Chapitre 30

Espaces vectoriels de dimension finie

Dans ce chapitre, on se donne E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Dimension d'un espace vectoriel

1) Notion d'espace vectoriel de dimension finie

L'espace vectoriel $E = \{0\}$ est de dimension finie (il est engendré par $\varnothing$).

Définition (espace vectoriel de dimension finie). *On dit que E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie. Si ce n'est pas le cas, on dit que E est de dimension infinie.*

Exemples :

- *Nous avons vu dans le chapitre 28 que chacun des espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (avec n et p dans $\mathbb{N}^*$) admet une famille génératrice finie (leurs bases canoniques respectives). Il s'agit donc d'espaces vectoriels de dimension finie.*
- *En revanche $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie. Pour le montrer, raisonnons par l'absurde : supposons que $\mathbb{K}[X]$ admette une famille génératrice finie $(P_1, \dots, P_n)$. Notons $d = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \big(\deg(P_i)\big)$. Il existe alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que*

$$X^{d+1} = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n.$$

On a donc $X^{d+1} \notin \mathbb{K}_d[X]$, ce qui est absurde.

$\mathbb{K}[X]$ est l'exemple le plus simple d'espace de dimension infinie : y penser quand on demande un contre-exemple en dimension infinie !

2) Existence de bases en dimension finie

Par abus de langage, si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille de vecteurs de E, on l'assimilera parfois à la partie de E : $\{x_1; \dots; x_n\}$. Ainsi, on s'autorisera à parler d'appartenance, d'inclusion, d'union et d'intersection de familles.

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre (respectivement génératrice), on dit que $\{x_1; \dots; x_n\}$ est une partie libre (respectivement génératrice). Ainsi, dans la suite, on confondra familles libres et parties libres.

Théorème (existence de bases en dimension finie). *Supposons que E soit de dimension finie. Soient $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E et $\mathscr{L}$ une famille libre de E telle que $\mathscr{L} \subset \mathscr{G}$. Alors il existe une base $\mathscr{B}$ (nécessairement finie) telle que $\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{G}$. En particulier, tout espace vectoriel de dimension finie admet au moins une base.*

En d'autres termes, A est l'ensemble de tous les cardinaux des familles libres de E contenant $\mathscr{L}$ et contenues dans $\mathscr{G}$. En particulier, A est une partie de $\mathbb{N}$.

Démonstration.

□

Voici quelques conséquences immédiates de ce théorème :

La différence avec le théorème d'existence des bases est qu'on ne suppose plus que $\mathscr{L}$ est incluse dans $\mathscr{G}$.

Théorème (théorème de la base incomplète). *Supposons que E soit de dimension finie. Alors toute famille libre de E peut être complétée en base de E (par des vecteurs d'une famille génératrice quelconque).*

Démonstration.

Théorème (théorème de la base extraite). *Supposons que E soit de dimension finie. Alors de toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E.*

Démonstration.

□

3) Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

a) Le théorème de l'échange

On a vu dans le chapitre 28 que, si A est une partie non vide de E et $x \in A$, alors $\mathrm{Vect}(A)$ est invariant si l'on remplace x par une combinaison linéaire de vecteurs de A dans laquelle le coefficient devant x est non nul. Si on reformule cette propriété en terme de famille génératrice finie, on obtient le lemme suivant :

Autre façon de montrer ce lemme : on peut ajouter b à la famille génératrice et elle reste alors génératrice. Ensuite le fait que $\alpha \neq 0$ permet de diviser par α dans la combinaison linéaire et d'exprimer à son tour a comme une combinaison linéaire de $b, v_1, \ldots, v_k$. Cela fait de a un vecteur superflu et on peut l'enlever de la famille génératrice.

Lemme. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a, v_1, \ldots, v_k)$ une famille génératrice de E. Soient $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_k$ des scalaires tels que $\alpha \neq 0$. Si $b = \alpha a + \sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i$, alors $(b, v_1, \ldots, v_k)$ est génératrice de E.*

Théorème (de l'échange). *Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $\mathscr{L} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille libre de vecteurs E et $\mathscr{G} = (y_1, \ldots, y_n)$ une famille génératrice de E. Alors $p \leqslant n$ et on peut remplacer p des vecteurs de la famille $\mathscr{G}$ par les p vecteurs de la famille $\mathscr{L}$ pour obtenir une nouvelle famille génératrice de E.*

Démonstration.

□

Proposition. *Si E est engendré par n vecteurs, alors toute famille formée d'au moins $n+1$ vecteurs est liée.*

Démonstration.

□

Exemples :

-
- *Soit $n \geqslant 1$. Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède un polynôme annulateur. En effet :*

On peut montrer facilement (cf. un exercice de la feuille de TD associée) qu'il existe même un polynôme annulateur de A de degré au plus $n^2 - 1$. Le théorème de Caylay-Hamilton (cf. deuxième année) assure même qu'il en existe un de degré au plus n... mais c'est plus difficile à montrer.

Corollaire. *Si, pour tout $n \geqslant 1$, E admet une famille libre à n éléments, alors E est de dimension infinie.*

Démonstration. Si E est de dimension finie, il admet une famille génératrice finie. Si n désigne le cardinal de cette famille génératrice, alors E n'admet pas de famille libre à $n+1$ éléments, ce qui est absurde. □

Un espace vectoriel est donc de dimension infinie quand il admet des familles libres de cardinal arbitrairement grand. La réciproque est vraie : si E est de dimension infinie, alors, pour tout $n \geqslant 1$, E admet une famille libre de cardinal n. Montrons-le par récurrence : supposons E de dimension infinie. L'initialisation est triviale. Pour l'hérédité : soit $n \geqslant 1$ et supposons que E contienne...

Exemples :

- *$\mathbb{K}^{\mathbb{R}}$ est de dimension infinie car (cf. chapitre 28), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $x \longmapsto e^x, \dots, x \longmapsto e^{nx}$ forment une famille libre. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}^{\mathbb{R}}$ admet une famille libre à n éléments donc est de dimension infinie.*
- *Ces fonctions appartenant également (entre autres) à $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, $\mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, $\dots$, $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. Tous ces espaces contiennent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une famille libre à $n+1$ éléments donc sont de dimension infinie.*
- *$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est de dimension finie. En effet :*

b) Notion de dimension

Proposition/Définition (dimension d'un espace vectoriel). *Si E est de dimension finie, alors toutes les bases de E admettent le même nombre de vecteurs. Ce nombre est appelé la dimension de E et noté $\dim(E)$.*

Démonstration.

□

S'il y a confusion sur le corps $\mathbb{K}$, on notera plutôt $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ au lieu de $\dim(E)$.

Par exemple

- $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2) = 2$ *puisque* $\big((1,0),(0,1)\big)$ *est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^2$.*
- $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^2) = 4$ *puisque* $\big((1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\big)$ *est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^2$.*

Plus généralement, si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, alors il peut être vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et on a $\dim_{\mathbb{R}}(E) = 2 \times \dim_{\mathbb{C}}(E)$.

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

c) Exemples

Proposition. *On a $\dim(E) = 0$ si et seulement si $E = \{0\}$.*

Démonstration. La famille $\varnothing$ est l'unique base de $\{0\}$. Elle ne contient aucun élément. Par conséquent, si $E = \{0\}$, alors $\dim(E) = 0$. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie qui contient un vecteur non nul, alors la famille composée de ce vecteur est libre et donc toute base de E admet forcément un élément. Par contraposée, E est de dimension nulle, E ne contient aucun vecteur non nul et donc $E = \{0\}$. □

Cela se voit très bien si on considère la dimension comme le nombre de degrés de liberté. En effet :
- Un élément de $\mathbb{K}^n$ est un vecteur à n coordonnées.
- Une matrice de taille $n \times p$ est un tableau avec n lignes et p colonnes donc a $n \times p$ coefficients. En particulier, une matrice carrée de taille n a n^2 coefficients.
- Un polynôme de degré inférieur ou égal à n a $n+1$ coefficients : du coefficient constant jusqu'au coefficient de X^n.

Proposition. *Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$. On a*

$$\dim(\mathbb{K}^n) = n, \qquad \dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1, \qquad \text{et} \qquad \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np.$$

Démonstration. Dans le chapitre 28, nous avons décrit les bases canoniques des $\mathbb{K}$-espaces vectoriel $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qui contiennent respectivement n, $n+1$ et np vecteurs. □

Proposition.

1. *Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $a : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue sur I. Alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire **homogène** du premier ordre $y' + a(x)y = 0$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.*
2. *Soient $(a,b,c) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^2$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire **homogène** du second ordre $y'' + ay' + by = 0$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2.*

Démonstration.

1. On a vu dans le chapitre 11 que l'ensemble des solutions de $(H) : y' + a(x)y = 0$ est
$$S_H = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-A(x)} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$
où A est une primitive de a. Autrement dit $S_H = \mathrm{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^{-A(x)})$. On en déduit que S_H est engendré par un vecteur non nul et donc il s'agit d'un espace vectoriel de dimension 1.
2. On a vu dans le chapitre 11 que l'ensemble des solutions de $(H) : y'' + ay' + by = 0$ dépend de si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ainsi que du discriminant $\Delta = a^2 - 4b$ de l'équation caractéristique. Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$ (les autres sont analogues et laissés en exercice). Alors l'ensemble des solutions est
$$S_H = \left\{ x \mapsto e^{\alpha x} \times (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
où $\alpha + \mathrm{i}\beta$ est une racine non réelle de l'équation caractéristique. Autrement dit $S_H = \mathrm{Vect}(f, g)$ avec $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x)$ et $g : x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x)$. Les fonctions f et g forment une famille libre. En effet, donnons-nous $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda f + \mu g = 0$.
   - En évaluant en 0, on trouve $\lambda = 0$.
   - En évaluant en $\frac{\pi}{2\beta}$ ($\beta \neq 0$ puisque $\alpha + \mathrm{i}\beta$ est non réelle), on trouve $\mu = 0$.

   Ainsi S_H est engendré par deux vecteurs qui forment une famille libre donc S_H est de dimension 2. □

Dans la proposition ci-contre, on s'intéresse ici uniquement aux équations homogènes. Si l'équation n'est pas homogène, l'ensemble des solutions n'est pas un espace vectoriel (il ne contient pas la fonction nulle) : nous dirons dans le chapitre 37 que l'ensemble des solutions est un espace affine.

La aussi le résultat est intuitif si on pense en degrés de liberté : une solution de l'équation différentielle homogène est entièrement déterminée par λ (si on a une équation d'ordre 1) ou λ et μ (si on a une équation d'ordre 2).

Exemple : *Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Donnons la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ (résultats non explicitement au programme mais ultra classiques).*

Pour bien visualiser la situation, commençons par le cas particulier où $n = 3$.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$+d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{K}^6$. Une matrice antisymétrique de taille 3 est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$.

Intuitivement une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est entièrement déterminée par ses coefficients diagonaux et sur-diagonaux. Les coefficients sous-diagonaux sont les mêmes que ceux au-dessus de la diagonale (mais en « miroir »). Il y a donc $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ degrés de liberté donc on conjecture que $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2}$. Une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est entièrement déterminée par ses coefficients sur-diagonaux. Les coefficients diagonaux sont nuls et les sous-diagonaux sont les mêmes que ceux au-dessus de la diagonale (mais en « miroir » et opposés). Il y a donc $\frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}$ degrés de liberté donc on conjecture que $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Plus généralement :

4) Dimension d'un produit d'espaces vectoriels

Proposition. *Si E et F sont de dimension finie, alors $E \times F$ est de dimension finie. De plus* $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$.

Moyen mnémotechnique : (1) est une base de $\mathbb{R}$ et $(1,0)$ et $(0,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.

Le 0 de droite est le 0 de $E \times F$, c'est-à-dire le couple $(0_E, 0_F)$.

Démonstration. Notons $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$. Considérons $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_p)$ des bases respectives de E et F. Montrons que la famille

$$\mathscr{B} = \big((e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, f_1), \dots, (0, f_p)\big)$$

est une base de $E \times F$.

- Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^{n+p}$ tels que
$$\lambda_1(e_1, 0) + \cdots + \lambda_n(e_n, 0) + \mu_1(0, f_1) + \cdots + \mu_p(0, f_p) = 0$$
Alors
$$(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n, \mu_1 f_1 + \cdots + \mu_p f_p) = (0_E, 0_F).$$
Il en découle que $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E$ et $\mu_1 f_1 + \cdots + \mu_p f_p = 0_F$. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre, les λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont tous nuls. De même pour les μ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Donc $\mathscr{B}$ est une famille libre.
- Soit $(x, y) \in E \times F$. Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E, il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dans $\mathbb{K}^n$ tels que $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$. De même, il existe $(\beta_1, \dots, \beta_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que $y = \beta_1 f_1 + \cdots + \beta_p f_p$. Dès lors,
$$\begin{aligned}(x, y) &= (\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n, \beta_1 f_1 + \cdots + \beta_p f_p)\\ &= \alpha_1(e_1, 0) + \cdots + \alpha_n(e_n, 0) + \beta_1(0, f_1) + \cdots + \beta_p(0, f_p).\end{aligned}$$
Ainsi $\mathscr{B}$ est une famille libre.

Finalement $\mathscr{B}$ est une base de $E \times F$ qui contient $n + p$ vecteurs. On en déduit que $E \times F$ est de dimension finie et que $\dim(E \times F) = n + p = \dim(E) + \dim(F)$. $\square$

Corollaire. *Supposons que E est de dimension finie. Alors E^n est de dimension finie et* $\dim(E^n) = n \times \dim(E)$.

5) Familles libres et génératrices en dimension finie

a) Caractérisation des bases en dimension finie

Montrer qu'une famille est génératrice est en général plus difficile que de montrer qu'une famille est libre. Le résultat précédent permet de s'affranchir de cette étape quand on veut prouver qu'une famille est une base, à la condition qu'il y ait le bon nombre d'éléments : il suffit de montrer que la famille est libre, si le cardinal de la famille est égal à la dimension (qu'il faut donc connaître), la famille est une base.

Proposition. *Supposons que E soit de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Alors*

1. *Toute famille génératrice de E possède au moins n vecteurs.*
2. *Toute famille libre de E possède au plus n vecteurs.*
3. *Si $\mathscr{F}$ est une famille de $p \in \mathbb{N}^*$ vecteurs de E, alors*

$$\mathcal{F} \text{ est une base} \iff \begin{array}{c}\mathcal{F} \text{ est libre} \\ \text{et } \ p = n\end{array} \iff \begin{array}{c}\mathcal{F} \text{ est génératrice} \\ \text{et } \ p = n\end{array}.$$

Démonstration.

□

Remarques :

- Ce dernier résultat est très important en pratique : si on sait qu'un espace vectoriel est de dimension n, alors il suffit de trouver une famille libre à n éléments ou une famille génératrice à n éléments pour trouver une base.
- Si on sait qu'un espace vectoriel E est de dimension $n \geqslant 2$, alors le théorème de la base incomplète se reformule ainsi : si $\mathscr{L} = (e_1, \dots, e_k)$ est une famille libre de E contenant $k \in [\![1, n-1]\!]$ vecteurs, alors il existe $n-k$ vecteurs $e_{k+1}, \dots, e_n$ (que l'on peut choisir dans une famille génératrice quelconque) tels que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.

Exemples :

- *Les vecteurs $(1,3)$ et $(-2020,5)$ ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre de $\mathbb{K}^2$. Cette famille contient 2 vecteurs et $\dim(\mathbb{K}^2) = 2$ donc c'est une base de $\mathbb{K}^2$.*
- *Pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on a*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-b)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (b-c)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (c-d)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right)$ *est une famille génératrice de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*. Comme elle contient* 4 *vecteurs et que c'est un espace vectoriel de dimension* 4*, c'est une base de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*.*

Énorme classique : on montre ci-contre que l'indice p de nilpotence d'un endomorphisme f nilpotent est inférieur ou égal à la dimension n de l'espace. Puisque $p \neq n$ et $f^p = 0$, on a

$$f^n = f^{n-p} \circ f^p = 0.$$

Par contraposée, si $f^n \neq 0$, alors f n'est pas nilpotent.

- *Supposons que* E *soit de dimension finie* $n \in \mathbb{N}^*$*. Soit* f *un endomorphisme de* E *non nul qui est nilpotent, c'est-à-dire il existe* $k \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $f^k = 0$*.*

Nous sommes en mesure de montrer le théorème suivant, temporairement admis dans le chapitre 28 :

Théorème. *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. Si* $\mathscr{B}$ *est une famille de* $n+1$ *polynômes échelonnée en degré (c'est-à-dire, pour tout* $k \in [\![0\,;n]\!]$*,* $\mathscr{B}$ *contient un et un seul polynôme de degré* k*), alors* $\mathscr{B}$ *est une base de* $\mathbb{K}_n[X]$*.*

Démonstration. La famille $\mathscr{B}$ est libre car échelonnée en degré. Elle contient $n+1$ vecteurs de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$ si bien qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{K}_n[X]$. □

b) Application aux suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Donnons-nous $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}^*$. Notons $E_{a,b}$ l'ensemble des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants, i.e. l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

Il est intuitif que $E_{a,b}$ est de dimension 2 si l'on considère la dimension comme le nombre de degrés de liberté : en effet, un élément de $E_{a,b}$ est entièrement déterminé par u_0 et u_1 !

Théorème. $E_{a,b}$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* 2*.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que $E_{a,b}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- La suite nulle est un élément de $E_{a,b}$ donc $E_{a,b}$ est non vide.
- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de $E_{a,b}$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ et $v_{n+2} = av_{n+2} + bv_n$, si bien que

$$\lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} = a(\lambda u_{n+2} + \mu v_{n+1}) + b(\lambda u_n + \mu v_n)$$

c'est-à-dire que $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}$: $E_{a,b}$ est stable par combinaison linéaire.

Ainsi $E_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ qui est un espace vectoriel de référence. En particulier, c'est un espace vectoriel. Montrons à présent qu'il est de dimension 2. Pour cela introduisons les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E_{a,b}$ telles que $x_0 = y_1 = 1$ et $x_1 = y_0 = 0$ et montrons que $\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ est une base de $E_{a,b}$

- Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que $\lambda(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}}$.
  Évaluons au rang $n = 0$: $\lambda x_0 + \mu y_0 = 0$ donc $\lambda = 0$.
  Évaluons au rang $n = 1$: $\lambda x_1 + \mu y_1 = 0$ donc $\mu = 0$.
  Ainsi la famille $\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ est libre.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}$. Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = u_0(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + u_1(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour cela, montrons par récurrence double que
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = u_0 x_n + u_1 y_n.$$
  C'est immédiat aux rangs 0 et 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété soit vraie au rangs n et $n+1$. On a alors
  $$\begin{aligned} u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n &= a(u_0 x_{n+1} + u_1 y_{n+1}) + b(u_0 x_n + u_1 y_n) \\ &= u_0(ax_{n+1} + bx_n) + u_1(ay_{n+1} + by_n) = u_0 x_{n+2} + u_1 y_{n+2}. \end{aligned}$$
  Ainsi la propriété est vraie au rang $n+2$. Par récurrence, nous en déduisons la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi la famille $\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ est génératrice.

Cette base contient deux éléments donc $\dim(E_{a,b}) = 2$. □

On cherche à présent une base de $E_{a,b}$. On va essayer de trouver une base de suites « simples ». On cherche donc les suites géométriques dans $E_{a,b}$.

Les suites les plus simples sont les suites constantes ou arithmétiques, mais (sauf cas particulier) $E_{a,b}$ ne contient aucune suite constante ou arithmétique non nulle. On cherche donc des suites un peu moins simples : des suites géométriques.

Proposition. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $r \neq 0$ de premier terme $u_0 \neq 0$. Alors :*
$$(u_n) \in E_{a,b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad r^2 = ar + b.$$

Démonstration. On a $(u_n) \in E_{a,b}$ si et seulement, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r^{n+2}u_0 = ar^{n+1}u_0 + br^n u_0$ si et seulement si $r^2 = ar + b$ (on a simplifié par $r^n u_0 \neq 0$).□

L'équation $r^2 = ar + b$, d'inconnue $r \in \mathbb{K}$, est appelée équation caractéristique. On dit aussi que le polynôme $X^2 - aX - b$ est le polynôme caractéristique.

On trouve λ_1 et λ_2 grâce aux valeurs de u_0 et u_1 : voir les exemples dans le chapitre 14.

Théorème (cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). *Supposons que $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$. Notons $\Delta = a^2 + 4b$ le discriminant du polynôme $X^2 - aX - b$.*

1. *Si $\Delta \neq 0$, alors $X^2 - aX - b$ admet deux racines complexes distinctes r_1 et r_2. Les deux suites $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment alors une base de $E_{a,b}$. En particulier, pour tout $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}$:*
   $$\exists!(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n.$$
2. *Si $\Delta = 0$, alors $X^2 - aX - b$ admet une racine double complexe r_0. Les deux suites $(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n \times r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment alors une base de $E_{a,b}$. En particulier, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}$:*
   $$\exists!(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = (\lambda_1 + \lambda_2 n) r_0^n.$$

0 n'est pas solution de $r^2 = ar + b$ puisque $b \neq 0$, et donc r_1 et r_2 sont non nulles.

Démonstration.

1. D'après ce qui précède, les deux suites $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à $E_{a,b}$. Puisque r_1 et r_2 sont distinctes non nulles, les deux suites $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas proportionnelles donc forment une famille libre. Elles forment une famille libre à 2 éléments dans un espace vectoriel de dimension 2 donc forment une base.

2. La suite $(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $E_{a,b}$. Montrons que $(n \times r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $E_{a,b}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}(n+2)r_0^{n+2} &= (n+2)r_0^n \times r_0^2 \\ &= (n+1+1)r_0^n \times (ar_0+b) \\ &= (n+1)r_0^n \times ar_0 + r_0^n \times ar_0 + nr_0^n b + 2r_0^n b \\ &= a(n+1)r_0^n r_0 + bnr_0^n + 2r_0^n \times (ar_0+2b).\end{aligned}$$

Or, r_0 est une solution double de $r^2 - ar - b = 0$ donc, d'une part, $\Delta = a^2 + 4b = 0$ et d'autre part, $r_0 = a/2$ donc $a = 2r_0$. Ainsi

$$\Delta = a \times (2r_0) + 4b = 2(ar_0 + 2b)$$

si bien que $ar_0 + 2b = 0$ (rappelons que $\Delta = 0$). Finalement, on obtient $(n+2)r_0^{n+2} = a(n+1)r_0^{n+1} + bnr_0^n$ c'est-à-dire que $(n \times r_0^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}$. Les suites $(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas proportionnelles donc forment une famille libre. Elles forment une famille libre à 2 éléments dans un espace vectoriel de dimension 2 donc forment une base. □

On trouve λ_1 et λ_2 grâce aux valeurs de u_0 et u_1 : voir les exemples dans le chapitre 14.

Théorème (cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). *Supposons que $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$. Notons $\Delta = a^2 + 4b$ le discriminant du polynôme $X^2 - aX - b$.*

1. *Si $\Delta > 0$, alors $X^2 - aX - b$ admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. Les deux suites $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment alors une base de $E_{a,b}$. En particulier, pour tout $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}$:*

$$\exists!(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n.$$

2. *Si $\Delta = 0$, alors $X^2 - aX - b$ admet une racine double réelle r_0. Les deux suites $(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n \times r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment alors une base de $E_{a,b}$. En particulier, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}$:*

$$\exists!(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{C}^2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = (\lambda_1 + \lambda_2 n)r_0^n.$$

3. *Si $\Delta < 0$, alors $X^2 - aX - b$ admet deux racines non réelles $\rho e^{\pm i\theta}$. Les deux suites $(\rho^n \cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\rho^n \sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ forment alors une base de $E_{a,b}$. En particulier, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}$:*

$$\exists!(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{C}^2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \rho^n(\lambda_1 \cos(n\theta) + \lambda_2 \sin(n\theta)).$$

Démonstration.

1. Identique à la démonstration du théorème précédente mais avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{C}$.
2. Identique à la démonstration du théorème précédente mais avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{C}$.
3. Puisque $\rho e^{i\theta}$ est racine de $X^2 - aX - b$, on a $(\rho e^{i\theta})^2 - a(\rho e^{i\theta}) - b = 0$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$(\rho e^{i\theta})^{n+2} - a(\rho e^{i\theta})^{n+1} - b(\rho e^{i\theta})^n = 0.$$
En prenant la partie réelle, on obtient que $(\rho^n \cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $E_{a,b}$. En prenant la partie imaginaire, on obtient que $(\rho^n \sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $E_{a,b}$. Ces deux suites ne sont pas proportionnelles donc forment une famille libre. Elles forment une famille libre à 2 éléments dans un espace vectoriel de dimension 2 donc forment une base. □

II Sous-espaces vectoriels et dimension

1) Dimension d'un sous-espace vectoriel

Proposition. *Supposons que E soit de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie. De plus $\dim(F) \leqslant \dim(E)$ avec égalité si et seulement si $F = E$.*

Cette proposition est totalement intuitive. La dimension est une manière de quantifier la notion de « taille » d'un espace vectoriel. Si un espace vectoriel est inclus dans un autre, il a une « taille » plus petite, et ils ont la même « taille » si et seulement s'ils sont égaux (encore une fois, si l'un est inclus dans l'autre).

Démonstration.

□

Corollaire. *Supposons que E soit de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F = G$ si et seulement si $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème précédent avec $E = G$ puisque F est alors un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel G. □

Remarques :

- Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie.
- Supposons à présent que E est de dimension 3. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Sa dimension est alors égale à 0, 1, 2 ou 3.
  - ⋆ Si $\dim(F) = 0$, alors $F = \{0\}$.

Et on montre de même que seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^2$ sont $\{0\}$, les droites vectorielles et $\mathbb{K}^2$.

- ⋆ Si $\dim(F) = 1$, alors on vient de voir que F est une droite vectorielle de E.
- ⋆ Si $\dim(F) = 2$, alors on vient de voir que F est un plan vectoriel de E.
- ⋆ Si $\dim(F) = 3$, alors $E = F$.

En particulier, on vient de montrer le résultat admis dans le chapitre 28, à savoir : les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^3$ sont $\{0\}$, les droites vectorielles, les plans vectoriels et $\mathbb{K}^3$.

2) Somme de sous-espaces vectoriels en dimension finie

a) Existence et dimension d'un supplémentaire en dimension finie

On rappelle (cf. chapitre 28) que, si F et G deux sous-espaces vectoriels de E admettant des bases $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$, alors la concaténation de $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ (que l'on note $\mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$ par abus de notation) est une base de $F \oplus G$ si et seulement si ils sont en somme directe.

E n'est pas forcément de dimension finie.

Théorème. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E qui sont de dimension finie et en somme directe. Alors $F \oplus G$ est de dimension finie et*

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G).$$

Démonstration. Puisque F et G admettent des bases $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ et qu'ils sont en somme directe, leur concaténation est une base de $F \oplus G$. On en déduit que $F \oplus G$ est de dimension finie. Par ailleurs

$$\dim(F \oplus G) = \mathrm{card}(\mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G) = \mathrm{card}(\mathscr{B}_F) + \mathrm{card}(\mathscr{B}_F) = \dim(F) + \dim(G). \qquad \square$$

Il n'y a pas unicité du supplémentaire de F mais on sait qu'il est nécessairement de dimension $n - \dim(F)$.

Théorème (existence de supplémentaires en dimension finie). *Supposons que E soit de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel F de E admet un supplémentaire dans E, c'est-à-dire, il existe un sous-espace vectoriel de G de E tel que $E = F \oplus G$.*

Démonstration.

On en déduit que :

Proposition. *Supposons que E soit de dimension finie. Soient F un sous-espace vectoriel de E et G un supplémentaire de F. Alors $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.*

⚠ Cependant, la réciproque est fausse : si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E et si $\dim(E) + \dim(F) = \dim(E)$, alors F et G ne sont pas forcément supplémentaires :

Il faut une condition supplémentaire que l'on verra dans le paragraphe suivant.

Remarque : Les résultats précédents nous fournissent une méthode pour trouver un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel F de E :

- On cherche une base $(e_1, \dots, e_p)$ de F. On sait alors que $\dim(F) = p$ et qu'un supplémentaire de F (il en existe forcément au moins un) dans E sera de dimension $n - p$.
- On recherche alors $n - p$ vecteurs $e_{p+1}, \dots e_n$ de E qui complètent $(e_1, \dots, e_p)$ en une base de E. On s'aide souvent de bases canoniques.
- On en déduit que $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots e_n)$ est un supplémentaire de F dans E par théorème de concaténation des bases.

Exemple : *On cherche un supplémentaire de* $F = \{P \in \mathbb{K}_4[X] \,|\, P(1) = P'(1) = 0\}$ *dans* $\mathbb{K}_4[X]$.

b) Dimension d'une somme quelconque en dimension finie

Théorème (formule de Grassmann). *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Alors le sous-espace vectoriel $F + G$ est de dimension finie et*

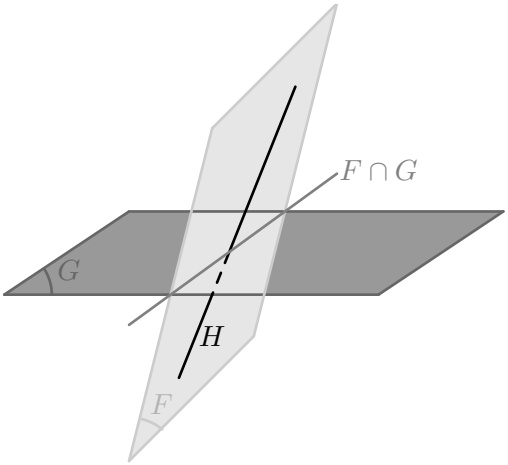
$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Démonstration.

Nous sommes à présent en mesure de prouver le résultat admis dans le paragraphe IV.1 du chapitre 28, à savoir que si F_1 et F_2 sont deux plans vectoriels distincts dans $\mathbb{K}^3$, alors $F_1 + F_2 = \mathbb{K}^3$. Puisque F_1 et F_2 sont distincts, alors $F_1 \cap F_2 \subsetneq F_1$ et donc $\dim(F_1 \cap F_2) < 2$ i.e. $\dim(F_1 \cap F_2) \leqslant 1$. D'après la formule de Grassmann,

$$\dim(F_1 + F_2) \geqslant 2 + 2 - 1 = 3.$$

Or, $F_1 + F_2$ est inclus dans $\mathbb{K}^3$ donc $\dim(F_1 + F_2) = 3$, si bien que $F_1 + F_2 = \mathbb{K}^3$.



□

On a $F + G = H + G$ mais on ne peut absolument pas en déduire que $F = G$!

Théorème. *Supposons que E soit de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $E = F \oplus G$,
2. $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ *et* $F \cap G = \{0\}$,
3. $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ *et* $F + G = E$.

Le point 2 est le critère que l'on utilise le plus souvent pour montrer que

$$E = F \oplus G.$$

Démonstration.

□

Exemple : *Soit H un plan vectoriel de $\mathbb{K}^3$. Si $x \in \mathbb{K}^3 \backslash H$, alors $\mathrm{Vect}(x) \oplus H = \mathbb{K}^3$. En effet :*

3) Rang d'une famille de vecteurs

Définition (rang d'une famille de vecteurs). *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de p vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle rang de cette famille, et on note $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_p)$, la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$.*

Remarque : Le sous espace vectoriel $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ est bien de dimension finie puisqu'il est engendré par la famille $(x_1, \dots, x_p)$ qui contient un nombre fini de vecteurs.

Proposition. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E. Notons r son rang. Nous avons :*

1. *$r \leqslant p$ avec égalité si et seulement si la famille est libre.*

Supposons de plus que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

2. *$r \leqslant n$ avec égalité si et seulement si la famille engendre E.*
3. *$r = n = p$ si et seulement si la famille est une base de E.*

Démonstration.

Remarque : On retiendra notamment que, si E est de dimension finie et $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille de vecteurs de E,

$$\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) \leqslant \min\big(\dim(E), p\big).$$

Proposition. *Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E. Soient $k \in [\![1, p]\!]$ et $(y_1, \dots, y_k)$ une famille obtenue en appliquant une succession finie d'opérations élémentaires sur $(x_1, \dots, x_p)$ et en enlevant des vecteurs nuls ou qui sont des combinaisons linéaires des autres. Alors*

$$\mathrm{rg}(y_1, \dots, y_k) = \mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p).$$

Démonstration. Découle du fait que, si on effectue une opérations élémentaire sur une famille de vecteurs (échanger deux vecteurs, multiplier l'un des vecteurs par un scalaire non nul ou ajouter à l'un des vecteurs un autre vecteur de la famille multiplié par un scalaire), alors le sous-espace qu'elle engendre est inchangé (cf. chapitre 28). □

Corollaire. *Le rang d'une famille finie de vecteurs est le maximum des cardinaux de ses sous familles libres.*

Dans la pratique, pour trouver le rang d'une famille, on enlève des vecteurs nuls ou qui sont des combinaisons linéaires des autres (en s'aidant éventuellement d'opérations élémentaires) jusqu'à ce qu'on obtienne une famille libre.

Nous verrons dans le chapitre de codage matriciel le rang d'une matrice et le lien avec la notion de rang d'une famille de vecteurs. Notamment nous verrons une méthode pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs (avec la méthode du pivot de Gauss).

Exemple : *Donnons-nous $x_1 = (1, 2, -1)$, $x_2 = (4, 5, 5)$, $x_3 = (2, 1, 7)$, $x_4 = (7, 8, 11)$ des vecteurs $\mathbb{K}^3$. On sait déjà que $\mathrm{rg}(x_1, x_2, x_3, x_4) \leqslant \min(\dim(\mathbb{K}^3), 4) = 3$.*

- *On a $x_4 = x_1 + x_2 + x_3$ donc $\mathrm{rg}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathrm{rg}(x_1, x_2, x_3)$.*
- *On a $x_2 = 2x_1 + x_3$ donc $\mathrm{rg}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathrm{rg}(x_1, x_3)$.*
- *x_1 et x_3 ne sont pas colinéaires donc la famille (x_1, x_3) est libre et donc le rang de (x_1, x_3) est égal au nombre de vecteurs de cette famille, c'est-à-dire 2.*

Finalement $\mathrm{rg}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2$.

III Applications linéaires en dimension finie

1) Image d'une famille de vecteurs par une application linéaire

Reformulons le théorème montré dans le chapitre 29 :

Théorème (caractérisation par l'image d'une base). *Supposons que E soit de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Donnons-nous $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs de F. Alors il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = v_i$. Il s'agit de l'application*

$$f : x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i v_i.$$

De plus

1. *f est injective si et seulement si $(v_1, \dots, v_n)$ est une famille libre de F.*
2. *f est surjective si et seulement si $(v_1, \dots, v_n)$ est une famille génératrice de F.*
3. *f est un isomorphisme si et seulement si $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de F.*

Autrement dit, une application linéaire de E dans F est entièrement définie par la donnée des images des vecteurs d'une base de E.

Montrons un résultat admis dans le chapitre 29 :

Proposition. *Supposons que E soit de dimension finie $n \geqslant 2$. Alors l'anneau $\mathscr{L}(E)$ est non commutatif.*

Démonstration. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. Considérons les endomorphismes u et v définis par

$$u(e_1) = e_1, \qquad u(e_2) = -e_2 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![3\,;n]\!], \quad u(e_k) = 0.$$
$$v(e_1) = e_2, \qquad v(e_2) = e_1 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![3\,;n]\!], \quad v(e_k) = 0.$$

On a alors $u \circ v(e_1) = u(e_2) = -e_2$ et $v \circ u(e_1) = v(e_1) = e_2$. Mais $e_2 \neq 0$ donc $e_2 \neq -e_2$ donc $v \circ u \neq u \circ v$. □

Ces endomorphismes existent et sont bien définis d'après le théorème de caractérisation par l'image d'une base vu dans le chapitre 29.

Théorème. *Supposons que E et F soient de dimension finie*

1. *$\exists u \in \mathscr{L}(E, F)$ injective $\iff \dim(F) \geqslant \dim(E)$.*
2. *$\exists u \in \mathscr{L}(E, F)$ surjective $\iff \dim(F) \leqslant \dim(E)$.*
3. *$\exists u \in \mathscr{L}(E, F)$ bijective $\iff \dim(F) = \dim(E)$.*

Le théorème ci-dessous ne dit PAS que si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et si $\dim(E) \leqslant \dim(F)$ alors u est injective (prendre l'application nulle). Par contre, si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et si $\dim(E) > \dim(F)$, alors on peut affirmer que u n'est pas injective. On pourra même être plus précis et donner la dimension du noyau : cf. paragraphe III.3.

Démonstration. Notons $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$. Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F.

2) Isomorphismes en dimension finie

On rappelle que deux espaces vectoriels E et F sont dits isomorphes si il existe un isomorphisme de l'un dans l'autre. Il découle du point 3 du théorème précédent que :

Ces deux corollaires peuvent se montrer directement : si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors on vérifie que les applications

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto (x_1, \dots, x_n)$$

est un isomorphisme de E dans $\mathbb{K}^n$ et

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme de E dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Théorème. *Deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension.*

Corollaire. *Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 1$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.*

Démonstration. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est de dimension n donc il est isomorphe à E d'après la proposition précédente. □

Corollaire. *Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 1$ est isomorphe à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.*

Démonstration. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est de dimension $n \times 1$ donc il est isomorphe à E d'après la proposition précédente. □

Remarques :

- On peut donc parfois faire un abus de langage et « identifier » deux espaces vectoriels de même dimension finie, puisqu'ils sont isomorphes. Par exemple :
  - ⋆ on peut identifier un élément $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ à l'élément

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),$$

  - ⋆ on peut identifier $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ à $\mathbb{R}$, ce qui permet de dire (par exemple) que si X et Y appartiennent à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ alors ${}^tXY \in \mathbb{K}$ (alors que c'est un élément de $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$).
- Ce théorème fournit également un moyen pratique de donner la dimension d'un espace vectoriel qu'on a « devinée » grâce aux degrés de liberté de ses éléments : il suffit d'exhiber un isomorphisme entre cet espace et un espace vectoriel dont on connaît la dimension (typiquement : $\mathbb{K}^n$).

Théorème. *Supposons que E et F soient de dimension finie Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est un isomorphisme de E sur F.*
2. *f transforme toute base de E en une base de F.*
3. *f transforme une base de E en une base de F*

Démonstration. L'implication $1 \Rightarrow 2$ est le troisième point du théorème de caractérisation par l'image d'une base. L'implication $2 \Rightarrow 3$ est immédiate.

Montrons l'implication $3 \Rightarrow 1$. Soit f une application linéaire de E dans F qui transforme une certaine base $(e_1, \dots, e_n)$ de E en une base $(v_1, \dots, v_n)$ de F. Le théorème de caractérisation par l'image d'une base entraîne alors que f est uniquement déterminée et, puisque $(v_1, \dots, v_n)$ est une base, il s'ensuit que f est un isomorphisme. □

Alors E et F ont la même dimension.

Proposition. *Supposons que E et F soient de dimension finie. Soit f un isomorphisme de E dans F. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Si $(v_1, \dots, v_p)$ est une famille de vecteurs de E, alors $\mathrm{rg}(v_1, \dots, v_p) = \mathrm{rg}(f(v_1), \dots, f(v_p))$.*

Démonstration.

□

3) Rang d'une application linéaire

a) Application linéaire de rang fini

Définition (application linéaire de rang fini). *On dit qu'une application linéaire f de E dans F est de rang fini lorsque $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie. On note alors $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$.*

Exemple : *Notons $f : P \in \mathbb{K}[X] \longmapsto P'(0)X + P(0)$.*

Proposition. *Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Nous avons $\mathrm{rg}(f) = 0$ si et seulement si f est l'application nulle.*

Démonstration. Nous avons $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = \{0\}$ si et seulement si, pour tout $x \in E$, $f(x) = 0$. □

Proposition. *Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Si E est de dimension finie, alors f est de rang fini. On a $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(E)$ avec égalité si et seulement si f est injective.*

De plus, en notant $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $\mathrm{rg}(f)$ est aussi le rang de la famille de vecteurs $(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Démonstration.

□

Proposition. *Supposons que F soit de dimension finie. Soit $\mathscr{L}(E,F)$ une application de rang fini. Alors f est surjective si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$.*

Démonstration. On a $\mathrm{Im}(f) \subset F$ et, par hypothèse, $\mathrm{Im}(f)$ et F sont de dimension finie. Alors f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$ si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$. □

Remarque : Si E et F sont de dimension finie, puisque $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F, on a de plus

$$\mathrm{rg}(f) \leqslant \min\big(\dim(E), \dim(F)\big).$$

Exemple : *Soit $f : (x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \longmapsto (x+z, x-y, y+z, x+z) \in \mathbb{K}^4$. Il s'agit d'une application linéaire de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathbb{K}^4$. On sait $\mathrm{rg}(f) \leqslant \min(3,4) = 3$. On a*

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\big(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\big) &= \mathrm{rg}\big((1,1,0,1),(0,-1,1,0),(1,0,1,1)\big)\\ &= \mathrm{rg}\big((1,1,0,1),(0,-1,1,0)\big)\end{aligned}$$

car $(1,0,1,1) = (1,1,0,1) + (0,-1,1,0)$. Comme $(1,1,0,1)$ et $(0,-1,1,0)$ sont non colinéaires, ils forment une famille libre donc $\mathrm{rg}(f) = 2$.

b) Applications linéaires entre espaces vectoriels de mêmes dimensions finies

Théorème. *Supposons que E et F soient de **même** dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors :*

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective.}$$

Démonstration. Les propositions du paragraphe précédent assurent tour à tour que f est injective si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$ si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$ si et seulement si f est surjective. □

Corollaire. *Supposons que E soit de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors :*

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective.}$$

Une fois de plus l'unicité est équivalente à l'existence dans ce cadre.

Remarque : Ce résultat est particulièrement remarquable : pour un endomorphisme (ou plus généralement pour une application linéaire entre espaces de même dimension), le fait que 0_F admette 0_E pour unique antécédent (ce qui garantit l'injectivité) garantit que tout élément de F admet un unique antécédent. Réciproquement, l'existence d'un antécédent pour tout vecteur de F entraîne automatiquement que celui-ci est unique (mais on utilise moins souvent ce résultat dans ce sens).

Corollaire. *On suppose que E et F sont de même dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. S'il existe $g \in L(F,E)$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ **ou** $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, alors f est un isomorphisme et $g = f^{-1}$.*

En dimension finie, une seule des deux égalités suffit, mais en général, il faut les deux égalités.

Démonstration.

□

Exemples :

- *Revisitions les polynômes d'interpolation de Lagrange vus dans le chapitre 21.*

On rappelle que

$$L_i = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

- *L'application $f : P \longmapsto P - 2P'$ est un endomorphisme (je vous laisse le vérifier) de $\mathbb{K}[X]$. Montrer que c'est un automorphisme.*

  ⚠ *$\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie donc on peut peut pas simplement montrer que f est injectif !*

Méthode à retenir pour prouver la surjectivité de certains endomorphisme f de $\mathbb{K}[X]$:
• On montre que f est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
• On montre que f est injective.
• On montre que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{K}_n[X]$, $f(P) \in \mathbb{K}_n[X]$. On conclut que f induit un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ et le note, par exemple, f_n...

...
• On dit que f_n est encore injectif et on conclut que f_n est alors bijectif.
• On se donne $Q \in \mathbb{K}[X]$. On dit qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $Q \in \mathbb{K}_n[X]$. La surjectivité de f_n assure qu'il existe $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $Q = f_n(X)$ et donc $Q = f(X)$. On conclut que f est surjective.
• On conclut que f est bijective.

c) Le théorème du rang

Théorème (forme géométrique du théorème du rang). *Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On suppose que $\mathrm{Ker}(f)$ admet un supplémentaire S dans E. Alors f induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(f)$.*

Remarque : On ne suppose pas que E soit de dimension finie donc l'existence de S n'est garantie par aucun théorème du cours.

Démonstration.

□

Pour appliquer le théorème du rang, E (l'espace de départ) doit être de dimension finie, mais F (l'espace d'arrivée) peut être de dimension infinie.

Théorème (du rang). *Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Si E est de dimension finie, alors*

$$\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E).$$

Autrement dit :

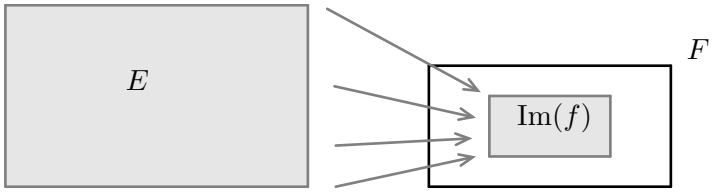
$$\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E).$$

Démonstration.

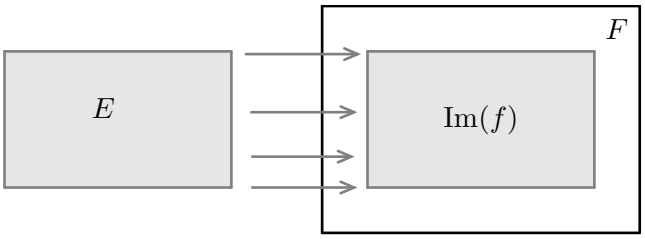
□

Remarques :

- D'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(f) = \dim(E) - \dim \mathrm{Ker}(f)$. De manière imagée : « la taille de l'image est égale à la taille de l'ensemble de départ, moins la taille de ce qu'on perd en l'envoyant sur 0 ».
- En particulier, une application linéaire ne peut que « contracter » son ensemble de définition, l'image est « plus petite » que l'ensemble de départ. Attention, les dessins qui suivent sont peu rigoureux !



Dans le meilleur des cas (quand $\dim \mathrm{Ker}(f) = 0$, c'est-à-dire quand f est injective), l'image est « de même taille que l'espace de départ ».



- Le théorème du rang permet de retrouver le fait que f est injective si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$.
- ⚠ On a $\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E)$ mais cela ne permet **EN AUCUN CAS** de conclure que $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$. En effet :
  - ⋆ Déjà, a priori, $\mathrm{Im}(f)$ n'est pas inclus dans E (mais dans F qui n'a en général aucun rapport avec E).
  - ⋆ Même si $\mathrm{Im}(f) \subset E$ (c'est par exemple le cas si f est un endomorphisme), alors $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, ce qui n'a aucune raison d'être le cas en général.

Exemples :

- *Reprenons l'exemple de l'application linéaire*

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \longmapsto (x + z, x - y, y + z, x + z) \in \mathbb{K}^4.$$

  Donnons-nous $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$. *On a* $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f)$ *si et seulement* $f(x, y, z) = (0, 0, 0, 0)$ *si et seulement* $x + z = x - y = y + z = x + z = 0$ *si et seulement si* $z = -x$ *et* $y = x$ *si et seulement si* $(x, y, z) = x(1, 1, -1)$.
  Par conséquent $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1, 1, -1))$ *et donc* $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$. *Comme* $\mathbb{K}^3$ *est de dimension finie, le théorème du rang nous permet de retrouver que* $\mathrm{rg}(f) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2$.
- *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On souhaite résoudre l'équation* $XP' = P$ *d'inconnue* $P \in \mathbb{K}_n[X]$.

- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que, pour tout $Q \in \mathbb{K}_n[X]$, il existe $P \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$ tel que $Q(X) = P(X+1) - P(X)$.*

d) Rang d'une composition d'applications linéaires

On a déjà vu plus haut que le rang d'une famille finie de vecteurs était invariant par passage à un isomorphisme. Nous allons montrer qu'il est en de même pour le rang d'une application linéaire.

Soient E' et F' des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Commençons par un lemme :

Ce résultat est valable même en dimension infinie.

Lemme. *Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Soient $u \in \mathscr{L}(E', E)$ et $v \in \mathscr{L}(F, F')$ des isomorphismes. Alors $\mathrm{Ker}(v \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f \circ u) = \mathrm{Im}(f)$.*

On voit que ce résultat demeure si u est seulement supposée surjective et v seulement supposée injective. On voit aussi que les inclusions

$$\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(v \circ f)$$

et $\mathrm{Im}(f \circ u) \subset \mathrm{Im}(f)$ sont valables si u et v ne sont ni injectives, ni surjectives.

Démonstration.

□

Théorème. *Supposons que E soit de dimension finie. Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Soient $u \in \mathscr{L}(E', E)$ et $v \in \mathscr{L}(F, F')$ des isomorphismes. Alors $\mathrm{rg}(v \circ f) = \mathrm{rg}(f \circ u) = \mathrm{rg}(f)$. Autrement dit le rang d'une application linéaire est invariant par composition par un isomorphisme, à gauche comme à droite.*

Démonstration.

□

Cependant, en pratique, on compose très souvent par des applications linéaires non bijectives : le résultat précédent ne s'applique donc plus. Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$, un moyen simple et très souvent utile de donner des informations sur $v \circ u$ est d'appliquer le théorème du rang à la restriction

$$v\big|_{\mathrm{Im}(u)} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Im}(u) & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & v(x) \end{array} \right.$$

Commençons par un lemme.

Ce résultat est vrai également en dimension infinie.

Lemme. *Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors*

$$\mathrm{Ker}\left(v\big|_{\mathrm{Im}(u)}\right) = \mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(u) \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{Im}\left(v\big|_{\mathrm{Im}(u)}\right) = \mathrm{Im}(v \circ u).$$

Ce résultat est intuitif : $v\big|_{\mathrm{Im}(u)}$ n'est rien d'autre que l'application v appliquée à un élément qui est dans l'image de u. Par conséquent, pour annuler $v\big|_{\mathrm{Im}(u)}$, il faut être à la fois une image de u et annuler v, donc être dans $\mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(u)$, et pour être dans l'image de $v\big|_{\mathrm{Im}(u)}$, il faut être l'image, par v, d'un élément qui est déjà une image par u, donc être une image par $v \circ u$.

Démonstration.

□

Si u est de dimension finie, le théorème du rang appliqué à $v\big|_{\mathrm{Im}(u)}$ devient donc

Il faut absolument savoir redémontrer ce dernier résultat (ainsi que le lemme) !

Proposition. *Supposons que E et F soient de dimension finie. Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$.*

Ainsi, quand on compose, le rang ne peut que diminuer.

Démonstration.

□

Donnons un dernier exemple d'application de cette méthode.

Exemple : *Supposons que E est de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que*

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) \leqslant \dim\left(\mathrm{Ker}\left(f^2\right)\right) \leqslant 2\dim(\mathrm{Ker}(f)).$$

Techniquement le lemme n'est pas au programme donc il faudrait le redémontrer (ce qui est facile !).

IV Formes linéaires et hyperplans

Dans les deux premiers paragraphes, E est de dimension quelconque.

1) Formes linéaires

Définition. *Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.*

Exemples :

- *Si $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, alors*

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \end{array} \right.$$

  est une forme linéaire, c'est-à-dire que toute application de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ qui renvoie une combinaison linéaire des coordonnées est une forme linéaire.

On verra dans la suite qu'en dimension finie, toute forme linéaire peut être mise sous cette forme (dans une base convenable).

- *Si $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, alors*

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(x_0) \end{array} \right.$$

  est une forme linéaire appelée en x_0.

- *Si $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors*

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

  est une forme linéaire, par linéarité de l'intégrale.

- *Si $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors*

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ M = (m_{i,j})_{i,j} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{i,i} \end{array} \right.$$

  est une forme linéaire appelée trace.

Répétons que, dans ce paragraphe et le suivant, E n'est pas forcément de dimension finie.

Proposition/Définition (Formes coordonnées). *Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E. Pour tout $x \in E$, il existe donc une unique famille à support fini $(x_i)_{i\in I}$ (les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$) telle que $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$. Pour tout $i \in I$, l'application*

$$e_i^* : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & x_i \end{array} \right.$$

est une forme linéaire, appelée $i^{\text{ième}}$ forme coordonnée relativement à la base $\mathscr{B}$.

Démonstration. Les applications e_i^*, $i \in I$, sont bien définies puisque tout vecteur de E admet des uniques coordonnées. Elles sont bien à valeurs dans $\mathbb{K}$. Enfin ce sont des applications linéaires. En effet, pour tous $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$, $y = \sum_{i\in I} y_i e_i$ dans E et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda x + y = \sum_{i\in I} (\lambda x_i + y_i) e_i$ et donc

$$\forall i \in I, \qquad e_i^*(\lambda x + y) = \lambda x_i + y_i = \lambda e_i^*(x) + e_i^*(y). \qquad \square$$

Proposition. *Une forme linéaire est soit nulle soit surjective.*

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ une forme linéaire. On a $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{K}$ donc $\dim \mathrm{Im}(\varphi) \leqslant \dim(\mathbb{K}) = 1$.

- Si $\mathrm{rg}(\varphi) = 0$, alors φ est l'application nulle.
- Si $\mathrm{rg}(\varphi) = 1$, alors $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{K}$ et donc φ est surjective. $\square$

2) Hyperplans

Définition. *Un hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.*

Il ne faut pas oublier de préciser « non nulles ». La plupart du temps, il est inutile de le prouver, mais parfois, ce n'est pas si simple (cf. chapitre 38). Dans l'exemple ci-contre, c'est immédiat : si on note f la fonction constante égale à 1, alors $\varphi_1(f) = \varphi_2(f) = 1$ donc φ_1 et φ_2 sont bien non nulles.

Exemples : *Notons $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ puis*

$$H_1 = \{f \in E \mid f(0) = 0\} \qquad \text{et} \qquad H_2 = \left\{ f \in E \,\middle|\, \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0 \right\}$$

Alors H_1 et H_2 sont des hyperplans de E car sont respectivement les noyaux des formes linéaires non nulles $\varphi_1 : f \longmapsto f(0)$ et $\varphi_2 : f \longmapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

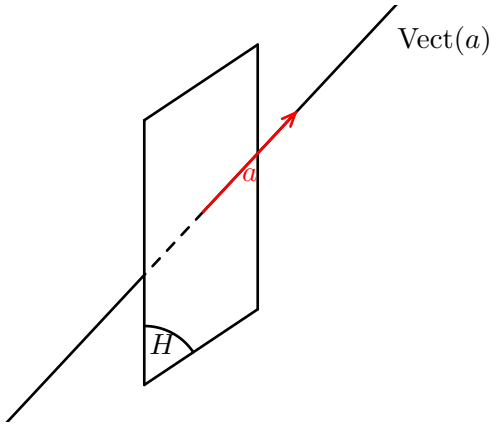
Théorème (Caractérisation géométrique des hyperplans). *Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan de E si et seulement s'il existe $a \in E$ non nul (n'appartenant pas à H) tel que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$. En d'autres termes, un hyperplan est un sous-espace vectoriel de E qui admet un supplémentaire de dimension 1.*

Démonstration.

□

Exemples :

- *Dans* $\mathbb{R}^3$ *:*



- *Dans* $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*, les hyperplans*

$$H_1 = \{f \in E \,|\, f(0) = 0\} \qquad \textit{et} \qquad H_2 = \left\{ f \in E \,\middle|\, \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0 \right\}$$

admettent comme supplémentaire l'ensemble des fonctions constantes (cf exercice __ du chapitre 29), qui est de dimension 1*.*

Remarque : Supposons que H soit un hyperplan de dimension finie. Alors, comme il existe $a \neq 0$ tel que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$, E est de dimension finie. Par contraposée, si E est de dimension infinie, alors tout hyperplan est de dimension infini.

La différence avec le résultat précédent est qu'on peut prendre n'importe quel élément qui n'appartient pas à H.

Proposition. *Soit* H *un hyperplan de* E*. Alors :*

$$\forall b \notin H, \qquad H \oplus \mathrm{Vect}(b) = E$$

Démonstration. Découle de la proposition précédente : a était un élément quelconque qui n'était pas dans H donc tout élément qui n'est pas dans H convient. □

Proposition. *Soient φ et ψ deux formes linéaires non nulles. Alors elles sont proportionnelles si et seulement si elles ont le même noyau.*

Démonstration.

□

3) Formes linéaires et hyperplans en dimension finie

Dans ce paragraphe, on suppose que E est de dimension finie.

a) Formes coordonnées et équation d'un hyperplan en dimension finie

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Dès lors, pour tout $x \in E$, il existe une unique famille $(x_1, \dots, x_n)$ de scalaires tels que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, on rappelle que l'application

$$e_i{}^* : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x_i \end{array} \right.$$

est une forme linéaire, appelée $i^{\text{ème}}$ forme linéaire cordonnée relativement à la base $\mathscr{B}$.

L'espace $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ est aussi noté E^* et est appelé le dual de E (et la base $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est appelée base duale de $(e_1, \dots, e_n)$). On vient de montrer qu'il est de dimension n. Il est donc isomorphe à E. Ce n'est plus forcément le cas si E est de dimension infinie.

Proposition. *La famille $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$, l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.*

Démonstration.

□

Proposition. *Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement s'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que H soit d'équation*

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

d'inconnue $x \in E$ sont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ sont $(x_1, \dots, x_n)$.

Remarques :

- Quand on dit que $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ est une équation de H, cela signifie que H est l'ensemble des vecteurs $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$ tels que $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$.
- En d'autres termes, en dimension finie, un ensemble est un hyperplan de E si et seulement s'il admet comme équation une équation linéaire en les coordonnées de x.

  Par exemple, un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel dont l'équation est $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ avec a, b, c non tous nuls et d'inconnue $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Cela prouve qu'une forme linéaire en dimension finie est une fonction qui renvoie une combinaison linéaire des coordonnées de chaque vecteur (dans la base choisie au départ).

Démonstration. Soit H un sous-espace vectoriel de E. Alors H est un hyperplan si et seulement si H est le noyau d'une forme linéaire non nulle φ. Or, toute forme linéaire non nulle s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire avec des coefficients non tous nuls de $e_1^*, \dots, e_n^*$ (car elles forment une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$) donc H est un hyperplan si et seulement s'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ non tous nuls tels que H soit le noyau de

$$\varphi : x \longmapsto \alpha_1 e_1^*(x) + \cdots + \alpha_n e_n^*(x) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n,$$

ce qui est le résultat voulu. □

⚠ Il n'y a pas unicité de l'équation d'un hyperplan. En effet, on a déjà prouvé au paragraphe IV.2 que deux formes linéaires ont même noyau (c'est-à-dire définissent le même hyperplan) si et seulement si elles sont proportionnelles. Ainsi, un hyperplan admet une infinité d'équations (dans une base donnée), toutes proportionnelles les unes aux autres.

Par exemple, les deux équations $x + y + 2z = 0$ et $2x + 2y + 4z = 0$ définissent le même hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

b) Dimension d'un hyperplan

Théorème. *On suppose que E est de dimension finie $n \geqslant 2$. Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si $\dim(H) = n - 1$.*

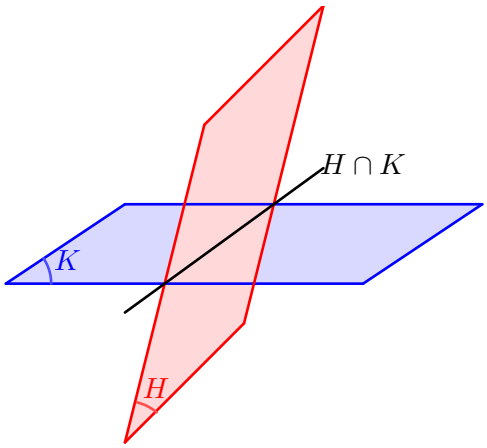
Démonstration. Soit H un sous-espace vectoriel de E. Notons $p = \dim(H)$. Puisque E est de dimension finie, H admet un supplémentaire. De plus tous les supplémentaires ont la même dimension égale à $n - p$. Dès lors $\dim(H) = n - 1$ si et seulement si H admet un supplémentaire de dimension 1 si et seulement si H est un hyperplan (cf. paragraphe IV.2). □

Exemple :

- *En dimension 2, les hyperplans sont exactement les droites vectorielles.*
- *En dimension 3, les hyperplans sont exactement les plans vectoriels.*

c) Intersection d'hyperplans en dimension finie et systèmes d'équations

Supposons toujours que E est de dimension $n \geqslant 2$. Commençons par traiter le cas particulier de deux hyperplans H et K distincts de E. Montrons que $\dim(H \cap K) = n - 2$.



Il faut connaître les deux preuves.

Voyons deux méthodes différentes

- **Méthode 1 (avec la formule de Grassmann).**

De façon alternative : puisque H et K sont distincts, il existe $a \in K$ tel que $a \notin H$ et donc $H \oplus \mathrm{Vect}(a) = E$. Mais $\mathrm{Vect}(a) \subset K$ donc

$$E = H + \mathrm{Vect}(a) \subset H + K$$

et donc $E = H + K$. On conclut avec la formule de Grassmann.

- **Méthode 2 (avec le théorème du rang).**

Ce résultat se généralise :

Théorème. *On suppose que E est de dimension finie $n \geqslant 2$. Soit $m \in [\![1\,;n]\!]$.*

- *L'intersection de m hyperplans est de dimension au moins égale à $n - m$.*
- *Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n - m$ est l'intersection de m hyperplans.*

Comme ci-dessus, l'idée est : « quand on intersecte avec un hyperplan, on peut perdre jusqu'à une dimension ». Ce n'est pas automatique, par exemple si on prend plusieurs fois le même hyperplan. Mais, dans tous les cas, on ne peut pas « descendre plus » que de 1 à chaque nouvelle intersection. Par exemple, l'intersection de 3 hyperplans en dimension 9 est de dimension au moins 6.

Démonstration.

□

Remarque : Il découle des résultats précédents que l'ensemble des solutions d'un système homogène à m équations et n inconnues est un espace vectoriel de dimension au moins $n-m$ et, réciproquement, qu'un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-m$ peut être décrit à l'aide d'un système de m équations à n inconnues :

L'ensemble des solutions n'est pas forcément de dimension $n-m$, par exemple si la troisième équation est la somme des deux premières.

$$(S) \quad \begin{cases} \alpha_{1,1}x_1 + \alpha_{1,2}x_2 + \cdots + \alpha_{1,n}x_n = 0 \\ \alpha_{2,1}x_1 + \alpha_{2,2}x_2 + \cdots + \alpha_{2,n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \alpha_{m,1}x_1 + \alpha_{m,2}x_2 + \cdots + \alpha_{m,n}x_n = 0 \end{cases}$$

On vient de prouver la validité de ce qu'on a fait dans le chapitre 28 : quand on a deux équations indépendantes dans $\mathbb{R}^3$, on obtient une droite vectorielle, quand on a une équation, on obtient un plan vectoriel. De plus, tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ s'écrit à l'aide d'une ou de plusieurs équations de ce type.

En particulier :

- les droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$ ($n=2$, $m=1$) admettent une équation de la forme $ax+by=0$ avec a et b non tous nuls.
- Les plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ ($n=3$, $m=1$) admettent une équation de la forme $ax+by+cz=0$ avec a,b,c non tous nuls.
- Les droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ ($n=3$, $m=2$) peuvent être décrits à l'aide de deux équations du type $ax+by+cz=0$ avec a,b,c non tous nuls.

  Par exemple, le système

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

  décrit une droite vectorielle.