Chapitre 19

Dérivation

Le but de ce chapitre est de définir proprement la notion de dérivée, de montrer tous les résultats admis dans le chapitre 4, et de voir de nouveaux résultats.

On se donne une partie D de $\mathbb{R}$ qui est l'union d'intervalles non vide et non réduits à un point. On considère aussi un **intervalle** I non vide et non réduit à un point inclus dans D. Soient f et g des fonctions définies sur D et à valeurs réelles.

I Dérivabilité

On ne définit pas la dérivée d'un point n'appartenant pas à D !

On se donne a un point de D.

1) Définitions et exemples

Définition. *On appelle taux d'accroissement de f en a la fonction $\tau_a(f)$ (ou τ_a quand aucune confusion n'est possible) définie par :*

$$\tau_a : \left\{ \begin{array}{ccc} D\backslash\{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \right.$$

*On dit que f est dérivable en a lorsque la fonction τ_a admet une limite **finie** en a. Cette limite est alors appelée le nombre dérivé de f en a et est notée $f'(a)$ (ou encore $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$).*

En d'autres termes, le nombre dérivé est, quand elle existe, la limite du taux d'accroissement.

Définition. *On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de D. On appelle alors dérivée de f la fonction notée f' définie par :*

$$f' : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & f'(a) \end{array} \right.$$

En résumé, « f est dérivable sur D » = « f' est définie sur D ».

Définition. *L'ensemble des fonctions dérivables sur D est noté $\mathscr{D}^1(D,\mathbb{R})$.*

Exemples :

- *Soient $(c,d) \in \mathbb{R}^2$. Notons $f : x \longmapsto cx+d$.*

- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $f : x \longmapsto x^n$.*

Il s'agissait de la seule dérivée de fonction usuelle qui n'avait pas été montrée dans le chapitre 4.

- *Notons f est la fonction racine carrée.*

On verra dans le paragraphe suivant qu'une fonction dérivable est continue. On voit ci-contre que la réciproque est fausse : la valeur absolue et la racine carrée sont continues non dérivables en 0.

- *Si f est la fonction valeur absolue : si $a > 0$ alors, de même que précédemment, f est dérivable en a et $f'(a) = 1$, tandis que si $a < 0$, f est dérivable en a et $f'(a) = -1$. Supposons que $a = 0$. Soit $x \neq 0$. Si $x > 0$,*

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{|x|}{x} = 1 \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$$

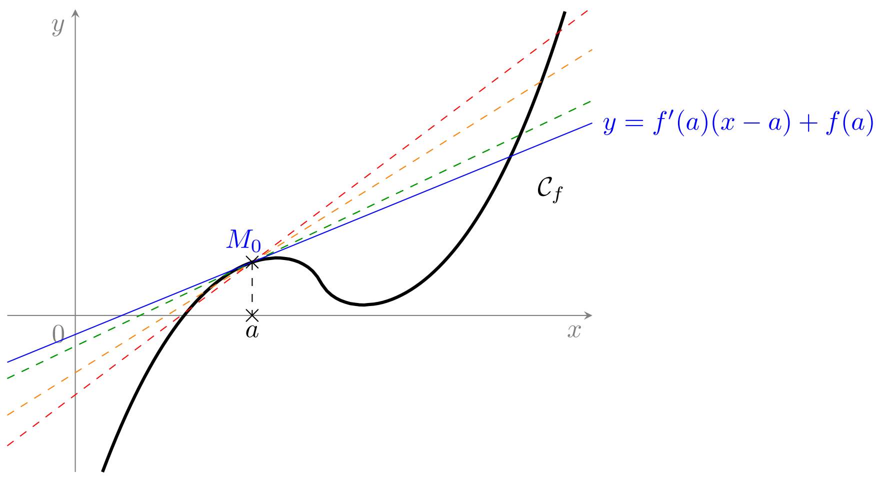
tandis que si $x < 0$,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{|x|}{x} = -1 \xrightarrow[x\to 0^-]{} -1$$

Le taux d'accroissement de f n'admet donc pas de limite en 0 (car admet des limites à gauche et à droite distinctes) donc la valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Interprétation physique/cinématique : Si $f(t)$ est la position à l'instant t, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est la vitesse moyenne (éventuellement négative si on recule) entre x et a (le très célèbre « $v = d/t$ »). Au fur et à mesure que x se rapproche de a, on calcule la vitesse moyenne sur un laps de temps toujours plus court contenant a et donc on peut interpréter $f'(a)$ comme la vitesse instantanée à l'instant a (et c'est même comme cela qu'on la définit en physique).

Interprétation géométrique : On note A le point de coordonnées $(a, f(a))$ (c'est-à-dire le point d'abscisse a sur la courbe de f) et M le point d'abscisse x. Ainsi $\tau_a(x)$ est le coefficient directeur de la droite (AM). Si f est dérivable en a alors, quand x tend vers a, « M tend vers A » et la droite (AM) « tend vers une droite limite » (passant toujours par A) de coefficient directeur $f'(a)$.



Cette droite est appelée tangente à $\mathcal{C}_f$ en A ou au point d'abscisse a (ou en a par abus de langage). En d'autres termes :

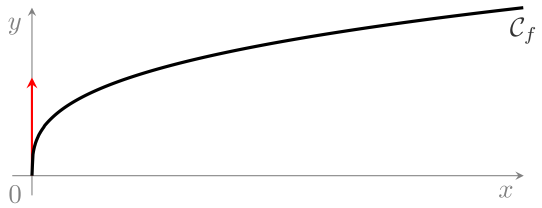
Définition. *Si f est dérivable en a, on appelle tangente à la courbe de f en a la droite passant par $A(a, f(a))$ de coefficient directeur $f'(a)$.*

Proposition. *Si f est dérivable en a, la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a est la droite d'équation $y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la définition. □

Si $\tau_a(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$, alors la droite (AM) « tend » aussi vers une une position limite, qu'on appelle aussi tangente à $\mathcal{C}_f$ en a, mais cette fois la droite est alors verticale.

Définition. *Si $\tau_a(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$, la droite d'équation $x = a$ est appelée tangente verticale à $\mathcal{C}_f$ en $A(a, f(a))$.*



Remarque : En conclusion, géométriquement, f est dérivable en a si et seulement si $\mathcal{C}_f$ admet en a une tangente non verticale.

Terminons ce paragraphe par une caractérisation de la dérivation :

Proposition. *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$,*
2. *$\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \ell$,*
3. *Il existe une fonction ε définie sur $D_a = \{x - a \,|\, x \in D\}$ telle que $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ et*

$$\forall h \in D_a, \qquad f(a+h) = f(a) + \ell\, h + h\, \varepsilon(h).$$

On dira dans le chapitre 26 que ce troisième point signifie que f admet un développement limité d'ordre 1 en a.

Démonstration.

$\square$

2) Une condition nécessaire importante

La réciproque est fausse : les fonctions valeur absolue et racine carrée sont continues mais non dérivables (en 0). Il existe même des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dérivables en aucun point !

Proposition. *Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.*

Démonstration.

$\square$

3) Dérivabilité à droite et à gauche

a) Définitions et lien avec la dérivabilité

Si bien sûr cela à un sens de parler de limite à droite ou à gauche (attention lorsque a est une extrémité d'un des intervalles de D).

Définition. *La fonction f est dérivable à droite (respectivement à gauche) en a si τ_a admet une limite à droite (respectivement à gauche) finie en a. On note alors cette limite $f'_d(a)$ (respectivement $f'_g(a)$).*

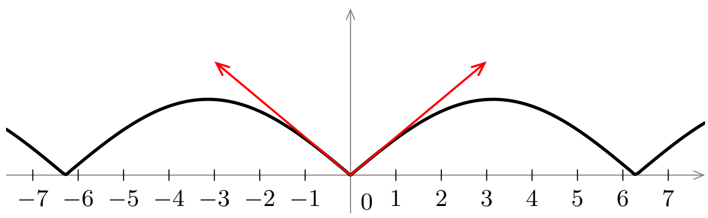
Exemple : *La valeur absolue est dérivable à droite et à gauche en 0, et si on la note f, alors $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$.*

Proposition. *Si f est dérivable à droite (respectivement à gauche) en a, alors f est continue à droite (respectivement à gauche) en a.*

On définit de manière analogue au I.1.a une fonction dérivable à droite ou à gauche sur I tout entier.

DÉMONSTRATION. Analogue au paragraphe précédent. □

Remarque : Si f est dérivable à gauche (respectivement à droite) en a, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet en a une demi tangente à gauche (respectivement à droite) en a, définie de manière analogue au paragraphe 1). Ci-dessous le graphe de $|\sin|$.



On retrouve le fait que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0. De manière générale, si le graphe d'une fonction f présente un « pic » en a, alors f n'est pas dérivable en a.

Proposition. *La fonction f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en a* ***et*** *$f'_g(a) = f'_d(a)$. On a alors $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.*

DÉMONSTRATION. La fonction τ_a n'étant pas définie en a, elle admet une limite finie en a si et seulement si elle admet une limite finie à gauche et à droite et si celles-ci sont égales (cf. chapitre 18). □

Application aux fonctions définies « par cas » : Soit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \ln(1+x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \sin(x) & \text{si } x < 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On utilise dans cet exemple les expressions des dérivées des fonctions $\ln$ et $\sin$, qu'on démontrera dans la suite.

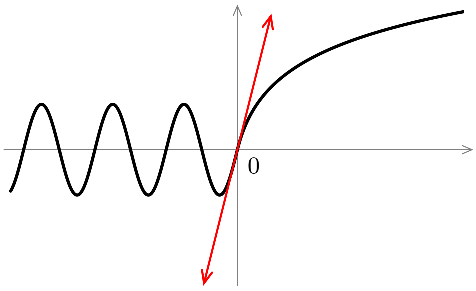
La fonction $\ln$ et la fonction $\sin$ étant continues, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et continue à droite (car l'inégalité est large) en 0 avec $f(0) = 0$. De plus, si $x < 0$, alors $f(x) = \sin(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} \sin(0) = 0 = f(0)$. Ainsi f est continue à gauche donc continue en 0 donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction $\ln$ et la fonction $\sin$ étant dérivables (cf. chapitres 4 et 5), f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable à droite en 0 avec $f'_d(0) = 1$. De plus, si $x < 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0^-]{} 1$$

Ainsi f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 1 = f'_d(0)$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$. Ci-dessous le graphe de f (non à l'échelle : la tangente en 0 est la première bissectrice !).

Morale de l'histoire : faites attention aux points de recollement.



b) Raccordement de solutions d'équations différentielles

Comme on l'a vu dans le chapitre 11, il est essentiel de se placer sur un intervalle quand on résout des équations différentielles puisqu'on utilise le théorème de caractérisation des fonctions constantes dans toutes les preuves.

Soient α, β et γ des fonctions continues sur l'intervalle I. Considérons l'équation linéaire d'ordre 1 :

$$(E) : \alpha(x)y' + \beta(x) = \gamma(x)$$

Nous avons vu dans le chapitre 11 comment déterminer des solutions de (E) sur chaque intervalle sur lequel α ne s'annule pas. Il est temps de voir comment déterminer les solutions sur I tout entier. L'idée est simple : on raccorde (ou recolle) les solutions trouvées. Voici les grandes étapes :

- On commencer par résoudre (E) sur chaque intervalle sur lequel α ne s'annule pas.
- On suppose qu'il existe une solution f sur I tout entier.
- Pour chaque intervalle J sur lequel α ne s'annule pas, on dit que f est encore solution et, comme on sait résoudre (E) sur J, on obtient la « forme » de f sur J.
- On calcule la valeur en les points de recollement (les points d'annulation de α sur I).
- On cherche des conditions nécessaires et suffisantes sur f pour que f soit dérivable en les points de recollement. Il s'agit en général de s'intéresser à la limite à gauche et la limite à droite.
- Enfin on vérifie que les fonctions trouvées sont bien solutions de l'EDL.

On peut aussi appliquer le théorème de la limite de la dérivée (cf. paragraphe III.6).

Exemple : *Considérons l'EDL* $(E) : xy' - (1+x)y + (1+x^2)e^x = 0$.

4) Opérations sur les fonctions dérivables

a) Opérations algébriques

Tous ces résultats sont encore vrais si on remplace « dérivable » par « dérivable à gauche » ou « dérivable à droite ».

Théorème. *Supposons que f et g sont dérivables en a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :*

1. $f+g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a)$.

2. λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.

3. fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$.

Si de plus g ne s'annule pas au voisinage de a, alors

4. $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en a et $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a) = -\dfrac{g'(a)}{(g(a))^2}$.

5. $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.

Démonstration. Puisque f et g sont dérivables en a, on a

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} f'(a) \qquad \text{et} \qquad \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} g'(a).$$

Par conséquent

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} f'(a)+g'(a),$$

$$\frac{(\lambda f)(x)-(\lambda f)(a)}{x-a} = \lambda\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} \lambda f'(a),$$

Nous en déduisons que $f+g$, λf et fg sont dérivables en a, avec les dérivées annoncées.

Supposons que g ne s'annule pas au voisinage de a. Nous avons

Ainsi $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en a avec dérivé annoncée. Enfin $\dfrac{f}{g} = f \times \dfrac{1}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = f'(a)\left(\frac{1}{g}\right)(a) + f(a)\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} + \frac{-g'(a)f(a)}{(g(a))^2}. \qquad \square$$

On en déduit les opérations algébriques sur les fonction dérivables sur I :

Théorème. *Supposons que f et g sont dérivables sur D. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors*

1. *$f+g$ est dérivable sur D et $(f+g)' = f' + g'$.*
2. *λf est dérivable sur D et $(\lambda f)' = \lambda f'$.*
3. *fg est dérivable sur D et $(fg)' = f'g + fg'$.*

Si de plus g ne s'annule pas sur D, alors

4. *$\frac{1}{g}$ est dérivable sur D et $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$.*
5. *$\frac{f}{g}$ est dérivable sur D et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.*

Remarque : Ces résultats se généralisent facilement à un nombre quelconque (fini) de fonctions dérivables (par récurrence) :

- Si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $f_1, \ldots, f_n$ sont dérivables sur D et à valeurs réelles alors $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$ l'est aussi et

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k\right)' = \sum_{k=1}^{n} \lambda f_k'.$$

  On dit que la dérivation est linéaire.

- Si f, g, h sont trois fonctions dérivables sur D et à valeurs réelles, alors fgh l'est et

$$(f \times g \times h)' = f'gh + fg'h + fgh'.$$

  Plus généralement :

Inutile d'apprendre cette formule compliquée : on dérive les fonctions une à une et on somme.

Proposition. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions dérivables sur D et à valeurs réelles. Alors $f_1 \cdots f_n$ est dérivable en a et*

$$(f_1 \cdots f_n)'(a) = \sum_{k=1}^{n} f_1(a) \cdots f_{k-1}(a) f_k'(a) f_{k+1}(a) \cdots f_n(a).$$

Autrement dit :

$$\left(\prod_{k=1}^{n} f_k\right)'(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(a) \times \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} f_k(a).$$

En particulier, si f est dérivable en a, alors la fonction f^n est dérivable en a et $(f^n)'(a) = nf'(a)(f(a))^{n-1}$.

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Corollaire. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si f est dérivable sur D, alors f^n aussi et $(f^n)' = nf'f^{n-1}$.*

b) Composition

On considère dans ce paragraphe une partie E de $\mathbb{R}$ qui est l'union d'intervalles non vides et non réduits à un point.

Théorème. *Soit $b \in E$. Soit $u : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $u(E) \subset D$. On suppose que u est dérivable en b et que f est dérivable en $a = u(b)$. Alors $f \circ u$ est dérivable en b et $(f \circ u)'(b) = u'(b)\, f'(u(b))$.*

De même qu'une composée de fonctions continues à droite n'est pas continue à droite, une composée de fonctions dérivables à droites n'est pas forcément dérivable à droite. En effet, si u décroît, alors u « transforme la droite en gauche ». Comme pour la continuité, une seule solution : le cas par cas, et le faire à la main.

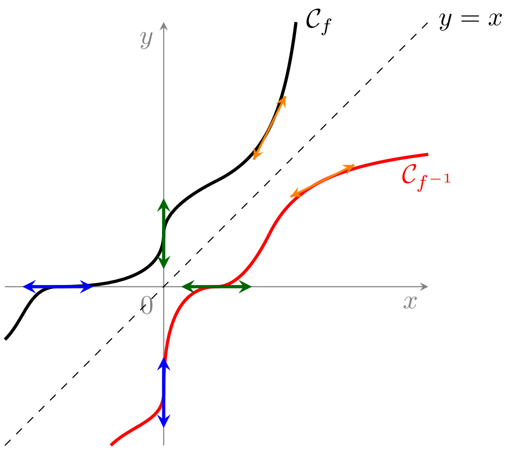
Démonstration.

$\square$

Et donc, pour des fonctions dérivables sur des domaines :

Théorème. *Soit $u : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $u(E) \subset D$. Si u est dérivable sur E et f est dérivable sur D, alors $f \circ u$ est dérivable sur E et $(f \circ u)' = u' \times f \circ u$.*

c) Dérivée d'une réciproque



Commençons par une discussion géométrique. Supposons que f soit une bijection sur I et que f soit dérivable en $a \in I$. Sa tangente en a admet donc pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Puisque le graphe de f^{-1} est obtenu à partir du graphe de f par une symétrie d'axe la première bissectrice, la tangente à $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ en $f(a)$ aussi.

Plaçons nous d'office sur un intervalle dans ce paragraphe puisque c'est le cadre d'application du théorème de la bijection.

- Si $f'(a) = 0$, alors la tangente en a à $\mathcal{C}_f$ est horizontale et donc la tangente en a à $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ est verticale donc f^{-1} n'est pas dérivable en $f(a)$.
- Si $f'(a) \neq 0$, alors la tangente en a à $\mathcal{C}_f$ est la courbe de la réciproque de la fonction affine $x \longmapsto f'(a)(x-a) + f(a)$, qui se trouve être $x \longmapsto \dfrac{1}{f'(a)}(x - f(a)) + a$. Son coefficient directeur étant $\dfrac{1}{f'(a)}$, cette quantité est la dérivée de f^{-1} en $f(a)$.

Et si f n'est pas dérivable en a mais que $\mathcal{C}_f$ admet une tangente verticale, alors la tangente en $f(a)$ à $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ est horizontale, ce qui suggère que f^{-1} serait dérivable en $f(a)$ avec $(f^{-1})'(f(a))=0$.

Moyen mnémotechnique : $f \circ f^{-1}(x) = x$ donc, en dérivant,

$(f^{-1})'(x) \times f' \circ f^{-1}(x) = 1$.

⚠ Ce n'est pas une preuve !

Théorème. *Supposons que f soit une bijection de I sur $J = f(I)$. Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a et si f'* ***ne s'annule pas*** *en a, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Démonstration. Soit $y \in J \backslash \{b\}$. Il s'ensuit que $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(b)$ et donc que

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \left(\frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}\right)^{-1} = \left(\frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a}\right)^{-1}.$$

Or $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ et, comme f^{-1} est continue en b, nous avons $\displaystyle\lim_{y \to b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b) = a$. Par composition des limites, il vient que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} = f'(a).$$

Puisque $f'(a) \neq 0$, nous en déduisons que

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} \underset{y \to b}{\longrightarrow} (f'(a))^{-1} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

□

Si $f'(a) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en $f(a)$ (car sinon la remarque précédente entraine que $0 = f'(a) \times (f^{-1})'(f(a)) = 1$, ce qui est est absurde). Plus précisément, en reprenant la démonstration du théorème, on obtient

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} \underset{y \to f(a)}{\longrightarrow} +\infty$$

si f est strictement croissante (resp. $-\infty$ si f est strictement décroissante).

Et donc, pour une fonction dérivable sur I tout entier :

Théorème. *Supposons que f soit une bijection de I sur $J = f(I)$. Si f est dérivable sur I et si f'* ***ne s'annule pas*** *sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.*

Remarque : Plus généralement encore, supposons que f est dérivable sur I mais que f' s'annule sur I. Notons $A = (f')^{-1}(\{0\})$ l'ensemble des valeurs d'annulations de f'. Alors f^{-1} est dérivable en tout point de $f(I) \backslash f(A)$.

On retient : f^{-1} est dérivable sauf en les images des valeurs d'annulation de f'.

d) Et sinon ?

⚠ Tous les résultats de ce paragraphe donnent des conditions suffisantes pour qu'une fonction soit dérivable. Aucun ne donne de condition pour qu'une fonction ne soit pas dérivable. En d'autres termes, si f et g sont dérivables, on peut dire que $f + g$ et $f \times g$ sont dérivables, mais on ne peut rien affirmer si f et g ne sont pas dérivables. En effet, une somme ou un produit de fonctions non dérivables peut être dérivable : par exemple, si f est la valeur absolue, alors f n'est pas dérivable en 0 mais $f - f$ est la fonction nulle et $f \times f$ est la fonction carré, toutes deux dérivables en 0. Si aucun des théorèmes ne s'applique, on ne peut pas conclure que la fonction étudiée n'est pas dérivable. Une seule solution : le taux d'accroissement, c'est-à dire revenir à la définition d'une fonction dérivable.

Exemple : *Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto |x|^3$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car composée d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.*

II Dérivées successives

1) Fonctions dérivables n fois, de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$

Attention à ne pas confondre $f^{(n)}$ avec $f^n = \underbrace{f \times \cdots \times f}_{n \text{ fois}}$.

Définition. *Si f est dérivable sur D et si f' est dérivable sur D, alors on dit que f est deux fois dérivable sur D et la dérivée de f' est appelé la dérivée seconde de D. On la note $f^{(2)}$ ou f''.*

Si f est deux fois dérivable sur D et si f'' est dérivable sur D, alors on dit que f est trois fois dérivable sur D et la dérivée de f'' est appelé la dérivée troisième de D. On la note $f^{(3)}$ ou f'''.

Plus généralement, on définit les dérivées successives par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$, on dit que f est n fois dérivable sur D si

- *f est $n-1$ dérivable sur D,*
- *$f^{(n-1)}$, la dérivée $(n-1)^{\text{ième}}$ de f, est dérivable sur D.*

La fonction $(f^{(n-1)})'$ est appelée dérivée $n^{\text{ième}}$ de f et notée $f^{(n)}$.

Si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est dérivable n fois, on dit que f est dérivable une infinité de fois.

Remarques :

- On note généralement f' et f'' au lieu de $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$. Mais on n'utilise jamais f''', f'''', etc. surtout pour des raisons pratiques.
- Par convention, on pose $f^{(0)} = f$.
- Si $n \in \mathbb{N}^*$ et si f est dérivable n fois sur E alors f' est dérivable $n-1$ fois sur E et $f^{(n)} = (f')^{(n-1)}$.
- Si $n \in \mathbb{N}^*$ et si f' est dérivable n fois sur E alors f est dérivable $n+1$ fois sur D et $(f')^{(n)} = f^{(n+1)}$.

Les deux dernières propriétés ci-contre peuvent être utiles quand on raisonne par récurrence.

Définition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur D si f est dérivable n fois sur E et si $f^{(n)}$ est continue sur D.*

Par analogie, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^0$ si elle est continue.

Exemples : *Nous renvoyons au chapitres 4 et 5 pour des exemples.*

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

- *Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur D alors, pour tout $p \leqslant n$, f est de classe $\mathscr{C}^p$ sur D.*
- *Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur D alors, pour tout $p \leqslant n$, $f^{(p)}$ est de classe $\mathscr{C}^{n-p}$ sur D et $f^{(n)} = (f^{(p)})^{(n-p)}$.*
- *Si f' est de classe $\mathscr{C}^n$ sur D, alors f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur D.*

On a « f est dérivable n fois sur D » = « $f^{(n)}$ est définie sur D » et « f est $\mathscr{C}^n$ sur D » = « $f^{(n)}$ est continue sur D ».

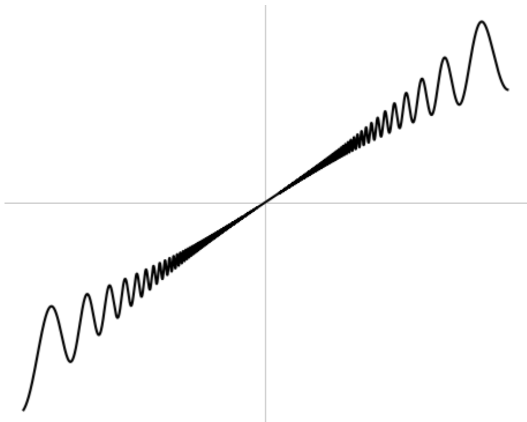
$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si f est dérivable n fois sur D, alors f est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ sur D.*

⚠ Il existe des fonctions qui sont dérivables mais qui ne sont pas de classe $\mathscr{C}^1$.

Considérons par exemple

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{cl} x + x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \textit{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \textit{si} \quad x = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$



Nous montrerons l'existence d'une primitive d'une fonction continue dans le chapitre 24.

En considérant une primitive de cette fonction (qui existe car elle est continue), on obtient une fonction deux fois dérivable qui n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$, etc. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut donc construire des fonctions qui sont de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ mais qui ne sont pas n fois dérivables. On en déduit qu'il existe des fonctions qui sont $n-1$ fois dérivables qui ne sont pas n fois dérivables.

Définition. *On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur D.*

Par conséquent, un moyen simple de prouver qu'une fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ est de prouver par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable.

Proposition. *La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D si et seulement si f est dérivable une infinité de fois sur D.*

Démonstration. Si f est $\mathscr{C}^\infty$ alors, pour tout n, f est $\mathscr{C}^n$ donc dérivable n fois : f est donc dérivable une infinité de fois. Réciproquement, supposons que f soit dérivable une infinité de fois. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est dérivable $n+1$ fois donc est de classe $\mathscr{C}^n$: f est bien $\mathscr{C}^\infty$. $\square$

La notation $\mathscr{D}^n(D, \mathbb{R})$ n'est pas officiellement au programme.

Définition.

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{D}^n(D, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur D.*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, on note $\mathscr{C}^n(D, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur D.*

Remarque : On a donc les inclusions suivantes :

$$\cdots \subset \mathscr{C}^n(D,\mathbb{R}) \subset \mathscr{D}^n(D,\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^{n-1}(D,\mathbb{R}) \subset \mathscr{D}^{n-1}(D,\mathbb{R}) \cdots$$
$$\cdots \subset \mathscr{C}^2(D,\mathbb{R}) \subset \mathscr{D}^2(D,\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^1(D,\mathbb{R}) \subset \mathscr{D}^1(D,\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^0(D,\mathbb{R})$$

De plus
$$\mathscr{C}^\infty(D,\mathbb{R}) = \bigcap_{n\geqslant 1} \mathscr{C}^n(D,\mathbb{R}) = \bigcap_{n\geqslant 1} \mathscr{D}^n(D,\mathbb{R}).$$

2) Opérations sur les dérivées successives

a) Combinaisons linéaires

Par récurrence, on en déduit que :

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si f et g sont n fois dérivables (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$) sur D, alors $f+g$ et λf sont n fois dérivables (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$) sur D. De plus $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$ et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$.*

Et donc une combinaison linéaire de fonction n fois dérivables (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$) l'est aussi et sa dérivée $n^{\text{ième}}$ est la combinaison linéaire des dérivées $n^{\text{ièmes}}$.

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Proposition. *Si P une fonction polynomiale de degré p à coefficients réels, alors P est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et, pour tout $n > p$, $P^{(n)}$ est le polynôme nul.*

Démonstration. Soit $P : x \longmapsto \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$. Nous avons vu dans le chapitre 4 que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $f_k : x \longmapsto x^k$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $n > k$, $f_k^{(n)} = 0$. Nous obtenons que P est de classe $\mathscr{C}^\infty$. De plus, si $n > p$, alors $P^{(n)} = \sum_{k=0}^{p} a_k f_k^{(n)} = 0$. □

b) La formule de Leibniz

Théorème (formule de Leibniz). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si f et g sont n dois dérivables sur D, alors fg aussi et*
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Cette démonstration est très proche de celle du binôme de Newton.

Démonstration. Montrons ce théorème par récurrence sur n.

- *Initialisation :* Si f et g sont dérivables sur D, alors on a déjà vu que fg est dérivable sur D et que
$$(fg)^{(1)} = (fg)' = f'g + g'f = f^{(1)}g^{(1-1)} + f^{(0)}g^{(1-0)} = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(1-k)}.$$
Ainsi la formule est vraie au rang 1.
- *Hérédité :* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que la formule soit vraie au rang n. Soient f et g des fonctions $n+1$ fois dérivables sur D. Elles sont alors n fois dérivables donc, par hypothèse de récurrence, fg aussi et
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Toutes les fonctions de cette somme sont dérivables sur D. Par conséquent $(fg)^{(n)}$ est dérivable sur D donc fg est $n+1$ fois dérivable sur D et

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)} = \left((fg)^{(n)}\right)' &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}.\end{aligned}$$

Faisons le changement d'indices $j = k+1$ dans la première somme :

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)} &= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} f^{(j)} g^{(n+1-j)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\ &= \binom{n}{n} f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n}{0} f^{(0)} g^{(n+1)} \\ &= \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{0} f^{(0)} g^{(n+1)},\end{aligned}$$

on utilise aussi le fait que $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$ et que $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$

d'après la formule de Pascal. Ainsi la formule est vraie au rang $n+1$.

D'où le théorème par récurrence. $\square$

Puisque la somme et le produit de deux fonctions continues sont des fonctions continues, nous en déduisons :

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Si f et g sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur D, alors fg est de classe $\mathscr{C}^n$ sur D.*

Exemple : *La fonction $\varphi : x \longmapsto x^3 e^x$ ...*

Corollaire. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si f et g sont n fois dérivables sur D (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$). Si g ne s'annule pas sur D, alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont n fois dérivables (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$) sur D.*

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

c) Composition

On considère dans ce paragraphe une partie E de $\mathbb{R}$ qui est une union d'intervalles non vides et non réduits à un point.

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $u(E) \subset D$. Si u et f sont n fois dérivables (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$) sur E et D respectivement, alors $f \circ u$ est n fois dérivables (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$) sur E.*

Le cas de classe $\mathscr{C}^\infty$ découle immédiatement des autres puisqu'il est équivalent à être infiniment dérivable.

DÉMONSTRATION. Raisonnons par récurrence. L'initialisation a été montrée dans la paragraphe I. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que la propriété soit vraie au rang n. Supposons que f et u soient $n+1$ fois dérivables (resp. de classe $\mathscr{C}^{n+1}$) sur D et E. Alors elles sont dérivables donc $f \circ u$ aussi et $(f \circ u)' = u' \times f' \circ u$. De plus f' et u' sont n fois dérivables (resp. de classe $\mathscr{C}^n$) donc $(f \circ u)'$ aussi par produit. Ainsi $f \circ u$ est $n+1$ fois dérivables (resp. de classe $\mathscr{C}^{n+1}$). On en déduit la proposition par récurrence. □

d) Réciproque d'une bijection

Théorème. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que f soit une bijection de I sur $J = f(I)$. Si f est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$) sur I et si f' **ne s'annule pas** sur I, alors f^{-1} est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$) sur J et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.*

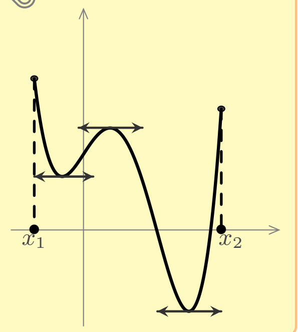
Le cas de classe $\mathscr{C}^\infty$ découle immédiatement des autres puisqu'il est équivalent à être infiniment dérivable.

DÉMONSTRATION. Raisonnons par récurrence. L'initialisation a été montrée dans la paragraphe I. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que la propriété soit vraie au rang n. Supposons que f soit $n+1$ fois dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^{n+1}$) sur I et que f' ne s'annule pas sur I. Alors f est dérivable donc f^{-1} aussi et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$. Puisque f' ne s'annule pas sur I, alors $f' \circ f^{-1}$ ne s'annule pas sur J et, comme f' et f^{-1} sont n fois dérivables (resp. de classe $\mathscr{C}^n$), par composition $f' \circ f^{-1}$ aussi. Finalement, par quotient $(f^{-1})'$ est n fois dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^n$) et donc f^{-1} est $n+1$ fois dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^{n+1}$). D'où la propriété au rang $n+1$. On en déduit la proposition par récurrence. □

III Accroissements finis

1) Extremum local et dérivée

Définition (extremum local). *Soit $a \in D$. On dit que f admet un maximum (resp. un minimum) local en a si il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in D \cap]a-\eta\,; a+\eta[$, $f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $f(x) \geqslant f(a)$). On dit que f admet un extremum local en a si f admet un maximum ou un minimum local en a.*

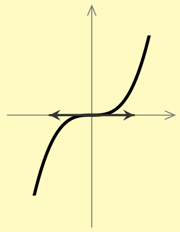


Proposition. *Supposons que f est dérivable sur D et que a un élément de D qui **n'est pas une extrémité** d'un des intervalles de D. Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.*

⚠ L'hypothèse que a n'est pas une extrémité est indispensable. En effet, le résultat ci-dessus est faux si a est une borne de I. Par exemple, sur le dessin ci-contre, f a bien une dérivée nulle en tous les extrema locaux intérieurs (géométriquement, cela se traduit par une tangente horizontale) mais f admet des extrema locaux en x_1 et en x_2 (et même un maximum global en x_1), et pourtant f' ne s'annule ni en x_1 ni en x_2 !

DÉMONSTRATION.

La réciproque est fausse ! Par exemple, si f est la fonction cube, alors $f'(0) = 0$ mais f n'admet pas d'extremum local en 0 !



□

Remarque : Le fait que $a \in D$ ne soit pas une extrémité d'un des intervalles de D est une autre manière de dire que a est un point intérieur de D (cf. dernier paragraphe du chapitre 13).

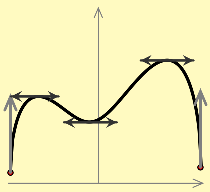
2) Théorème de Rolle

Soient a et b deux réels de I tels que $a < b$.

Théorème (théorème de Rolle). *Supposons que f continue sur $[a\,;b]$, dérivable sur $]a\,;b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration.

f n'a pas besoin d'être dérivable en a ou en b :



□

Il n'y a pas forcément unicité du point c. De plus, chacune des hypothèses du théorème est nécessaire :

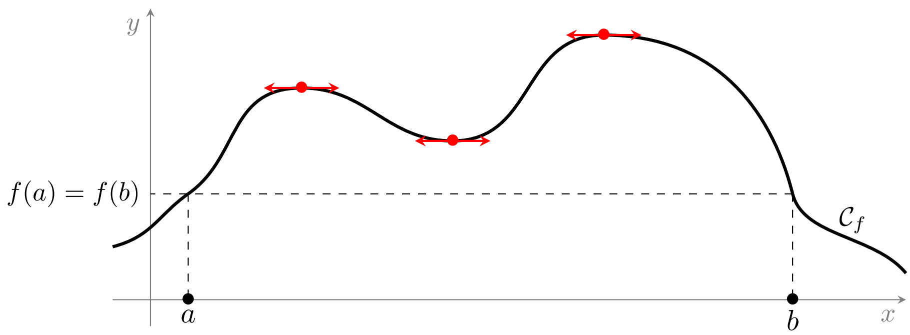
- $f(a) = f(b)$. Un contre-exemple est la fonction $x \mapsto x$ sur $[0\,;1]$.
- f est continue sur $[a\,;b]$, Un contre-exemple est la fonction définie sur $[0\,;1]$ par

$$x \mapsto \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \in\,]0\,;1] \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- f dérivable sur $]a\,;b[$. Un contre-exemple est la fonction $f : x \in [-1\,;1] \longmapsto |x|$.

Interprétation graphique du théorème de Rolle : il existe un point c de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f d'abscisse dans $]a\,;b[$ en lequel la tangente est horizontale.

Dans l'exemple ci-dessous, il existe trois points d'abscisse dans $]a\,;b[$ en lesquels la tangente (en rouge) à $\mathcal{C}_f$ est horizontale.



Exemple : *Soit $n \geqslant 3$. Supposons que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est deux fois dérivable et qu'elle s'annule n fois. Montrons que f'' s'annule au moins $n - 2$ fois.*

Cet exercice est un énorme classique : on applique le théorème de Rolle tour à tout et, à chaque fois, on « perd » potentiellement une valeur d'annulation.

Par récurrence, on peut montrer que si f est k fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule n fois (avec $n \geqslant k$), alors $f^{(k)}$ s'annule au moins $n-k$ fois.

3) L'égalité des accroissements finis

Soient a et b dans I tels que $a < b$.

Théorème (égalité des accroissements finis). *Si f est continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$. Alors il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

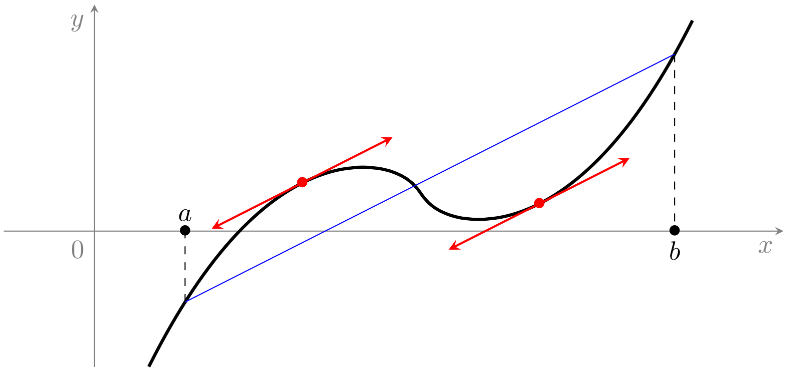
Il n'y a pas forcément unicité du point c.

Démonstration.

□

Interprétation graphique du théorème des accroissements finis : Notons $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ les points de la courbes d'abscisses respectives a et b. Il existe un point c de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f d'abscisse dans $]a\,;b[$ en lequel la tangente est parallèle à la droite (AB).

Dans l'exemple ci-dessous, il existe deux points d'abscisse dans $]a\,;b[$ en lesquels la tangente (en rouge) à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite (AB) (en bleu).



4) Caractérisation des fonctions dérivables monotones

a) Le cas des fonctions constantes

le théorème ci-contre est faux si I n'est pas intervalle. Par exemple considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ qui vaut 1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et 0 sur $\mathbb{R}_-^*$. Elle sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, sa dérivée est la fonction nulle sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et pourtant elle n'est pas constante sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Une fonction constante sur I est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction nulle sur I. La réciproque est vraie :

Théorème (caractérisation des fonctions constantes). *La fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est constante sur l'**intervalle** I si et seulement si f est dérivable sur I et f' est nulle sur I.*

Démonstration.

□

b) Le cas des fonctions monotones

Théorème. *Supposons que f est dérivable sur I.*

- *f est croissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.*
- *f est décroissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.*

Démonstration. Le deuxième point se déduit du premier en remplaçant f par $-f$.

□

c) Le cas des fonctions strictement monotones

Proposition. *Supposons que f est dérivable sur I.*

- *Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement croissante sur I.*
- *Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement décroissante sur I.*

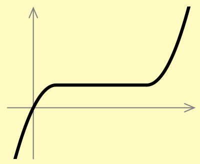
Démonstration. Le deuxième point se déduit du premier en remplaçant f par $-f$. Supposons que $f'(z) > 0$ pour tout $z \in I$. Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$. Le théorème des accroissements finis appliqué à f dérivable sur $[x\,;y]$ assure qu'il existe $t \in]x\,;y[$ tel que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(t) > 0.$$

Ainsi $f(y) > f(x)$. Nous en déduisons que f est strictement croissante. □

La réciproque est fausse. Par exemple la fonction $x \longmapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et pourtant sa dérivée s'annule en 0.

Ci-dessous le graphe d'une fonction croissante non strictement croissante.



Proposition. *Supposons que f est dérivable sur I. La fonction f est strictement croissante (respectivement décroissante) si et seulement si f' est positive (respectivement négative) sur I et n'est identiquement nulle sur aucun intervalle non vide et non réduit à un point.*

Démonstration. • Supposons f est strictement croissante (respectivement décroissante), alors f est croissante (respectivement décroissante) donc f' positive (respectivement négative). Raisonnons par l'absurde et supposons que f' est nulle sur un intervalle non vide est non réduit à un point. Alors f est constante sur cet intervalle et n'est donc pas strictement croissante : c'est absurde. On en déduit que f est non identiquement nulle sur aucun intervalle non vide et non réduit à un point.

- Réciproquement, supposons que f' est positive (respectivement négative) sur I et n'est identiquement nulle sur aucun intervalle non vide et non réduit à un point. Alors f est croissante (respectivement décroissante). Raisonnons par l'absurde et supposons qu'elle ne l'est pas strictement. Il existe alors $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$ et $f(a) \geqslant f(b)$ (respectivement $f(a) \leqslant f(b)$) donc $f(a) = f(b)$. Mais la monotonie de f entraîne que f est constante sur $[a\,;b]$ donc f' est nulle sur $[a\,;b]$: absurde. Ainsi la monotonie est stricte. □

Corollaire. *Supposons que f est dérivable sur I. Si $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points de I, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante).*

5) Inégalité des accroissements finis et fonctions Lipschitziennes

a) Notion de fonction Lipschitzienne

Conformément au programme, c'est le moment de parler de ces fonctions qui, pourtant, ne sont pas dérivables a priori. Mais elles ont bien leur place ici puisqu'elles sont définies avec une condition portant sur ses taux d'accroissements.

Définition. *Soit $K \in \mathbb{R}_+$. On dit que f est une fonction K-Lipschitzienne sur D si :*

$$\forall (x, y) \in D^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant K\,|x - y|.$$

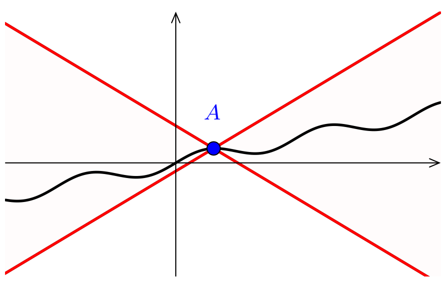
On dit que f est Lipschitzienne sur D si il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que f est K-Lipschitzienne sur D.

Remarque : Autrement dit f est K-Lipschitzienne sur D si, pour tous éléments distincts x et y de I, $\left|\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leqslant K$.

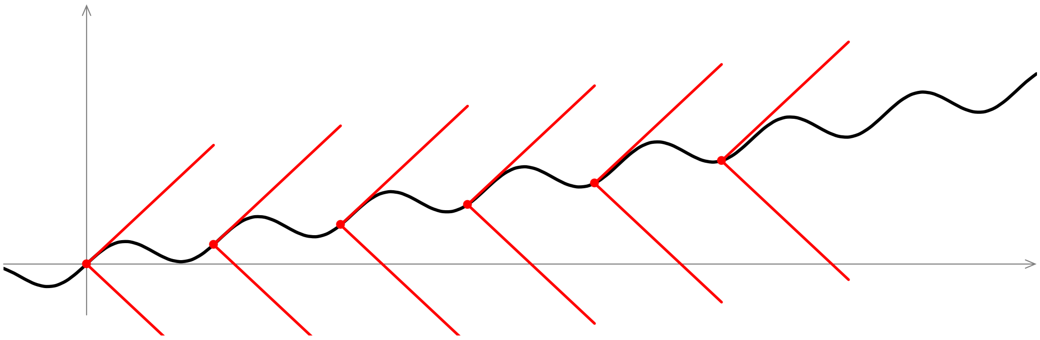
Interprétation géométrique.

- Les coefficients directeurs de toutes les cordes de $\mathcal{C}_f$ sont comprises entre $-K$ et K.
- Pour tout $a \in D$, si $x \geqslant a$, alors $-K(x-a) \leqslant f(x) - f(a) \leqslant K(x-a)$. Si $x \leqslant a$, alors $K(x-a) \leqslant f(x) - f(a) \leqslant -K(x-a)$. En d'autres termes, le graphe de f est compris dans le cône formé par ces deux droites d'équation $y = K(x-a) + f(a)$ et $y = -K(x-a) + f(a)$.

Ce sont les deux droites de pente $\pm K$ passant par le point du graphe d'abscisse a (et donc d'ordonnée $f(a)$)



Et donc, en chaque point a de D, la direction que peut prendre la fonction se fait avec une pente comprise entre K et $-K$.



Exemples :

- *Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'inégalité triangulaire renversée assure que $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$. Ainsi la fonction valeur absolue est 1-Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.*
- *Si f est affine sur $\mathbb{R}$ de coefficient directeur $c \in \mathbb{R}$, alors f est $|c|$-Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.*
- *La fonction inverse....*
- *La fonction carré....*

La réciproque est fausse comme on vient de le voir dans les exemples ci-dessus.

Théorème. *Si f est Lipschitzienne sur D, alors f est continue sur D.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que f est K-Lipschitzienne sur D. Soit $a \in D$. Pour tout $x \in D$, on a alors $|f(x) - f(a)| \leqslant K\,|x - a|$. Par théorème d'encadrement, on en déduit que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$ et donc f est continue en a. Ainsi f est continue sur D. $\square$

Par passage à la limite dans une inégalité large, on obtient :

Proposition. *Soit $K \in \mathbb{R}_+^*$. Si f est K-Lipschitzienne et dérivable sur D, alors f' est bornée par K sur D.*

b) L'inégalité des accroissements finis

On vient de voir qu'une fonction dérivable qui est Lipschitzienne a une dérivée bornée. La réciproque est vraie sur un intervalle :

Théorème (IAF). *Soit $K \in \mathbb{R}_+$. Si f est dérivable sur I et f' est bornée par K sur I, alors f est K-Lipschitzienne sur I, c'est-à-dire :*

$$\forall (x,y) \in I^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant K\,|x-y|.$$

Démonstration.

□

Remarque : Si I est un segment et si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, alors f' est continue sur I donc le théorème des bornes atteintes entraîne que f' est bornée. On en déduit que f est K-Lipschitzienne avec K la borne supérieure de $|f'|$ sur I.

Ces trois versions ne sont pas explicitement au programme mais sont très classiques... et absolument analogue à la version « officielle » quand on connaît sa démonstration.

Théorème (Autres versions de l'IAF). *Supposons que f est dérivable sur I. Soient m et M des réels.*

- *Supposons que f' est majorée par M sur I. Alors*

$$\forall (x,y) \in I^2, \qquad y \leqslant x \quad \Longrightarrow \quad f(x) - f(y) \leqslant M(x-y).$$

- *Supposons que f' est minorée par m sur I. Alors*

$$\forall (x,y) \in I^2, \qquad y \leqslant x \quad \Longrightarrow \quad f(x) - f(y) \geqslant m(x-y).$$

- *Supposons que f' est majorée par M et minorée par m sur I. Alors*

$$\forall (x,y) \in I^2, \qquad y \leqslant x \quad \Longrightarrow \quad m(x-y) \leqslant f(x) - f(y) \leqslant M(x-y).$$

On peut avoir $y = x$, mais attention, y doit être inférieur à x.

Démonstration. Supposons que f soit dérivable sur I. Soient $(x,y) \in I^2$ tels que $x \leqslant y$. L'égalité des accroissements finis assure qu'il existe $c \in \,]x\,;y[\, \subset I$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ et donc $f(x) - f(y) = f'(c)\,(x-y)$. On conclut dans chacun des trois cas en utilisant le fait que $f'(c) \leqslant M$ (respectivement $f'(x) \geqslant m$ et $m \leqslant f'(c) \leqslant M$) et que $x - y \geqslant 0$. □

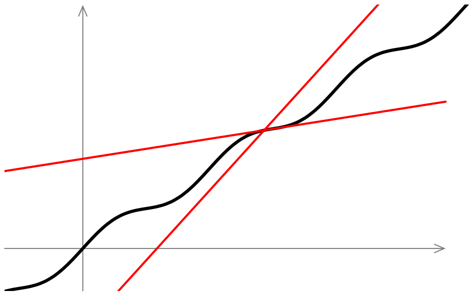
Interprétation cinématique : Si on roule entre 90 km/h et 130 km/h pendant 4h, alors on parcourt entre 360 et 520 km.

Remarque : En particulier, si $m \leqslant f' \leqslant M$ sur un intervalle du type $[a\,;+\infty[$ (avec $a \in \mathbb{R}$) alors, pour tout $x \geqslant a$, $m(x-a) \leqslant f(x) - f(a) \leqslant M(x-a)$ donc

$$m(x-a) + f(a) \leqslant f(x) \leqslant M(x-a) + f(a)$$

En d'autres termes, f est comprise entre les fonctions affines de pentes m et M qui coïncident avec f en a. Cela peut par exemple être pratique pour calculer des limites en $+\infty$ (par exemple si $m > 0$) via le théorème de minoration/majoration.

Interprétation géométrique : Le graphe de f est compris dans le « cône » formé par les droites de pentes m et M coupant $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.



Encore cette inégalité très classique !

Encore cette inégalité très classique !

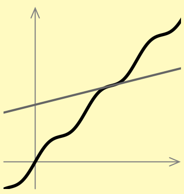
Exemples :

- *La fonction* $\sin$....

- *La fonction* $\exp$....

- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$, *on a* $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.

Cela se voit très bien : si la pente est plus raide que m en tout point, alors $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$ et il suffit d'utiliser le théorème de la bijection pour conclure.



- *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dérivable. On suppose que* f' *est minorée par* $m > 0$ *sur* $\mathbb{R}$*. Montrer que* f *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*.*

c) Applications à l'étude des suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Dans la partie C du chapitre 14, nous avons étudié les suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Nous avons principalement utilisé le théorème de la limite monotone. Notre démarche présente deux inconvénients :

- Elle ne fonctionne pas si on ne trouve pas d'intervalle stable par f sur lequel f est monotone ou sur lequel $x \longmapsto f(x) - x$ n'est pas de signe constant.
- Elle ne donne pas d'information sur la vitesse de convergence.

Par exemple, si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, a-t-on plutôt $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{C}{2^n}$ (avec $C > 0$) auquel cas la convergence vers ℓ est très rapide ou plutôt $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{C}{\ln(n)}$ auquel cas la convergence est assez lente ?

Savoir que f est K-Lipschitzienne pour une valeur de $K \in [0\,;1[$ va nous permette de lever ces deux inconvénients. Soyons plus précis.

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in I$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

- $f(I) \subset I$.
- f admet un point fixe ℓ sur I.
- Il existe $K \in [0\,;1[$ tel que f est K-Lipschitzienne sur I. On dit que f est contractante. Typiquement, si on sait que f est dérivable sur I et que f' bornée par un réel strictement inférieur à 1 sur I, alors cette condition est remplie grâce à l'IAF.

Il faut absolument que K soit strictement inférieur à 1 pour que cette démarche fonctionne.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(u_n) - f(\ell)| \leqslant K\,|u_n - \ell|$ et donc $|u_{n+1} - \ell| \leqslant K\,|u_n - \ell|$. Par récurrence, on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \ell| \leqslant K^n\,|u_0 - \ell|.$$

Si on sait seulement que $u_{n_0} \in I$ pour un $n_0 \in \mathbb{N}^*$, alors, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$|u_n - \ell| \leqslant K^{n-n_0}\,|u_{n_0} - \ell|.$$

Comme $0 \leqslant K < 1$, $K^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc, par théorème d'encadrement, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Exemple : *Étudions la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in [0\,;2]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$.*

On a

$$\begin{aligned} K < 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \sqrt{2-\sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4} < 2 - \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow 1 < 8 - 4\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow 4\sqrt{2} < 7 \\ &\Leftrightarrow 32 < 49 \end{aligned}$$

donc $0 < K < 1$.

Remarques :

- Sous les hypothèses précédentes avec $0 < K < 1$, le point fixe ℓ est unique. En effet :

- Dans le cas où $K \in \,]0\,;1[$, si $n_0 = 0$ et que u_0 suffisamment proche de ℓ, disons tel que $|u_0 - \ell| \leqslant 1$, alors
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \ell| \leqslant K^n.$$
On se donne $\varepsilon > 0$. On a :

Le script Python suivant (sous réserve d'avoir implémenté au préalable f, K, u_0, ε dans les variables `f,K,u0,eps`) calcule une approximation de ℓ à ε près.

```
import numpy as np
x=x0
n=int(np.log(eps)/np.log(K))+1
for k in range(n):
    x=f(x)
print(x)
```

- Soit g soit une fonction dont on cherche l'unique valeur d'annulation a_0 sur I. Supposons que l'on ait trouvé une fonction f vérifiant les hypothèses de ce paragraphe telle que $g(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = x$ pour tout $x \in I$. Trouver a_0 revient donc à trouver l'unique point fixe de f. Pour cela il suffit donc de considérer la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in I$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Sa limite est alors a_0.

Exemple : *On vérifie aisément que* $f : x \longmapsto \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x}$ *est dérivable sur* $I = [1\,;2]$ *et que* $f([1\,;2]) \subset [1\,;2]$. *De plus elle* $\sqrt{2}$ *pour unique point fixe sur* $[1\,;2]$. *Pour tout* $x \in [1\,;2]$, *on a* $f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x^2}$. *Comme* $\dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant 1$, *on obtient* $-\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$. *Ainsi* f' *est bornée par* $K = \dfrac{1}{2}$ *sur* $[1\,;2]$. *Ainsi le script suivant suivante calcule une approximation de* $\sqrt{2}$ *à* 10^{-4} *près :*

En l'exécutant, on obtient `1.414213562373095`.

```
u=1
n=int(np.log(0.0001)/np.log(1/2))+1
for k in range(n):
    u=u/2+1/u
print(u)
```

6) Théorème de la limite de la dérivée

Lorsque f est dérivable en a et que f' admet une limite finie ℓ en a, il est naturel de penser que f est dérivable en a et que $f'(a) = \ell$. En fait cette affirmation traduit la continuité de f' en a et, comme on l'a vu dans le paragraphe II.1, une fonction peut être dérivable en a sans que sa dérivée ne soit continue en a. Examinons cela plus en détail.

a) Version dérivable

Théorème (de la limite de la dérivée). *Soit $a \in D$. On suppose que :*

- *f est continue sur D.*
- *f est dérivable sur $D \backslash \{a\}$.*
- *Il existe $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $f'(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} \ell$.*

Alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$. En particulier :

- *Si $\ell = \pm\infty$, f n'est pas dérivable en a.*
- *Si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$. De plus, f' est continue sur D.*

La notation $\underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow}$ signifie que l'on regarde la limite de la restriction de f à $D \backslash \{a\}$.

Dire que f est dérivable sur $D \backslash \{a\}$ ne veut pas dire que f n'est pas dérivable en a. Disons qu'on ne le sait pas au moment d'appliquer ce théorème (typiquement car les théorèmes d'opération n'ont pas permis de le montrer).

Démonstration. Traitons le cas où $\ell \in \mathbb{R}$ (les autres sont analogues).

□

Si f' n'admet pas de limite en a, alors **ON NE PEUT RIEN CONCLURE**. En effet ce théorème est seulement une condition suffisante : f peut être dérivable en a sans que f' y soit continue (cf. exemple du paragraphe II.1). Dans ce cas, il n'y a plus le choix : on forme le taux d'accroissement et on cherche s'il admet une limite ou non.

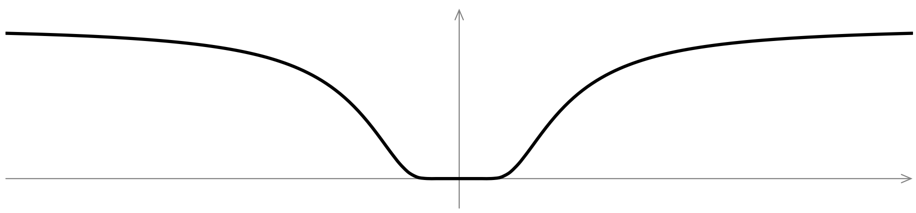
b) Version $\mathscr{C}^1$

Théorème (de la limite de la dérivée– version $\mathscr{C}^1$). *Soit $a \in D$. On suppose que :*

- *f est continue sur D.*
- *f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $D \backslash \{a\}$.*
- *Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} \ell$.*

Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D avec $f'(a) = \ell$.

Exemple : *Considérons $g : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto e^{-1/x^2}$. Montrons que f est prolongeable en une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.*



IV Extension aux fonctions à valeurs complexes

a) Dérivabilité d'une fonction à valeurs complexes

On ne considère que des fonctions de la variable réelle. La notion de fonction de la variable complexe qui est dérivable (on parle de fonction holomorphe) est totalement hors-programme.

Dans ce paragraphe f désigne désormais une fonction définie sur D et à valeurs complexes. La définition d'une fonction dérivable est la même que dans le cas réel : elle utilise la limite du taux d'accroissement et on a vu dans le chapitre précédent quel était le sens donné à la limite d'une fonction de la variable complexe.

Définition. *Soit $a \in D$. On dit que f est dérivable en a lorsque la fonction*

$$\tau_a : \left\{ \begin{array}{ccc} D\backslash\{a\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \right.$$

admet une limite finie en a. Cette limite est alors appelée le nombre dérivé de f en a et est notée $f'(a)$.

Si f est dérivable en tout point de D, on dit que f est dérivable sur D. On note $\mathscr{D}^1(D,\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur D et à valeurs complexes.

On peut toujours se ramener à des fonctions à valeurs réelles :

Théorème. *Soit $a \in D$. La fonction f est dérivable en a si et seulement si les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables en a. Dans ce cas, $f'(a) = \mathrm{Re}(f)'(a) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f)'(a)$, $\mathrm{Re}(f') = \mathrm{Re}(f')$ et $\mathrm{Im}(f') = \mathrm{Im}(f)'$.*

Démonstration. Pour tout $x \in D\backslash\{a\}$, on a $x-a \in \mathbb{R}$ donc

$$\mathrm{Re}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) = \frac{\mathrm{Re}(f(x))-\mathrm{Re}(f(a))}{x-a}$$

et

$$\mathrm{Im}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) = \frac{\mathrm{Im}(f(x))-\mathrm{Im}(f(a))}{x-a}.$$

La fonction f est dérivable en a si et seulement si son taux d'accroissement τ_a admet une limite finie en a si et seulement si (cf. chapitre précédent) $\mathrm{Re}(\tau_a)$ et $\mathrm{Im}(\tau_a)$ admettent des limites finies en a si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables en a (cf. formules ci-dessus). Dans ce cas, on a :

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \tau_a(x) = \lim_{x\to a} \mathrm{Re}(\tau_a)(x) + \mathrm{i}\lim_{x\to a} \mathrm{Im}(\tau_a)(x) = \mathrm{Re}(f)'(a) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f)'(a).$$

Par unicité des parties réelles et imaginaires, on a alors $\mathrm{Re}(f') = \mathrm{Re}(f')$ et $\mathrm{Im}(f') = \mathrm{Im}(f)'$. □

b) Extension de certains résultats

A l'aide du théorème précédent (faisant le lien avec les fonctions à valeurs réelles), plusieurs résultats vus dans ce chapitre se prolongent aux fonctions à valeurs complexes, typiquement (presque) tous ceux des paragraphes I et II :

- Une fonction dérivable à valeurs complexes est continue.
- Les notions de dérivabilité à gauche et à droite se prolongent et et le lien avec la dérivabilité reste valable. La méthode de raccordement de solutions d'équations différentielles est la même.
- Les opérations algébriques sur les fonctions dérivables sont encore valables.
- On généralise aussi les notions de dérivées successives et, pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on note $\mathscr{C}^n(D, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ (n fois dérivables et telles que $f^{(n)}$ est continue) sur D et à valeurs complexes. Les opérations algébriques restent valables encore, notamment la formule de Leibniz.
- La notion de fonction Lipschitzienne se prolonge en mettant des modules au lieu des valeurs absolues...

⚠ Le théorème de dérivabilité d'une composée de fonctions à valeurs complexes pourrait se prolonger mais le programme n'autorise pas de parler de fonctions dérivables de la variable complexe. Une seule exception (que l'on a déjà évoquée et montrée dans le chapitre 6) :

Théorème. *Si $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{C}$ est dérivable sur D, alors la fonction $\mathrm{e}^{\varphi} : x \longmapsto \mathrm{e}^{\varphi(x)}$ est dérivable sur D et $(\mathrm{e}^{\varphi})' = \varphi'\mathrm{e}^{\varphi}$.*

Toutefois de nombreux résultats ne sont plus valables pour des fonctions à valeurs complexes, typiquement tout ceux utilisant les relations d'ordre qui n'ont plus de sens :

- La condition nécessaire d'existence d'extremum local n'a pas de sens (puisque les extrema d'une fonction à valeurs complexes n'ont pas de sens).
- Et donc le théorème de Rolle qui en découle n'est plus valable a priori. On pourrait tenter de l'appliquer à $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ mais on obtiendrait l'existence de c tel que $\mathrm{Re}(f)'(c) = 0$ et de d tel que $\mathrm{Im}(f)'(d) = 0$. Rien ne dit que $c = d$! Voyons un exemple pour définitivement enterrer le théorème de Rolle complexe :

  La fonction $\varphi : t \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ est continue sur $[0\,;2\pi]$, dérivable sur $]0\,;2\pi[$ et $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$. Pourtant $\varphi' : t \longmapsto \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ ne s'annule pas sur $]0\,;2\pi[$.
- Et donc l'égalité des accroissement finis (qui est équivalente au théorème de Rolle) est fausse.
- Il n'y a pas de sens de parler de variations de fonctions à valeurs complexes dont le critère avec la positivité de la dérivée (notion qui n'a pas de sens non plus) est à oublier.

⚠ Mais les autres version de l'IAF n'ont aucun sens puisqu'on y parle de maximum et minimum.

Pourtant, bien qu'ils découlent de l'égalité des accroissements finis, certains résultats restent vrais : c'est le cas de la caractérisation des fonctions constantes, de l'inégalité des accroissements finis (la première version avec la dérivée bornée) et le théorème de la limite de la dérivée. Voyons ça :

Théorème (caractérisation des fonctions constantes). *La fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est constante sur l'**intervalle** I si et seulement si f est dérivable sur I et f' est nulle sur I.*

DÉMONSTRATION. Si f est constante sur I, alors son taux d'accroissement est la fonction nulle en tout point de I. Il s'ensuit que f est dérivable sur I et de dérivée nulle de la même manière que dans le cas réel. Réciproquement, supposons que f est dérivable sur I et f' nulle sur I. Alors $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables sur I et $\mathrm{Re}(f)' = \mathrm{Re}(f') = 0$ et $\mathrm{Im}(f)' = \mathrm{Im}(f') = 0$. Le théorème de caractérisation des fonctions constantes (version réelle) assure que $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des fonctions constantes sur I. Il s'ensuit que f est constante sur I. □

Théorème (IAF). *Soit $K \in \mathbb{R}_+$. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est dérivable sur I et f' est bornée par K sur I, alors f est K-Lipschitzienne sur I, c'est-à-dire :*

$$\forall (x, y) \in I^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant K\,|x - y|.$$

DÉMONSTRATION. Le programme impose de proposer une démonstration utilisant les intégrales. Nous le ferons dans le chapitre 24 mais proposons d'ores et déjà une démonstration :

Supposons que f dérivable sur I et f' bornée par K. Soient x et y dans I. Notons θ un argument de $f(x) - f(y)$. Alors $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}(f(x) - f(y))$ est un réel. Notons $\varphi : t \longmapsto \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f(t))$. Il s'agit d'une fonction dérivable sur I (car partie réelle d'une fonction dérivable multipliée par une constante) et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f'(t))$ donc

$$|\varphi'(t)| \leqslant |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f'(t)| = |f'(t)| \leqslant K.$$

Comme φ est à valeurs réelles, l'IAF (version réelle), assure que $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant K|x - y|$. Mais, on a :

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(y)| &= \left|\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f(x)) - \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f(y))\right| \\ &= \left|\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f(x) - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f(y))\right| \\ &= \left|\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}(f(x) - f(y)))\right|. \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}(f(x) - f(y))$ est réel, on obtient :

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}(f(x) - f(y))\right| = |f(x) - f(y)|$$

et donc $|f(x) - f(y)| \leqslant K\,|x - y|$. □

Théorème (de la limite de la dérivée). *Soit $a \in I$. On suppose que :*

- *$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue sur D.*
- *f est dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^1$) sur $D \backslash \{a\}$.*
- *Il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $f'(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} \ell$.*

Alors f est dérivable en a, $f'(a) = \ell$ et f' est continue sur en a (respectivement f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D).

Pas de limite égale à $\pm\infty$ pour une fonction à valeurs complexes !

DÉMONSTRATION. Puisque $f'(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} \ell$, $\mathrm{Re}(f)'(x) = \mathrm{Re}(f'(x)) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(f)'(x) = \mathrm{Im}(f'(x)) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(\ell)$. Les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ satisfont toutes les hypothèses du théorème de la limite de la dérivée version réelle donc $\mathrm{Re}(f)$ est dérivable sur a avec $\mathrm{Re}(f)'(a) = \mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(f)$ est dérivable sur a avec $\mathrm{Im}(f)'(a) = \mathrm{Im}(\ell)$. Ainsi f est dérivable sur a avec $f'(a) = \ell$. Ainsi f' est continue en a et donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D si f l'était sur $D \backslash \{a\}$. □