A.

Remarques :

- Soit A une partie de E. Soit y un élément de F. On a :

- Il s'agit donc d'une autre façon de définir un ensemble (on en a déjà parlé dans le chapitre 1) : si B un ensemble et s'il existe un ensemble A et une application f définie sur A telle que

$$B = f(A) = \{f(x)\,|\,x\in A\},$$

alors on dit que l'ensemble B est défini sous forme paramétrique.

Exemples :

On voit que cos transforme l'intervalle ouvert non borné $\mathbb{R}_+^*$ en l'intervalle fermé borné $[-1\,;1]$. Ainsi l'image d'un intervalle par une fonction n'a aucune raison d'être un intervalle du même type (on en reparlera dans le chapitre 18).

Il est déconseillé de retenir des formules sur l'image direte car certaines sont tentantes mais fausses. Voyons-en quelques unes : on se donne A et B des parties de E et $f : E \longrightarrow F$.

- Si $A \subset B$, alors $f(A) \subset f(B)$.

- $f(A \cap B) \subset f(A) \cup f(B)$. Mais l'inclusion contraire est fausse en général !

- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

b) Image réciproque

En d'autres termes, $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des antécédents des éléments de B.

Certains éléments de B peuvent ne pas avoir d'antécédents. Le cas échéant, $f^{-1}(B) = \varnothing$!

Définition (image réciproque). *Soit f une application de E dans F. Soit B une partie de F. On appelle image réciproque de B par f et on note $f^{-1}(B)$ l'ensemble*

$$\{x \in E \,|\, f(x) \in B\}$$

des éléments de E dont l'image appartient à B.

$f^{-1}(B)$ est une partie de E alors que, dans le paragraphe précédent, $f(A)$ est une partie de F.

Remarques :

- Soit B une partie de F. On a :

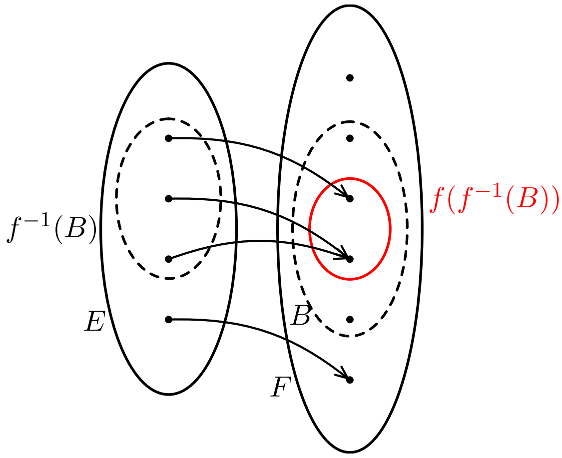
$$\boxed{}\,.$$

- Dans le paragraphe III.3.a, on verra que, lorsque f est une bijection, sa réciproque se note f^{-1}. L'application f^{-1} n'existe pas toujours (seulement si f est bijective). En revanche ici, $f^{-1}(B)$ est un **ensemble** qui existe toujours. On verra que, lorsque f est bijective, $f^{-1}(B)$ est à la fois l'image réciproque de B par f et l'image direct de B par f^{-1}.

Nous avons aussi représenté $f\left(f^{-1}(B)\right)$ à droite (en rouge) et on voit qu'il n'est pas égal à B sur cet exemple (cf. remarque plus bas).

Exemples :

- *Avec un diagramme sagittal (à droite B, et à gauche $f^{-1}(B)$ sont représentés en pointillés) :*



Dans l'exercice du TDn° 15, on verra des conditions nécessaires et suffisantes pour que les inclusions réciproques soit vraie.

⚠ Il est déconseillé de retenir des formules sur l'image réciproque car certaines sont tentantes mais fausses. Voyons-en quelques unes : on se donne $f : E \longrightarrow F$.

- Si $B \in \mathscr{P}(F)$, alors $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Il n'y a pas égalité en général !
  En effet :

Ces contre-exemples montrent que, $B = f(A)$ n'est pas équivalent à $A = f^{-1}(B)$. Ils montrent même qu'aucune des implication n'est vraie... en général du moins.

- Si $A \in \mathscr{P}(F)$, alors $A \subset f^{-1}(f(A))$. Il n'y a pas égalité en général !
  En effet :

Maintenant, supposons que A et B désignent des parties de F, alors :

- $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

- $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
  En effet, c'est la même preuve que ci-dessus en remplaçant $\cup$ par $\cap$ et ou par et.

Ce n'est une partition de E que si les ensembles constituants cette union sont non vides. Ce n'est le cas que si tout élément de F admet un antécédent.

Remarque : Si $f : E \longrightarrow F$, alors E s'écrit comme l'union disjointe

$$E = \bigcup_{y \in F} f^{-1}(\{y\}).$$

En effet :

Nous utiliserons régulièrement ce résultat cette année, par exemple pour définir le système complet d'événements associé à une variable aléatoire, cf. chapitre 32.

4) Opérations sur les applications

a) Restriction et prolongement

Définition. *Soit $f : E \longrightarrow F$. Soit A une partie de E. On appelle restriction de f à A la fonction, notée $f|_A$, définie par :*

$$f|_A : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

$f|_A$ est donc la fonction f à ceci près que son espace de départ est désormais A. L'un des intérêts est qu'en se restreignant à un ensemble plus petit, la fonction peut vérifier des conditions ou des propriétés qu'elles ne vérifiait pas quand elle était définie sur E tout entier.

Remarque : Tout ce qu'il faut retenir est que, pour tout $x \in A$, $f|_A(x) = f(x)$. Autrement dit, la fonction $g : A \longrightarrow F$ est la restriction de f à A si et seulement si, pour tout $x \in A$, $g(x) = f(x)$.

Exemples :

- *Si f est la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$, sa restriction à $\mathbb{R}_+^*$ est décroissante (alors que f ne l'est pas).*
- *Si $n \in \mathbb{Z}$, la restriction de la fonction partie entière à $[n\,;n+1[$ est une fonction continue (car constant sur son domaine de définition qui est $[n\,;n+1[$).*

Définition. *Soit A une partie de E et soit $f : A \longrightarrow F$. On appelle prolongement de f à E toute fonction $g : E \longrightarrow F$ telle que $f = g|_A$.*

Prolonger f consiste donc à définir f sur un espace plus gros que celui sur lequel elle était définie.
⚠ On ne peut prolonger f qu'en des points en lesquels elle n'était pas déjà définie (ceux de $E \backslash A$ ici).

Remarques :

- Une fonction $g : E \longrightarrow F$ est un prolongement de f à E si et seulement si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$.
- Il n'y a bien sûr pas unicité du prolongement !

  Par exemple, la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}_-$ peut être prolongée en la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$ ou encore prolongée en la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}$.
- Cette année, nous ne ferons que des prolongements par continuité, c'est-à-dire prolonger des fonctions en un point en lequel elle n'est pas définie et dans le but de la rendre continue en ce point (cf. chapitre 18).

b) Composition de fonctions

Si F n'est pas inclus dans F', il faut au moins que $f(E) \subset F'$ pour pouvoir définir l'application $g \circ f$.

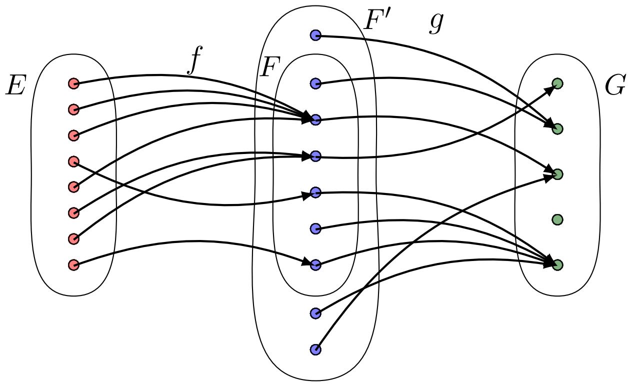
Définition. *Soient E, F, F' et G des ensembles avec $F \subset F'$. Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F' \longrightarrow G$ sont des applications, alors on définit la composée de f par g, et on note $g \circ f$, l'application*

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ f & \longmapsto & g\big(f(x)\big) \end{array} \right.$$

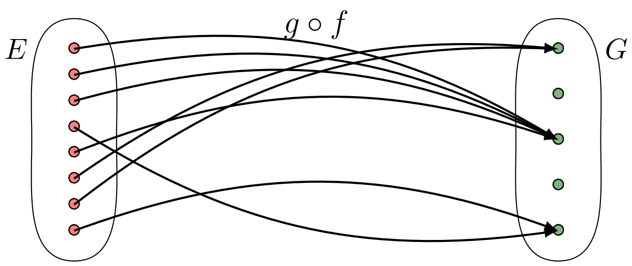
Exemples :

- *En reprenant les applications φ et ψ introduites précédemment, on a*

- *Avec un diagramme sagittal :*



donc



Proposition. *Si f est une application de E dans F, alors $\mathrm{Id}_F \circ f = f$ et $f \circ \mathrm{Id}_E = f$.*

En général, la composition n'est possible que dans un seul sens et, quand elle est possible dans les deux, f et g n'ont aucune raison de commuter. Par exemple $\sin$ et $\cos$ sont toutes les deux des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais

$$\sin \circ \cos(0) = \sin(1)$$

n'est pas égal à

$$\cos \circ \sin(0) = \cos(0) = 1$$

si bien que $\cos$ et $\sin$ ne commutent pas.

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Proposition (associativité de la composition). *Soient $f \in F^E$, $g \in G^F$ et $h \in H^G$. Nous avons*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

On note alors plus simplement $h \circ g \circ f$.

Démonstration. Par définition $h \circ g$ est une application de F dans H donc $(h \circ g) \circ f$ est une application de E dans H. De même $h \circ (g \circ f)$ est une application de E dans H. On a bien l'égalité des ensembles de départ et l'égalité des ensembles d'arrivée. Ensuite, donnons-nous $x \in E$ et posons $y = f(x) \in F$. Nous avons

$$\big((h \circ g) \circ f\big)(x) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g)(y) = h(g(y)) = h((g \circ f)(x)) = \big(h \circ (g \circ f)\big)(x).$$

Ainsi $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. $\square$

c) Sommes, produits, etc.

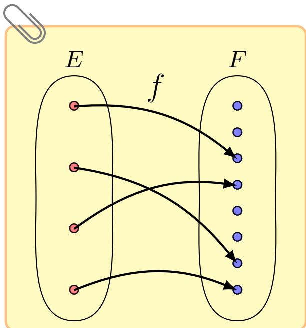
En tout généralité, sommer ou multiplier (et a fortiori soustraire ou diviser) des fonctions quelconques n'a aucun sens ! Pour cela, il faut que l'ensemble d'arrivée soit un ensemble sur lequel ces opérations ont un sens. De nombreux chapitres du second semestre seront consacrés aux applications dites linéaires sur des espaces dit vectoriels.

III Injections, surjections, bijections

On se donne toujours E, F et G des ensembles non vides.

1) Définitions et exemples

a) Injection



Définition. *Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite injective (ou une injection) de E dans F (ou juste sur E) si tout élément y de F admet* ***au plus*** *un antécédent par f dans E.*

Définition quantifiée :

$$\forall (x, x') \in E^2, \qquad (x \neq x' \quad \Longrightarrow \quad f(x) \neq f(x')),$$

ou encore

$$\forall (x, x') \in E^2, \qquad (f(x) = f(x') \quad \Longrightarrow \quad x = x').$$

Remarques :

- « Au plus un antécédent » signifie qu'un élément de F admet ou bien un antécédent et un seul ou bien n'en admet pas. Autrement dit, lorsque f est injective, les éléments de $f(E)$ possèdent tous exactement un antécédent par f alors que les éléments de $F \backslash f(E)$ n'en possèdent aucun.
- Autrement dit, f est une injection sur E si et seulement si, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ (d'inconnue $x \in E$) admet une seule solution ou bien aucune.
- Le domaine d'arrivée d'une injection f ne joue pas de rôle dans le fait qu'il s'agit d'une injection (voilà pourquoi dire que f est une injection sur E suffit), contrairement aux surjections et aux bijections (cf. paragraphes suivants).
- La première définition quantifiée d'une application injective signifie que, dès que l'on considère deux éléments x et x' distincts, alors ils n'ont pas la même image (car s'ils avaient la même image, alors cette image admettrait au moins deux antécédents : x et x'). L'implication de la deuxième définition quantifiée est la contraposée de celle de la première.
- Attention à la notation avec un prime lorsque les éléments manipulés sont des fonctions. Il y aurait alors un gros risque de confusion avec la dérivée. Dans ce cas, il vaut mieux changer de lettre ou de mettre des indices.

Confusion grave : croire que l'injectivité signifie que, pour tout $(x, x') \in E^2$,

$$x = x' \Rightarrow f(x) = f(x').$$

Cette affirmation est toujours vraie : deux éléments égaux ont toujours la même image. Rien à voir avec de l'injectivité.

Méthodes de preuve pour l'injectivité.

- Pour montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est injective, on a deux options :
  - ⋆ On écrit « Soient x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$ » et on montre que $x = x'$.
  - ⋆ On écrit « Soient x et x' dans E tels que $x \neq x'$ » et on montre que $f(x) \neq f(x')$.
- Pour montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ n'est pas injective, on exhibe deux éléments **explicites** x_0 et x_0' de E distincts tels que $f(x_0) = f(x_0')$.

Pour montrer que f n'est pas injective, on ne commence pas à chercher tous les contre-exemples possibles : un seul couple (x_0, x_0') qui ne fonctionne pas suffit à prouver la non-injectivité.

Exemples :

- *L'application* $f : r \in \mathbb{Q} \longmapsto \dfrac{r}{r-\pi} \in \mathbb{R}$ *est injective. En effet :*

Cet exemple montrer qu'une injection n'est pas forcément une fonction monotone. Ici $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ et $f(2) = 3$.

- *L'application* $f : n \in \mathbb{N} \longmapsto n + (-1)^n$ *est injective sur* $\mathbb{N}$*. En effet :*

- *L'application* $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (x + y, xy)$ *n'est pas injective sur* $\mathbb{R}^2$*. En effet :*

- *L'application* $\varphi : t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ *n'est pas injective sur* $\mathbb{R}$*. En effet :*

- *Si* $A \subset E$*, alors l'application*

$$i : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$$

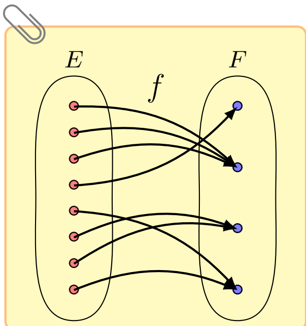
est une injection de A *dans* E*, appelée injection canonique.*

Les méthodes de preuve ci-dessus sont génériques. Dans certains cas particuliers on dispose de résultats permettant de montrer l'injectivité sans devoir recourir à ces méthodes. On a déjà rencontré un cas de figure dans la partie A du chapitre 4 :

Proposition. *Soit* f *est une fonction définie sur intervalle non vide et non réduit à un point* I *et* ***à valeurs réelles****. Si* f *est strictement monotone sur* I*, alors* f *est injective sur* I*.*

... mais on l'avait formulé en disant qu'un élément de $\mathbb{R}$ admettait au plus un antécédent par f, ce qui est la même chose.

b) Surjection



Définition. *Une application* $f : E \longrightarrow F$ *est dite surjective (ou une surjection) de* E *sur* F *si tout élément* y *de* F *admet* ***au moins*** *un antécédent par* f *dans* E*.*

Définition quantifiée :

$$\forall y \in F, \qquad \exists x \in E, \qquad y = f(x),$$

Remarque : Autrement dit, f est une surjection de E sur F si et seulement si, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ (d'inconnue $x \in E$) admet (au moins) une solution.

Proposition. *Un application* $f : E \longrightarrow F$ *est surjective si et seulement si* $F \subset f(E)$ *si et seulement si* $F = f(E)$

Démonstration. La proposition $F \subset f(E)$ signifie exactement que, tout élément y de F, appartient à $f(E)$. Or $y \in f(E)$ signifie qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(E)$. La deuxième équivalence découle du fait que $f(E) \subset F$ est automatique. □

Remarque : On peut donc construire « facilement » une surjection : dès que f est une application définie sur E, alors f est automatiquement une surjection de E sur $f(E)$.

Méthodes de preuve pour la surjectivité.

- Pour montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est surjective, on écrit « Soit $y \in F$ » puis on cherche $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
- Pour montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ n'est pas surjective, on exhibe un élément y de F **explicite** qui n'admet pas d'antécédent par f.

... quitte à raisonner par l'absurde.

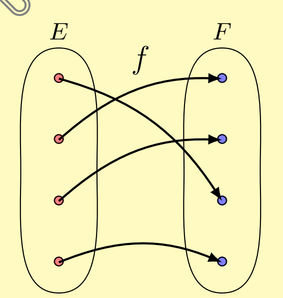
Exemples :

- *L'application* $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ f & \longmapsto & (f(0), f'(0)) \end{array} \right.$ *est surjective. En effet :*

Les fonctions $\exp$ et $\sin + 1$ sont des antécédents distincts (la première est non bornée, la seconde si) de $(1,1)$ par ψ donc ψ n'est pas injective.

- *La fonction* $\varphi : t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ *est surjective de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{U}$. *En effet :*
- *On a vu dans le paragraphe précédent que l'application* $f : r \in \mathbb{Q} \longmapsto \dfrac{r}{r-\pi} \in \mathbb{R}$ *est injective. Cependant elle n'est pas surjective. En effet :*

c) Bijection



Définition. *Une application* $f : E \longrightarrow F$ *est dite bijective (ou une bijection) de* E *sur* F *si elle est injective et surjective, c'est-à-dire si tout élément* y *de* F *admet un unique antécédent par* f *dans* E.

Définition quantifiée :

$$\forall y \in F, \qquad \exists! x \in E, \qquad y = f(x).$$

Remarques :

- Autrement dit, f est une bijection de E sur F si et seulement si, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ (d'inconnue $x \in E$) admet une et une seule solution.
- Si on dispose d'une injection f sur E, alors f réalise une bijection de E sur $f(E)$.

Méthodes de preuve pour la bijectivité.

Pour montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective, on peut montrer qu'elle est injective et surjective.

Dans la pratique, on s'en remet à cette méthode si les méthodes du paragraphe III.3.b n'ont pas abouti.

Exemples :

- *La fonction carré est bijective de* $\mathbb{R}_+$ *sur* $\mathbb{R}_+$.
- *La fonction* $\exp$ *est bijective de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.
- *La fonction* $\ln$ *est bijective de* $\mathbb{R}_+^*$ *sur* $\mathbb{R}$.
- *En notant* $\mathcal{P}$ *le plan complexe, l'application*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ z = x + \mathrm{i}y & \longmapsto & \text{le point } M \text{ de coordonnées } (x,y) \end{array} \right.$$

est une bijection.

- *On a vu dans le paragraphe précédent que l'application* $f : n \in \mathbb{N} \longmapsto n + (-1)^n \in \mathbb{N}$ *est injective. Montrons qu'elle est surjective (et donc bijective) de* $\mathbb{N}$ *sur* $\mathbb{N}$.

> Pour des exemples de non bijections, il suffit de piocher dans les exemples des deux paragraphes précédents. En effet une application n'est pas bijective si et seulement si elle n'est pas injective **ou** pas surjective (ou les deux bien sûr).

d) Autres exemples

- *Le fait que tout réel positif admet une unique racine carrée (positive) se traduit par la bijectivité de l'application* $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$.

  En revanche :

  ⋆ *l'application* $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$ *n'est pas surjective (mais toujours injective) puisque les réels strictement négatifs ne sont pas des carrés.*

  ⋆ *l'application* $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$ *n'est pas injective (mais toujours surjective) puisque* -2 *et* 2 *ont la même image.*

  ⋆ *l'application* $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$ *n'est ni injective ni surjective.*

- *L'application* $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array}\right.$

- *L'application* $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (y, x+y, x) \end{array}\right.$

- *La fonction* $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \,]-\pi\,;\pi[& \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ (r,\theta) & \longmapsto & r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \end{array}\right.$ *est bijective puisque tout complexe non nul admet une écriture exponentielle qui est unique si on impose d'utiliser son argument principal.*

- *Notons* E *l'ensemble des élèves de classe de MPSI2 (2024/2025),* P *l'ensemble des prénoms et* N *l'ensemble des noms de familles.*

  ⋆ *L'application* $f_{\text{MPSI2}} : E \longrightarrow P$ *qui à tout élève de la classe de MPSI2 associe son prénom :*

  ⋆ *L'application* $g_{\text{MPSI2}} : E \longrightarrow N$ *qui à tout élève de la classe de MPSI2 associe son nom de famille*

⋆ *L'application $h_{\text{MPSI2}} : E \longrightarrow \{$janvier ;février ;...;décembre$\}$ qui à tout élève de la classe de MPSI2 associe son mois de naissance*

2) Composition d'injections, de surjections, de bijections

Proposition. *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.*

1. *Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.*
2. *Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.*
3. *Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.*

Démonstration.

□

Remarque : Nous avons des réciproques partielles :

Deux éléments égaux ont la même image par une application !

- Si $g \circ f$ est injective, alors f l'est.

  On ne peut rien dire sur l'injectivité de g.

  Lorsque l'on cherche un contre-exemple de fonction non injective, il faut penser à la fonction carré sur $\mathbb{R}$.

  Par exemple, si $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$ *et* $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$, *alors f et $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$ sont injectives, tandis que g ne l'est pas.*

- Si $g \circ f$ est surjective, alors g l'est.

  On ne peut rien dire sur la surjectivité de f.

  Lorsque l'on cherche un contre-exemple de fonction non injective, il faut penser à la fonction carré sur $\mathbb{R}$.

  Par exemple, si $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$ *et* $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$, *alors g et $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$ sont surjectives, tandis que f ne l'est pas.*

3) Réciproque d'une bijection

a) Définition et premiers exemples

Définition. *Soit f une bijection de E sur F. On appelle réciproque de f et on note f^{-1} l'application de F dans E qui à tout élément $y \in F$ associe l'unique antécédent de y par f dans E. On a donc*

$$\forall (x,y) \in E \times F, \qquad \big(y = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)\big).$$

Exemples : *Dans les chapitres 4 et 5, nous avons montré que :*

- *la fonction carré est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et que sa réciproque est la fonction racine carrée.*
- *$\exp$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et avons noté $\ln$ sa réciproque.*
- *$\tan$ est bijective de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$ et avons noté Arctan sa réciproque.*
- *$\sin$ est bijective de $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1\,;1]$ et avons noté Arcsin sa réciproque.*
- *$\cos$ est bijective de $[0\,;\pi]$ sur $[-1\,;1]$ et avons noté Arccos sa réciproque.*

L'ingrédient numéro 1 pour montrer que toutes ces fonctions sont des bijections a été le théorème de la bijection. Ce théorème reste l'outil principal pour montrer qu'une fonction **définie sur un intervalle et à valeurs réelles** est une bijection. Cependant il ne permet pas d'expliciter la réciproque en général.

Remarque : On parle parfois de réciproque d'une injection f sur E. Implicitement, cela signifie que l'on considère la réciproque de la bijection de f sur $f(E)$.

b) Théorème de caractérisation

Théorème. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est une bijection de E sur F.*
2. *Il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que*
$$\forall (x,y) \in E \times F, \qquad \big(y = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = g(y)\big).$$
3. *Il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.*

Dans ce cas, l'application g est uniquement déterminée : il s'agit de la fonction réciproque de f. De plus l'application f^{-1} est elle-même bijective de F sur E et son application réciproque est f.

En particulier, la réciproque f^{-1} d'une bijection f de E sur F vérifie donc

$$\forall x \in E,\ f^{-1} \circ f(x) = x$$
$$\forall y \in F,\ f \circ f^{-1}(y) = y.$$

Les hypothèses $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ sont requises toutes les deux. Comme on le voit dans la preuve ci-contre :

- $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ donne l'injectivité de f (et aussi la surjectivité de g).
- $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ donne la surjectivité de f (et aussi l'injectivité de g).

Démonstration.

$\square$

Méthodes de preuve pour la bijectivité (suite).

Pour montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective, on peut aussi :

- Écrire « Soient $x \in E$ et $y \in F$ », enchaîner les équivalences à partir de $y = f(x)$ pour se ramener à $x = g(y)$ avec g une fonction de F dans E.
- Trouver une fonction $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ **et** $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

Bonus : g est alors la réciproque de f. En général cette méthode ne fonctionne pas : il faut y penser lorsque l'on demande d'expliciter la réciproque.

Exemples :

- *Montrer que $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (2x + y, 5x + 3y)$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et expliciter sa réciproque.*

Ici un élément de l'espace de départ comme de l'espace d'arrivée est un couple. On le note donc (x, y) ou (a, b) ou (u, v), etc. et surtout pas x ou y pour éviter toute confusion.

- *Si $f : E \longrightarrow E$ vérifie $f \circ f = \mathrm{Id}_E$ (on dit que f est une involution), alors f est bijective de E sur E et $f^{-1} = f$.*

On a déjà rencontré plein d'involutions : la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, la conjugaison complexe, la fonction qui à une partie d'un ensemble associe son complémentaire, etc.

- *Montrons que $f : z \in \mathbb{C}\backslash\{2\mathrm{i}\} \longmapsto \dfrac{2z + \mathrm{i}}{z - 2\mathrm{i}}$ est une bijection de $\mathbb{C}\backslash\{2\mathrm{i}\}$ sur une partie de $\mathbb{C}$ à préciser.*

- *Soient A et B deux parties de E. Introduisons*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ (X, Y) & \longmapsto & X \cup Y \end{array} \right.$$

On voit donc sur cet exemple que ce n'est pas parce que $f \circ g = \mathbb{1}$ que, automatiquement, $g \circ f = \mathbb{1}$. Le contrainte non plus. Encore une fois : pour avoir la bijectivité, il faut les deux !

L'ordre de composition est renversé quand on prend la réciproque. C'est cohérent : pour défaire l'action de f puis de g (dans cet ordre), on commence par défaire l'action de g puis l'action de f. Retenons : « pour enterrer un trésor, on le met dans le trou et on le bouche. Pour le déterrer, on creuse le trouve et on enlève le trésor ».

Proposition. *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ des applications bijectives. Alors $g \circ f$ est bijective de E sur G et $\left(g \circ f\right)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Démonstration. Nous avons

$$(g \circ f) \circ \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{Id}_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_G,$$

$$\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_F \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$$

et donc $f^{-1} \circ g^{-1}$ est bien la bijection réciproque de $g \circ f$. □

Exemple : *La fonction $h : x \longmapsto \mathrm{Arctan}(e^x)$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur*

$$\mathrm{Arctan}(\exp(\mathbb{R})) = \mathrm{Arctan}(\mathbb{R}_+^*) = \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[.$$

Comme $h = \mathrm{Arctan} \circ \exp$, $h^{-1} = \exp^{-1} \circ \mathrm{Arctan}^{-1}$ *donc*

$$h^{-1} : x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[\longmapsto \ln(\tan(x)).$$

c) Retour sur la notation $f^{-1}(B)$

Soit $f : E \longrightarrow F$. Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. On l'a déjà dit plus haut (cf. paragraphe III.3.b) mais la notation

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \,|\, f(x) \in B\}$$

existe même lorsque f n'est pas une bijection (et n'admet pas de réciproque). Ici on parle de $f^{-1}(B)$ avec B une partie de F et non pas de $f^{-1}(y)$ avec y un élément de F (où là cela nécessite que f soit une bijection).

Un conflit de notation semble survenir : si f est une bijection de E sur F, $f^{-1}(B)$ peut désigne l'image directe de B par f^{-1} tout comme l'image réciproque de B par f. Tout va bien en fait :

- Changeons temporairement de notation : notons $f^{\langle -1\rangle}(B)$ l'image réciproque de B par f et réservons la notation $f^{-1}(B)$ à l'image directe de B par f^{-1}, la réciproque de f.
- Soit $x \in f^{-1}(B)$. Il existe alors $y \in B$ tel que $x = f^{-1}(y)$ (par définition de l'image directe). Mais alors $f(x) = y$ et donc $f(x) \in B$. Cela signifie que $x \in f^{\langle -1\rangle}(B)$. Ainsi $f^{-1}(B) \subset f^{\langle -1\rangle}(B)$.
- Soit $x \in f^{\langle -1\rangle}(B)$. Alors $f(x) \in B$. Notons $y = f(x)$ de sorte que $y \in B$. On a $x = f^{-1}(y)$ puisque f est bijective. Puisque $y \in B$, on a bien $x \in f^{-1}(B)$. On a donc $f^{\langle -1\rangle}(B) \subset f^{-1}(B)$.
- On en déduit que $f^{\langle -1\rangle}(B) = f^{-1}(B)$.

Moralité : inutile de changer de notation dans ce cas !

4) Retour sur les changements d'indice

Dans le chapitre 7, nous avons vu trois types de changements d'indice dans une somme ou un produit qui sont licites en toute circonstance. L'idée derrière un changement d'indice en fait est de transformer (c'est-à-dire construire une application) l'ensemble des indices en un autre de sorte que que tous les termes sont sommés ou multipliés (surjectivité de l'application de changement d'indice) une seule fois (injectivité de l'application de changement d'indice). Aussi, plus généralement :

Proposition. *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de complexes indexée par un ensemble fini I. Soit φ une fonction injective sur I (et donc bijective de I sur $f(I)$) Alors :*

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k\in\varphi(I)} x_{\varphi^{-1}(k)} \qquad \text{et} \qquad \prod_{i\in I} x_i = \prod_{k\in\varphi(I)} x_{\varphi^{-1}(k)}.$$

On dit que l'on fait le changement d'indice $k = \varphi(i)$ ou $i = \varphi^{-1}(k)$.

Remarques :

- Lorsque $I = [\![p\,;n]\!]$ avec p et n des entiers relatifs tels que $p \leqslant n$, les trois changements d'indices listés dans le paragraphe I.3.b du chapitre 7 sont donnés respectivement par les bijections $i \longmapsto i+q$, $i \longmapsto i-q$ (lorsque $q \leqslant p$) et $i \longmapsto q-i$ (lorsque $q \geqslant n$).
- L'application $\varphi : i \longmapsto \frac{i}{2}$ est injective donc le changement d'indice $i = 2k$ est tout à fait licite... si ce n'est que $\varphi(I)$ n'a pas la forme usuelle (n'est pas du type $[\![a\,;b]\!]$ avec a et b des entiers). C'est pour cela que, dans le chapitre 7, nous avons bien insisté sur la nécessité, dans ce cas, de savoir que la somme ou le produit ne portent que sur les termes pairs de $[\![p\,;n]\!]$. En effet φ réalise alors bien une bijection de $I = \{i \in [\![2p\,;2n]\!] \,|\, i \text{ pair}\}$ sur $[\![p\,;n]\!]$.

Dans la pratique, il est inutile d'être si subtile : l'idée est que tous les termes soient bien présents dans la somme ou le produit après changement (surjectivité) et une seule fois (injectivité).

IV Ensembles équipotents (HP)

Les résultats de ce paragraphe sont hors-programme et sont donnés à titre culturels. Le premier sous paragraphe pourra toutefois être travaillé en première lecture car il fournit de nombreux exemples de bijections entre des ensembles. Les deux suivants seront laissés en lecture personnelle.

1) Définition et premiers exemples

Ce qui est équivalent à l'existence d'une bijection de F sur E, quitte à prendre la réciproque.

Définition. *On dit que deux ensembles E et F sont équipotents (ou sont en bijection) si il existe une bijection de E sur F.*

Proposition. *Si E et G sont équipotents et si F et G sont équipotents, alors E et F sont équipotents.*

DÉMONSTRATION. Supposons qu'il existe f bijective de E dans G et g bijective de F dans G. Alors $g^{-1} \circ f$ est bijective de E dans F. $\square$

Exemples :

- *Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ sont équipotents (via la bijection $n \in \mathbb{N} \longmapsto n+1 \in \mathbb{N}^*$).*
- *Lorsque a et b sont deux entiers tels que $a < b$, alors $[\![a\,;b]\!]$ et $[\![1\,;b-a+1]\!]$ sont équipotents (via la bijection $n \longmapsto n-a+1$).*
- *$\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont équipotents car l'application $f : x \in \mathbb{N} \longmapsto (-1)^n \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ est bijective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$. En effet :*

  Cette application envoie les entiers naturels pairs sur $\mathbb{N}$ et les entiers naturels impairs sur $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$.

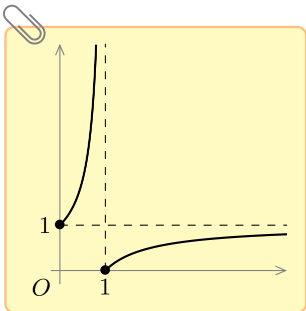
  - ⋆ *Soit n et p des entiers naturels distincts.*
    - — *Si n et p sont de parité contraire, alors $f(n)$ et $f(p)$ n'ont pas le même signe et ne sont pas nuls en même temps (on vérifie aisément que 0 admet 0 pour unique antécédent). Ainsi $f(n) \neq f(p)$.*
    - — *Si n et p sont pairs, alors $f(n) = \frac{n}{2} \neq \frac{p}{2} = f(p)$.*
    - — *Si n et p sont impairs, alors $f(n) = -\frac{n+1}{2} \neq -\frac{p+1}{2} = f(p)$.*

    On en déduit que f est injective sur $\mathbb{N}$.
  - ⋆ *Si $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$, alors $-1-2n \in \mathbb{N}$ et $f(-1-2n) = -\left\lfloor \frac{-1-2n+1}{2} \right\rfloor = n$.*
    Si $n \in \mathbb{N}$, alors $2n \in \mathbb{N}$ et $f(2n) = \left\lfloor \frac{2n+1}{2} \right\rfloor = n$.
    Ainsi tout entier admet un antécédent par f. Cela signifie que f est surjective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.
- *$\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$ sont équipotents car l'application $f : (p,q) \in \mathbb{N}^2 \longmapsto 2^p(2q+1)-1$ est une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$. En effet :*
  - ⋆ *Déjà, si $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $2^p \in \mathbb{N}^*$ et $2q+1 \in \mathbb{N}^*$ donc $2^p(2q+1) \in \mathbb{N}^*$ et donc $f((p,q)) \in \mathbb{N}$.*
  - ⋆ *Soit (p,q) et (p',q') dans $\mathbb{N}^2$ tel que $f((p,q)) = f((p',q'))$. On a alors $2^p(2q+1) = 2^{p'}(2q'+1)$. Quitte à échanger les deux couples, supposons que $p \geqslant p'$. On a alors $2^{p-p'}(2q+1) = (2q'+1)$. Puisque $2q'+1$ est impair, on a $p-p' = 0$ donc $p = p'$ et donc $q = q'$. Finalement $(p,q) = (p',q')$. Ainsi f est injective sur $\mathbb{N}^2$.*
  - ⋆ *Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $m = n+1 \in \mathbb{N}^*$. Notons $p = v_2(m)$ de sorte que $m = 2^p \times d$ avec d un produit de nombres premiers premiers avec 2 (il s'agit de la décomposition première de m). L'entier naturel d est alors impair donc il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $d = 2q+1$. Ainsi $m = 2^p(2q+1) = f((p,q))+1$ et donc $n = f((p,q))$. Ainsi f est surjective de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.*
- *Soit a et b des réels tels que $a < b$. L'application $t \longmapsto (b-a)t + a$ est une bijection de $[0\,;1]$ sur $[a\,;b]$. Ainsi tout segment non réduit à un point est équipotent à $[0\,;1]$. Compte-tenu de la proposition précédente, cela montre que deux segments quelconques de $\mathbb{R}$ non réduits à un point de $\mathbb{R}$ sont équipotents.*

  Grand classique : pour transformer $[0\,;1]$ (segment de longueur 1 qui commence à 0) en $[a\,;b]$ (segment de longueur $b-a$ qui commence à a), on le contracte/dilate d'un facteur $b-a$ et on le translate de a.
- *$\mathbb{R}$ est en bijection avec tout intervalle ouvert non vide et non réduit à un point. Montrons-le :*
  - ⋆ *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ est équipotent à $]a\,;+\infty[$ (via la bijection $x \longmapsto a + \mathrm{e}^x$) et équipotent à $]-\infty\,;a[$ (via la bijection $x \longmapsto a - \mathrm{e}^x$).*

⋆ *Les ensembles* $\mathbb{R}$ *et* $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ *sont équipotents (via la bijection* Arctan*). Si* a *et* b *sont deux réels tels que* $a < b$*, alors* $x \longmapsto \frac{(b-a)x}{\pi} + \frac{a+b}{2}$ *est une bijection de* $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ *sur* $]a\,;b[$*. Ainsi* $\mathbb{R}$ *et* $]a\,;b[$ *sont équipotents.*

- $]0\,;1]$ *et* $\mathbb{R}_+$ *sont en bijection (via la bijection* $x \longmapsto -1+\frac{1}{x}$*). Et on peut construire facilement des bijections entre deux intervalles semi-ouverts avec la fonction inverse et des fonctions affines.* ⇝ Démonstration laissée en exercice.



- *L'application*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{1-x} & \text{si } \; x \in [0\,;1[\\ 1-\frac{1}{x} & \text{si } \; x \in]1\,;+\infty[\end{array} \right. \end{array} \right.$$

est une bijection de $\mathbb{R}_+$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$. ⇝ Démonstration laissée en exercice.

Puisque $\mathbb{R}$ *est équipotent à* $\mathbb{R}_+^*$ *(via la bijection* $\exp$*) et que tout intervalle semi-ouvert est équipotent à* $\mathbb{R}_+$*, il vient que* $\mathbb{R}$ *est équipotent à tout intervalle semi-ouvert.*

- *L'application*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0\,;1] & \longrightarrow &]0\,;1[\\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2} & \text{si } \; x = 0 \\ \frac{1}{n+2} & \text{si } \; \exists n \in \mathbb{N},\; x = \frac{1}{n} \\ x & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est une bijection de $[0\,;1]$ *sur* $]0\,;1[$. ⇝ Démonstration laissée en exercice.

En mettant bout à bout les conclusions de tous les derniers exemples, cela montre que $\mathbb{R}$ *est équipotent à tout intervalle non vide et non réduit à un point.*

Remarques :

- Dire que deux ensembles sont équipotents signifie que l'on peut faire correspondre à tout élément de E un et un seul élément de F (via une bijection de E sur F) et vice versa. Cela revient à dire que E et F ont le même nombre d'éléments.

  ⚠ Mais qu'est ce que « nombre d'éléments » veut dire ?

  ⋆ Si E et F sont finis, cela se comprend bien et on le voit bien sur les diagrammes sagittaux en reliant les éléments de E à ceux de F par des flèches. Le paragraphe suivant est consacré à rendre tout cela rigoureux.

  ⋆ Lorsque E et F sont infinis, cela peut sembler étrange et même paradoxal compte tenu des exemples vus plus haut. Comment $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ peuvent-ils avoir le même nombre d'éléments alors que $\mathbb{N}$ est strictement inclus dans $\mathbb{Z}$? Comment $\mathbb{R}$ et $]0\,;1[$ peuvent-ils avoir le même nombre d'éléments alors que $]0\,;1[$ est strictement inclus dans $\mathbb{R}$? Cela peut heurter l'intuition mais il n'y a rien de paradoxal. Notre cerveau est simplement très mal à l'aise avec l'infini. Et vous n'êtes pas au bout de vos surprises..

Pour essayer de comprendre, par exemple, pourquoi les intervalles $]0\,;1[$ et $]0\,;2[$ sont en bijection (alors que le premier est strictement inclus dans le second), il suffit de se convaincre que le premier n'est qu'une version contracté du second (via la bijection $x \mapsto \frac{x}{2}$).

- L'existence d'une injection $f : E \longrightarrow F$ entraîne qu'il y a une bijection de E sur $f(E)$. Autrement dit E et $f(E)$ ont le même nombre d'éléments et donc F est (au moins) plus gros que E. L'existence d'une surjection $f : E \longrightarrow F$ signifie au contraire que c'est E qui a plus d'éléments que F puisqu'on peut associer à tout élément de F un ou plusieurs éléments de E.

- Prouver qu'il existe une injection de E dans F mais qu'il n'existe pas de surjection de E sur F signifie que F est vraiment plus gros que E (pas en terme d'inclusion mais en terme de nombre d'éléments).

2) Ensembles finis

Mais qui seront alors admis, conformément au programme.

L'objectif de ce paragraphe est aussi d'apporter des démonstrations à des concepts (très) intuitifs de combinatoire que l'on verra dans le chapitre 30. Notamment nous allons définir (enfin) correctement ce qu'est un ensemble fini et son cardinal.

a) Préliminaires

Lemme. *Soit $p \geqslant 2$. Soit $c \in [\![1\,;p]\!]$. Alors il existe une bijection de $[\![1\,;p]\!]\backslash\{c\}$ sur $[\![1\,;p-1]\!]$.*

Démonstration. L'application « tassement » $f : [\![1\,;p]\!]\backslash\{c\} \longmapsto [\![1\,;p-1]\!]$ définie par :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si} \quad x \leqslant c-1 \\ x-1 & \text{si} \quad x \geqslant c+1 \end{cases}$$

convient. En effet :

- Soient $x_1 \neq x_2$ dans $[\![1\,;p]\!]\backslash\{c\}$. Si x_1 et x_2 sont tous les deux inférieurs ou égaux à $c-1$ alors $f(x_1) = x_1 \neq x_2 = f(x_2)$. De même si x_1 et x_2 sont tous les deux supérieurs ou égaux à $c+1$. Enfin, si $x_1 \leqslant c-1$ et $x_2 \geqslant c+1$ alors $f(x_1) = x_1 \leqslant c-1$ et $f(x_2) = x_2 - 1 \geqslant c$ donc $f(x_1) \neq f(x_1)$: f est injective.
- Soit $y \in [\![1\,;p-1]\!]$. Si $y \leqslant c-1$ alors $f(y) = y$ donc y est un antécédent de y. Si $y \geqslant c$ alors $y = f(y+1)$ donc $y+1$ est un antécédent de y. Dans tous les cas, y admet un antécédent par f : f est surjective. □

La réciproque étant immédiate (prendre l'injection canonique, cf. paragraphe III.1.a), c'est donc une équivalence.

Proposition. *Soient n et p deux entiers naturels non nuls. S'il existe une injection de $[\![1\,;n]\!]$ dans $[\![1\,;p]\!]$ alors $n \leqslant p$.*

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur n.

- Pour tout $n \geqslant 1$, notons H_n : « Pour tout $p \geqslant 1$, s'il existe une injection de $[\![1\,;n]\!]$ dans $[\![1\,;p]\!]$, alors $n \leqslant p$ ».
- Il n'y a rien à prouver pour $n = 1$ puisqu'on prend $p \geqslant 1$: H_1 est vraie.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Soit $p \geqslant 1$ et supposons qu'il existe une injection de $[\![1\,;n+1]\!]$ dans $[\![1\,;p]\!]$. Notons $c = f(n+1)$ et g la restriction de f à $[\![1\,;n]\!]$. Alors g est encore injective de $[\![1\,;n]\!]$ dans $[\![1\,;p]\!]\backslash\{c\}$. Soit h une bijection de $[\![1\,;p]\!]\backslash\{c\}$ sur $[\![1\,;p-1]\!]$ (qui existe d'après le lemme précédent). Alors $h \circ g$ est une injection (car composée d'injections) de $[\![1\,;n]\!]$ dans $[\![1\,;p-1]\!]$. Par hypothèse de récurrence, $n \leqslant p-1$ donc $n+1 \leqslant p$: H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$. □

S'il existe une surjection de $[\![1\,;n]\!]$ dans $[\![1\,;p]\!]$, alors $n \geqslant p$. Nous le montrerons dans un cas plus général dans la paragraphe IV.2.e.

Là aussi, en prenant l'identité, la réciproque est immédiate.

Corollaire. *Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. S'il existe une bijection de $[\![1\,;n]\!]$ sur $[\![1\,;p]\!]$ alors $n = p$.*

Démonstration. L'image d'un ensemble non vide étant non vide, il n'existe pas de bijection entre un ensemble vide et un ensemble non vide. Dès lors, s'il existe une bijection entre $[\![1\,;n]\!]$ et $[\![1\,;p]\!]$ avec $n = 0$ ou $p = 0$, l'autre est obligatoirement nul donc $n = p = 0$. Supposons à présent qu'il existe une bijection f de $[\![1\,;n]\!]$ sur $[\![1\,;p]\!]$ avec n et p non nuls. Alors f est injective et surjective donc $n \leqslant p$ et $n \geqslant p$ donc $n = p$. □

Même résultat pour une surjection. Nous le montrerons dans un cas plus général dans la paragraphe IV.2.e.

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors une injection de $[\![1\,;n]\!]$ dans lui-même est une bijection.*

Démonstration. Là aussi, raisonnons par récurrence.

- Pour tout $n \geqslant 1$, notons H_n : « une injection de $[\![1\,;n]\!]$ dans lui-même est une bijection ».
- La seule application de $\{1\}$ dans lui-même est l'identité qui est injective et bijective donc H_1 est vraie.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Considérons $f : [\![1\,;n+1]\!] \longrightarrow [\![1\,;n+1]\!]$ injective. Notons $c = f(n+1)$ et g la restriction de f à $[\![1\,;n]\!]$. Alors g est encore injective de $[\![1\,;n]\!]$ dans $[\![1\,;n+1]\!]\backslash\{c\}$. Soit h une bijection de $[\![1\,;n+1]\!]\backslash\{c\}$ sur $[\![1\,;n]\!]$ (qui existe d'après le lemme ci-dessus avec $p = n+1$). Alors $h \circ g$ est une injection (car composée d'injections) de $[\![1\,;n]\!]$ dans $[\![1\,;n]\!]$. Par hypothèse de récurrence, $h \circ g$ est bijective. En composant par h^{-1} qui est une bijection de $[\![1\,;n]\!]$ sur $[\![1\,;n+1]\!]\backslash\{c\}$, par composition, $g = h^{-1} \circ (h \circ g)$ est une bijection de $[\![1\,;n]\!]$ sur $[\![1\,;n+1]\!]\backslash\{c\}$ donc est surjective : pour tout $y \in [\![1\,;n+1]\!]\backslash\{c\}$, il existe $x \in [\![1\,;n]\!]$ tel que $y = g(x) = f(x)$ puisque g est la restriction de f à $[\![1\,;n]\!]$. En d'autres termes, tout élément de $[\![1\,;n+1]\!]\backslash\{c\}$ admet un antécédent par f, et puisque $c = f(n+1)$, c a aussi un antécédent par f : f est surjective donc bijective, c'est-à-dire que H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$. □

b) Ensembles finis et cardinal

Définition. *Soit E un ensemble. On dit qu'il est fini s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que E et $[\![1\,;n]\!]$ sont équipotents. Si ce n'est pas le cas, E est dit infini.*

Proposition/Définition. *Soit E un ensemble fini. L'entier n tel que E soit en bijection avec $[\![1\,;n]\!]$ est unique et est appelé cardinal de E. On le note $\operatorname{card}(E)$, $|E|$ ou $\#E$.*

Démonstration. Soient n et p tels que E soit en bijection avec $[\![1\,;n]\!]$ et $[\![1\,;p]\!]$. Il existe des bijections $f : [\![1\,;n]\!] \longrightarrow E$ et $g : [\![1\,;p]\!] \longrightarrow E$. Alors $g^{-1} \circ f$ est bijective de $[\![1\,;n]\!]$ sur $[\![1\,;p]\!]$ et donc $n = p$ d'après le paragraphe précédent. □

Remarque : L'ensemble vide est fini car il est en bijection avec $[\![1\,;0]\!] = \varnothing$. Il est donc de cardinal 0.

Théorème. *Deux ensembles finis sont équipotents si et seulement si ils ont le même cardinal.*

Démonstration. Soient E et F deux ensembles finis. Notons $n = \operatorname{card}(E)$ et $p = \operatorname{card}(F)$. Il existe alors une bijection f de $[\![1\,;n]\!]$ sur E et une bijection de $[\![1\,;p]\!]$ sur F.

- Si E et F sont équipotent, et si φ désigne une bijection de E sur F, alors $\varphi \circ f$ est une bijection de $[\![1\,;n]\!]$ sur F donc n est le cardinal de F : $n = p$.
- Si $n = p$, alors $g \circ f^{-1}$ est une bijection de E sur F donc E et F sont équipotents. □

c) Parties finies de $\mathbb{N}$

Théorème. *Une partie non vide de $\mathbb{N}$ est finie si et seulement si elle est majorée.*

La preuve du sens directe est la même si on remplace $\mathbb{N}$ par $\mathbb{R}$: une partie finie et non vide de $\mathbb{R}$ est majorée (on l'a évoqué sans preuve dans le chapitre 3). La réciproque est fausse bien sûr (pensez aux segments).

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur le cardinal de la partie majorée.

- Pour tout $n \geqslant 1$, notons H_n : « toute partie de $\mathbb{N}$ de cardinal n est majorée ».
- Soit A une partie de $\mathbb{N}$ de cardinal 1 i.e. A est en bijection avec $\{1\}$. Soit $f : A \longrightarrow \{1\}$ une bijection. Alors f^{-1} est une bijection de $\{1\}$ sur A c'est-à-dire que $A = \{f^{-1}(1)\}$: A est bien majorée, H_1 est vraie.

- Soit $n \geqslant 1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Soit donc A une partie de $\mathbb{N}$ de cardinal $n+1$: soit $f : A \longrightarrow [\![1\,;n+1]\!]$ une bijection, si bien que $A = \{f^{-1}(1);\ldots;f^{-1}(n+1)\}$. La partie $B = \{f^{-1}(1);\ldots;f^{-1}(n)\}$ est de cardinal n donc, par hypothèse, B est majorée : soit M un majorant de B. Alors $\max\{M;f^{-1}(n+1)\}$ est un majorant de A : A est majorée. Ainsi H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Finalement, toute partie finie de $\mathbb{N}$ est majorée. Montrons la réciproque, c'est-à-dire que toute partie majorée de $\mathbb{N}$ est finie. Puisqu'une partie majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément, il suffit de prouver par récurrence que, pour tout p, toute partie de plus grand élément p est finie. Raisonnons par récurrence forte.

- Si $p \geqslant 1$, notons H_p : « toute partie non vide de $\mathbb{N}$ de plus grand élément p est finie ».
- Si A est de plus grand élément 0 alors $A = \{0\}$ qui est finie car en bijection avec $\{1\} = [\![1\,;1]\!]$: H_0 est vraie.
- Soit $p \geqslant 0$. Supposons $H_0,\ldots,H_p$ vraies et prouvons que H_{p+1} est vraie. Soit donc A une partie non vide de $\mathbb{N}$ de plus grand élément $p+1$. Soit $B = A\backslash\{p+1\}$. Si B est vide, alors $A = \{p+1\}$ donc est fini car en bijection avec $\{1\}$. Si B est non vide, alors B admet un plus grand élément inférieur ou égal à p : par hypothèse de récurrence, B est fini i.e. il existe n et f tel que f soit une bijection de B sur $\mathbb{N}$. On pose $f(p+1) = n+1$. Il est alors facile de prouver que f est une bijection de A sur $[\![1\,;n+1]\!]$ donc A est finie. Ainsi H_{p+1} est vraie.

Corollaire. *Toute partie B d'une partie finie A de $\mathbb{N}$ est finie.*

Démonstration. On a $B \subset A$ et A est finie donc majorée donc B est majorée donc finie. $\square$

Corollaire. *Une intersection de parties finies de $\mathbb{N}$ est une partie finie de $\mathbb{N}$.*

Corollaire. *L'union de deux parties finies de $\mathbb{N}$ est une partie finie de $\mathbb{N}$.*

Démonstration. Si A et B sont deux parties finies de $\mathbb{N}$, alors elles sont majorées, disons par a et b. Alors $A \cup B$ est majorée par $\max\{a;b\}$ donc est finie. $\square$

Corollaire. *Le complémentaire d'une partie finie de $\mathbb{N}$ est infini.*

Démonstration. Soit A une partie finie de $\mathbb{N}$. Si $\overline{A}$ est fini, alors $N = A \cup \overline{A}$ est fini car union de deux parties finies de $\mathbb{N}$ ce qui est absurde car $\mathbb{N}$ est infini car non majoré.

d) Cardinal d'une partie, d'une union, d'un produit cartésien

Théorème. *Soit E un ensemble fini et soit A une partie de E. Alors A est un ensemble fini, et $\operatorname{card}(A) \leqslant \operatorname{card}(E)$, avec égalité si et seulement si $A = E$.*

Démonstration. Si A est vide, alors A est finie. Supposons A non vide. Notons $n = \operatorname{card}(E)$ et $g : E \longrightarrow [\![1\,;n]\!]$ une bijection. Alors la restriction de g à A est injective et est une surjection sur $g(A)$ qui est une partie de $[\![1\,;n]\!]$ donc qui est un ensemble fini (voir le premier corollaire ci-dessus). On en déduit que g est une bijection de A sur $g(A)$ et qu'il existe p tel que $g(A)$ soit en bijection avec $[\![1\,;p]\!]$. Par transitivité, A est en bijection avec $[\![1\,;p]\!]$ donc A est finie et de cardinal p.

Puisque A est incluse dans E, il existe une injection de A dans E (l'injection canonique $x \longmapsto x$ que l'on note i). Il existe également une bijection h de $[\![1\,;p]\!]$ dans A et rappelons qu'il existe une bijection g de E dans $[\![1\,;n]\!]$ si bien qu'on a la succession d'applications injectives suivantes :

$$[\![1\,;p]\!] \xrightarrow{h} A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{g} [\![1\,;n]\!] \qquad \square$$

Par composition, $g \circ i \circ h$ est une injection de $[\![1\,;p]\!]$ dans $[\![1\,;n]\!]$ donc $p \leqslant n$ si bien que $\operatorname{card}(A) \leqslant \operatorname{card}(E)$. Si $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(E)$ alors $p = n$ donc $g \circ i \circ h$ est une injection de $[\![1\,;n]\!]$ dans lui-même donc est une bijection. En composant à gauche par h^{-1} et à droite par g^{-1}, $i = h^{-1} \circ (h \circ i \circ g) \circ g^{-1}$ est une bijection car composée de bijections. En particulier, $i(A) = E$. Or, $i(A) = A$ donc $A = E$. La réciproque est immédiate.

On généralise à une union finie quelconque par récurrence.

Théorème. *Soient A et B deux ensembles finis disjoints. Alors $A \cup B$ est fini et*

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B).$$

Démonstration. Notons $n = \operatorname{card}(A)$ et $p = \operatorname{card}(B)$. Il existe alors une bijection f de A sur $[\![1\,;n]\!]$ et une bijection g de B sur $[\![1\,;p]\!]$. Introduisons la fonction h définie sur $A \cup B$ par :

$$h : x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) + n & \text{si } x \in B \end{cases}$$

Tout d'abord, h est bien définie car A et B sont disjoints : il n'y a pas de problème de définition. De plus, f étant à valeurs dans $[\![1\,;n]\!]$ et g dans $[\![1\,;p]\!]$, h est à valeurs dans $[\![1\,;n+p]\!]$. On montre aisément que h est une bijection entre $A \cup B$ et $[\![1\,;n+p]\!]$ (je vous laisse le faire en exercice) ce qui permet de conclure : $A \cup B$ est fini de cardinal $n + p = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B)$. $\square$

Théorème. *Soient E et F deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est fini et*

$$\operatorname{card}(E \times F) = \operatorname{card}(E) \times \operatorname{card}(F).$$

Démonstration. Notons $E = \{x_1; \dots; x_n\}$ (c'est-à-dire que E est de cardinal n). Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, la fonction

$$f_i : \left\{ \begin{array}{ccc} \{x_i\} \times F & \longrightarrow & F \\ (x_i, y) & \longmapsto & y \end{array} \right.$$

est une bijection (je vous laisse le faire en exercice) donc $\operatorname{card}(\{x_i\} \times F) = \operatorname{card}(F)$. Finalement, $E \times F$ est l'union disjointe des $\{x_i\} \times F$ donc

$$\begin{aligned} \operatorname{card}(E \times F) &= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{card}(\{x_i\} \times F) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{card}(F) \\ &= n \operatorname{card}(F), \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\operatorname{card}(E \times F) = \operatorname{card}(E) \times \operatorname{card}(F)$. $\square$

e) Applications entre ensembles finis

Théorème. *Soient E et F deux ensembles finis.*

- *Il existe une injection $f : E \longrightarrow F$ si et seulement si $\operatorname{card}(E) \leqslant \operatorname{card}(F)$.*
- *Il existe une surjection $f : E \longrightarrow F$ si et seulement si $\operatorname{card}(E) \geqslant \operatorname{card}(F)$.*
- *Il existe une bijection $f : E \longrightarrow F$ si et seulement si $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(F)$.*

DÉMONSTRATION. Notons $n = \mathrm{card}(E)$ et $p = \mathrm{card}(F)$. Soient $f : E \longrightarrow [\![1\,;n]\!]$ et $g : F \longrightarrow [\![1\,;p]\!]$ bijectives.

- Supposons que $\mathrm{card}(E) \leqslant \mathrm{card}(F)$. Alors l'injection canonique $i : x \in [\![1\,;n]\!] \longmapsto x \in [\![1\,;p]\!]$ est injective, et $g^{-1} \circ i \circ f$ est une injection (car composée d'injections) de E dans F. Réciproquement, supposons qu'il existe une injection φ de E dans F. Alors $g \circ \varphi \circ f^{-1}$ est une injection de $[\![1\,;n]\!]$ dans $[\![1\,;p]\!]$ donc $n \leqslant p$ i.e. $\mathrm{card}(E) \leqslant \mathrm{card}(F)$.
- Supposons que $\mathrm{card}(E) \geqslant \mathrm{card}(F)$, c'est-à-dire $n \geqslant p$. Définissons

$$s : \left\{ \begin{array}{ccc} [\![1\,;n]\!] & \longrightarrow & [\![1\,;p]\!] \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{lll} x & \text{si} & x \in [\![1\,;p]\!] \\ 1 & \text{si} & x \in [\![p+1\,;n]\!] \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Il n'y a pas ce deuxième cas si $n = p$.

On vérifie que s est une surjection de $[\![1\,;n]\!]$ sur $[\![1\,;p]\!]$. Alors $g^{-1} \circ s \circ f$ est une surjection (car composée de surjections) de E dans F.

Réciproquement, supposons qu'il existe une surjection φ de E dans F. Alors $\psi = g \circ \varphi \circ f^{-1}$ est une surjection de $[\![1\,;n]\!]$ dans $[\![1\,;p]\!]$. Définissons l'application h qui à tout $y \in [\![1\,;p]\!]$ associe le plus petit antécédent de y par ψ (on sait qu'il y en a un puisque ψ surjective). Pour tout $(y_1, y_2) \in [\![1\,;p]\!]^2$ tel que $h(y_1) = h(y_2)$, alors y_1 et y_2 ont le même antécédent par ψ donc, si on le note x, $y_1 = \psi(x) = y_2$ dont h est injective de $[\![1\,;p]\!]$ dans $[\![1\,;n]\!]$ et donc $p \leqslant n$.

- Le troisième cas a déjà été montré dans le paragraphe IV.2.b. □

C'est donc en particulier le cas si $E = F$.

Théorème. *Soient E et F deux ensembles **finis de mêmes cardinaux** et soit $f : E \longrightarrow F$. Alors f est injective si et seulement si f est surjective si et seulement si f est bijective.*

DÉMONSTRATION. Supposons f injective. Alors f est une bijection de E sur $f(E)$ (une injection est une bijection sur son image) donc $\mathrm{card}(f(E)) = \mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(F)$. Comme $f(E) \subset F$; il vient que $f(E) = F$ et donc f est surjective et donc bijective.
Supposons f surjective. Si f n'est pas injective, alors il existe $x_1 \neq x_2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. Dès lors, $F = f(E) = f(E \backslash \{x_1\})$ si bien que f est une surjection de $E \backslash \{x_1\}$ sur F donc $\mathrm{card}(F) \leqslant \mathrm{card}(E \backslash \{x_1\}) = \mathrm{card}(E) - 1$ ce qui est absurde. □

3) Des infinis de plus en plus gros

Avant d'aller plus loin, énonçons un théorème important (en l'admettant car la preuve est très technique même si elle est accessible) :

Théorème (de Cantor-Bernstein – HP). *S'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E, alors E et F sont équipotents.*

On a vu dans la paragraphe IV.1, et c'est surprenant, que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^2$ sont équipotents. On introduit alors la définition suivante (on en reparlera surtout dans le chapitre 39 et en deuxième année) :

On peut montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^p$ est dénombrable.

Définition. *Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.*

Lorsqu'un ensemble E est dénombrable, cela signifie que l'on peut numéroter ces éléments : $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots\}$. Dit autrement, il y a un premier élément de E, un deuxième, un troisième, etc.

C'est une autre façon de dire qu'il y a une bijection $i \mapsto x_i$ de $\mathbb{N}^*$ (car $\mathbb{N}^*$ est encore équipotent à E) sur E.

Essayons de construire un ensemble vraiment plus gros. Par exemple $\mathbb{Q}$... perdu ! Il se trouve que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{N}$ sont encore équipotents. En effet :

- Pour tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$, il existe un unique couple $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $p \wedge q = 1$ et $r = \frac{p}{q}$. L'application φ qui à $r \in \mathbb{Q}$ associe le couple (p,q) en question est donc bien définie et injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.
- Notons f une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$ (on a vu dans le paragraphe IV.1 que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$ sont équipotents). On montre aisément que $\psi : (p,q) \longmapsto (f(p), q+1)$ est une bijection de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^2$.
- Enfin notons η une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$ (on a vu dans le paragraphe IV.1 que $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$ sont équipotents). On en déduit que $\eta \circ \psi \circ \varphi$ est une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$.
- Puisque $n \in \mathbb{N} \longmapsto n \in \mathbb{Q}$ est une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$, le théorème de Bernstein permet de conclure.

La démonstration ci-contre est appelée « argument de la diagonale de Cantor ». Il en existe plusieurs variantes. Ici, par exemple, supposons que

$$x_1 = 0,\mathbf{5}11789078...$$
$$x_2 = 0,7\mathbf{8}5612837...$$
$$x_3 = 0,67\mathbf{3}936935...$$
$$x_4 = 0,387\mathbf{5}39513...$$
$$x_5 = 0,4230\mathbf{0}5132...$$
$$x_6 = 0,67629\mathbf{7}980...$$
$$x_7 = 0,583270\mathbf{1}63...$$

etc. Alors $y = 0,7557555...$

Essayons avec $\mathbb{R}$. Cette fois c'est bon : $\mathbb{R}$ n'est pas équipotent avec $\mathbb{N}$. En effet :

- Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents. Alors $\mathbb{N}$ et $[0\,;1[$ sont équipotents (cf. exemples du paragraphe IV.1).
- Cela signifie que l'on peut numéroter les éléments de $[0\,;1[$: il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $[0\,;1[= \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n admet une écriture décimale sous la forme $0, x_{n,1}x_{n,2}x_{n,3}x_{n,4}\ldots$ (éventuellement une infinité de zéros à partir d'un certain rang si x_n est décimal).
- On construit alors le réel y de $[0\,;1[$ de la façon suivante : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le $k^{\text{ième}}$ chiffre après la virgule de y est 5 si $x_{k,k} \neq 5$ et 7 si $x_{k,k} = 5$.
- Ce nombre y ne peut pas appartenir à $[0\,;1[$ car, sinon, il existerait $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $y = x_p$. Mais, par construction, la $p^{\text{ième}}$ décimale de y n'est pas égale à celle de x_p. C'est absurde !

En fait on peut construire des ensembles infinis avec de plus en plus d'éléments en vertu du théorème suivant :

Théorème (de Cantor – HP). *Quel que soit l'ensemble E, il n'existe pas de surjection de E sur $\mathscr{P}(E)$.*

Démonstration. Soit f une application de E dans $\mathscr{P}(E)$. Considérons la partie $A = \{x \in E \,|\, x \notin f(x)\}$ et montrons qu'elle n'admet pas d'antécédent par f.

- Si $x \in A$, alors $x \notin f(x)$ et donc $f(x) \neq A$.
- Si $x \notin A$, alors $x \in f(x)$ et donc $f(x) \neq A$.

Par conséquent f n'est pas surjective. $\square$

Puisque $x \longmapsto \{x\}$ est une injection de E dans $\mathscr{P}(E)$, ce théorème assure que $\mathscr{P}(E)$ est vraiment plus gros que E.

De tels énoncés sont dits « indécidables » : il est impossible de montrer s'ils sont vrais ou faux.

Dès lors $\mathbb{N}$, $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$, $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N})))$, etc. forment une suite d'ensembles infinis de plus en plus gros. On peut montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ sont équipotents. En revanche il a été démontré que l'on ne peut pas montrer (avec le cadre axiomatique traditionnel des mathématiques) qu'il y a pas de taille d'infini intermédiaire entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ (c'est l'hypothèse du continu)... mais là ça commence à être vraiment très difficile.