

Dénombrement

Dénombrer un ensemble fini consiste à déterminer son cardinal, c'est-à-dire à compter le nombre d'éléments de cet ensemble. L'objectif de ce chapitre est de présenter quelques éléments de dénombrement qui seront utiles aux calculs de probabilités dans les chapitres suivants (dans les situations dites « d'équiprobabilité »). Conformément au programme, nous nous contenterons d'une notion intuitive du cardinal d'un ensemble et nous admettrons certaines propriétés particulièrement intuitives

I Cardinal d'un ensemble fini

1) Ensemble fini et cardinal

Définition. On dit qu'un ensemble E est fini s'il contient un nombre fini d'éléments. Le nombre d'éléments d'un ensemble fini est appelé son cardinal et noté $\text{card}(E)$, $|E|$ ou $\#E$.

Remarque : Cette définition est très peu rigoureuse puisqu'elle tourne en rond concernant le terme « fini ». La « vraie » définition est la suivante : on dit qu'un ensemble E est fini si $E = \emptyset$ (auquel cas son cardinal est nul) ou bien s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que E et $\llbracket 1; n \rrbracket$ sont en bijection. L'entier n est alors unique et appelé le cardinal de E .

Exemples :

- $\text{card}(\emptyset) = 0$, $\text{card}(\{0\}) = 1$, $\text{card}(\llbracket 1; 6 \rrbracket) = 6$.
- L'ensemble $\{R; I; C; H; E; L; I; E; U\} = \{R; I; C; H; E; L; U\}$ contient 7 éléments donc le cardinal de $\{R; I; C; H; E; L; I; E; U\}$ est 7.

2) Opérations sur les ensembles finis

Théorème. Soient A et B deux ensembles finis **disjoints**. Alors $A \cup B$ est fini et

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B).$$

Par récurrence :

Théorème (cardinal d'une union disjointe). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A_1, \dots, A_n des ensembles finis et **deux à deux disjoints**. Alors $\bigcup_{i=1}^n A_i$ est fini et

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{card}(A_i).$$

Théorème (cardinal d'un produit cartésien). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E_1, \dots, E_n des ensembles finis. Alors le produit cartésien $E_1 \times \dots \times E_n$ est fini et

$$\text{card}(E_1 \times \dots \times E_n) = \prod_{i=1}^n \text{card}(E_i).$$

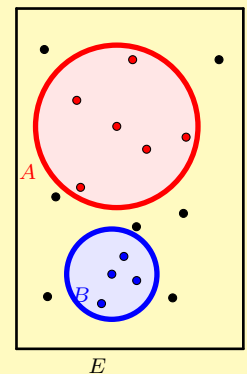
En particulier, si E est un ensemble fini, E^n est fini et $\text{card}(E^n) = (\text{card}(E))^n$.

Exemple : $\text{card}(\llbracket 1; 6 \rrbracket)^2 = 6^2 = 36$: il y a 36 résultats possibles lorsqu'on lance deux dés (distinguables) à 6 faces.

La branche des mathématiques consistant à faire du dénombrement s'appelle la combinatoire.

Ces propriétés admises ont été montrées dans le paragraphe IV.2 (qui est hors-programme mais instructif) du chapitre 15.

Rappelons que, par convention, lorsqu'on décrit un ensemble par extension, chaque élément n'y figure qu'une seule fois. Se donner une bijection de $\llbracket 1; n \rrbracket$ revient à écrire E sous la forme $\{x_1; \dots; x_n\}$, les x_i , $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, étant tous distincts. Autrement dit cela revient à numéroter les éléments de E .



Il existe une formule pour l'union d'ensembles finis non nécessairement disjoints appelée formule du crible. Celle-ci est hors programme (sauf dans le cas où $n = 2$) mais fait l'objet d'un exercice de la feuille de TD associée.

3) Parties d'un ensemble fini

Théorème (cardinal d'une partie). Soit E un ensemble fini. Toute partie A de E est finie et $\text{card}(A) \leq \text{card}(E)$, avec égalité si et seulement si $A = E$.

Corollaire. Une intersection d'ensembles dont l'un (au moins) est fini est un ensemble fini.

DÉMONSTRATION. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles indexée par un ensemble I non vide. Supposons qu'il existe $i_0 \in I$ tel que A_{i_0} est fini. Puisque l'intersection $\bigcap_{i \in I} A_i$ est incluse dans A_{i_0} , elle est finie d'après le théorème précédent. \square

Proposition. Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E . Alors

1. $\text{card}(B \setminus A) = \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.
2. $\text{card}(\bar{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$.

DÉMONSTRATION. Le premier découle du fait que B s'écrit comme l'union disjointe de $B \setminus A$ et de $A \cap B$. Pour le deuxième, on applique le premier avec $B = E$. \square

Proposition (formule de Poincaré). Soient A et B deux ensembles finis. Alors $A \cup B$ et $A \cap B$ sont finis et

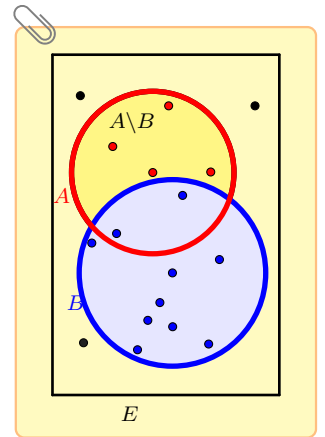
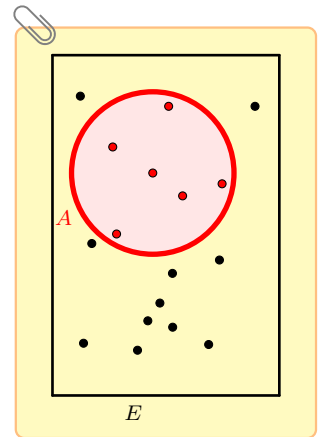
$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

DÉMONSTRATION.

Exemple : Lors du mariage de Amy et Sheldon, on sait que 121 invités connaissent Amy, 108 connaissent Sheldon et 81 connaissent les deux à la fois. Sachant que chaque invité connaît au moins le marié ou la mariée, combien a-t-il d'invités en tout ?

Remarques :

- Comme on l'a dit plus haut, cette formule se généralise à une union quelconque mais elle est hors-programme. Le cas d'union de trois ensembles s'obtient facilement en appliquant plusieurs fois la formule de Poincaré :



La encore c'est intuitif : pour compter les éléments d'une union de deux ensembles, on ajoute les éléments de chaque ensemble mais on retranche les éléments qui sont communs aux deux ensembles (car on les a comptés en double).

- Il découle de la formule de Poincaré que, si A et B sont finis, alors $A \cup B$ est finie et $\text{card}(A \cup B) \leq \text{card}(A) + \text{card}(B)$. Par récurrence, on obtient que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous ensembles A_1, \dots, A_n finis, $\bigcup_{k=1}^n A_k$ est fini et

$$\text{card}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \text{card}(A_k).$$

De plus il y a égalité si et seulement si l'union est disjointe.



C'est faux pour une union infinie d'ensembles finis. Par exemple

$$\mathbb{N} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{k\}.$$

4) Applications entre deux ensembles finis

Théorème. Soient E et F deux ensembles finis.

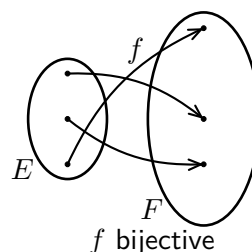
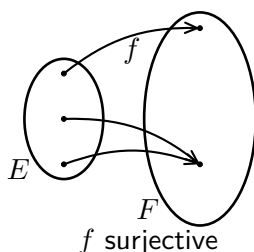
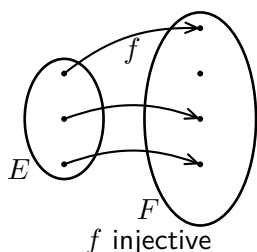
- Il existe $f : E \rightarrow F$ injective si et seulement si $\text{card}(E) \leq \text{card}(F)$.
- Il existe $f : E \rightarrow F$ surjective si et seulement si $\text{card}(E) \geq \text{card}(F)$.
- Il existe $f : E \rightarrow F$ bijective si et seulement si $\text{card}(E) = \text{card}(F)$.



Ce théorème est aussi prouvé dans le paragraphe IV.2 du chapitre 15.

Remarques :

- Ce théorème est très intuitif une fois de plus. Il se voit très bien sur des patatoïdes :



- Ce théorème ne dit **PAS** que si $f : E \rightarrow F$ et si $\text{card}(E) \leq \text{card}(F)$ alors f est injective. Il ne dit pas que, si $\text{card}(F) \leq \text{card}(E)$ alors f est surjective. Et il ne dit pas que, si $\text{card}(F) = \text{card}(E)$ alors f est bijective. Il suffit de considérer une application constante pour s'en convaincre.
- Pour faire du dénombrement, on utilisera surtout le sens direct de ce théorème que l'on peut reformuler ainsi : soit E et F des ensembles finis et $f : E \rightarrow F$. Alors :
 - ★ Si f est injective, alors $\text{card}(E) \leq \text{card}(F)$.
 - ★ Si f est surjective, alors $\text{card}(E) \geq \text{card}(F)$.
 - ★ Si f est bijective, alors $\text{card}(E) = \text{card}(F)$.

On peut même généraliser ce théorème :

Théorème. Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \rightarrow F$.

- Si f est injective et F est fini, alors E est fini et $\text{card}(E) \leq \text{card}(F)$.
- Si f est surjective et E est fini, alors F est fini et $\text{card}(E) \geq \text{card}(F)$.
- Si f est bijective et E est fini, alors F est fini et $\text{card}(E) = \text{card}(F)$.

La contraposée du premier point devient :

Théorème (principe des tiroirs de Dirichlet – version abstraite). Soient E et F des ensembles avec F fini. Si E est infini ou si E est fini avec $\text{card}(E) > \text{card}(F)$, alors il n'existe pas d'injection de E dans F .



Ainsi, un moyen simple de prouver que deux ensembles finis ont le même cardinal consiste à exhiber une bijection entre eux (mais l'utilisation de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme).

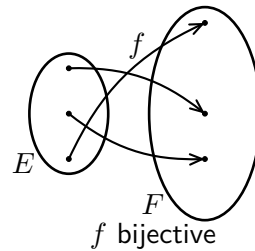
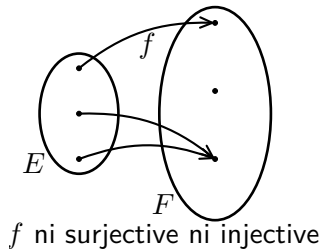
Dire qu'il n'existe pas d'injection de E dans F , signifie que, si f est une fonction de E dans F , alors il existe un élément de F qui admet (au moins) deux antécédents.

On en déduit une reformulation qui donne son nom au principe : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si on range $n + 1$ (ou plus) chaussettes dans n tiroirs, alors il existe au moins un tiroir qui contient deux chaussettes (ou plus).

⚠ Pour terminer ce paragraphe, insistons sur le fait que $\text{card}(E) = \text{card}(F)$ n'entraîne pas que toute application de f de E dans F est bijective. On a toutefois le résultat fondamental suivant :

Théorème. Soient E et F deux ensembles **finis de même cardinal** et soit $f : E \rightarrow F$. Alors :

$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective}$



Remarques :

- En particulier, si f va d'un ensemble **fini** dans lui-même, elle est injective si et seulement si elle est surjective, si et seulement si elle est bijective.
- En général, la preuve de l'injectivité d'une application est accessible. C'est la surjectivité qui est plus difficile. Si f est une application entre deux ensembles finis de même cardinal, il suffit de prouver l'injectivité et la surjectivité (et donc la bijectivité) en découle.

II Les grands principes de dénombrement

1) Principe bijectif

Pour dénombrer un ensemble fini, une première méthode est d'exhiber une bijection entre cet ensemble et un ensemble que l'on sait dénombrer.

Exemple : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de mots de n lettres (ayant un sens ou non) utilisant l'alphabet latin (à 26 lettres) ?

Théorème. Soient $(p, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et n . Alors $\text{card}(F^E) = (\text{card}(F))^{\text{card}(E)}$, c'est-à-dire il y a n^p fonctions de E dans F .

DÉMONSTRATION.

Variantes :

- si m chaussettes doivent être rangées dans n tiroirs, alors il existe au moins un tiroir qui contient au moins $\lfloor \frac{m}{n} \rfloor$ éléments.
- si une infinité de chaussettes doivent être rangées dans n tiroirs, alors il existe au moins un tiroir qui contient une infinité de chaussettes

⚠ Ce résultat est faux si les ensembles de départ et d'arrivée ne sont pas de même cardinal, notamment lorsqu'ils sont infinis... comme on l'a vu de nombreuses fois cette année.

Dans ces deux exemples, on « code » le problème de dénombrement par des listes. C'est ce que l'on va faire la plupart du temps (cf. paragraphe III).


Nous verrons d'autres démonstrations de ces deux théorèmes dans le paragraphe II.3 qui utilisent le principe multiplicatif et qui sont davantage dans l'esprit du programme.

□

Théorème. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit E un ensemble fini à n éléments. Alors $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$, c'est-à-dire il y a 2^n parties de E .

DÉMONSTRATION.


□

 Toutefois, citons le programme : l'utilisation systématique de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.

Aussi, dans la pratique, nous allons plutôt compter par caractérisation (ce qui revient à utiliser le principe bijectif sans construire explicitement la bijection) : nous allons chercher ce qui caractérise entièrement un élément de l'ensemble que l'on veut dénombrer.

Dans l'exemple et les deux théorèmes ci-dessus, cela consiste à dire qu'un mot de n lettres est entièrement caractérisé par la donnée des n lettres qui le constitue, qu'une fonction de E dans F est entièrement caractérisé par la donnée des images des n éléments de E par cette fonction, qu'une partie de E est entièrement caractérisée par l'indicatrice de cette partie.


Exemple : Soit E un ensemble à n éléments. Combien y a-t-il de couples de E dont les deux coordonnées sont égales ? Un tel couple est entièrement caractérisé par la donnée de la première coordonnée (puisque la deuxième lui est égale). Il y a donc n possibilités donc il y a n tels couples.

 Rigoureusement, cela vient du fait que $\varphi : x \mapsto (x, x)$ est une bijection de E dans l'ensemble des couples d'éléments de E dont les deux coordonnées sont égales.

2) Principe additif


Le principe additif repose sur le fait que le cardinal d'une union disjointe est la somme des cardinaux. Il est très intuitif : pour compter le nombre d'objets dans une collection d'objets, on peut faire n tas, compter le nombre d'objets dans chaque tas, puis sommer les nombres obtenus. Plus généralement :

Principe additif : si pour dénombrer un certain ensemble fini (c'est-à-dire compter le nombre de façons de choisir un élément de cet ensemble), on peut effectuer un choix parmi r_1 possibilités **ou bien** un autre choix parmi r_2 possibilités **ou bien** un autre choix parmi r_3 possibilités, etc. **ou bien** enfin un autre choix parmi r_n possibilités, alors l'ensemble contient $r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n$ éléments

 « ... ou bien ... » se dit aussi « soit... soit... ». Il s'agit dans les deux cas d'un ou exclusif.

Exemples :

- Si on a 3 bonbons rouges et 7 bonbons bleus, alors on a $3 + 7 = 10$ bonbons.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de couples de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dont la première coordonnée est strictement inférieure à la seconde ?

 Car choisir un bonbon consiste à choisir un rouge (3 possibilités) **ou bien** un bleu (7 possibilités).

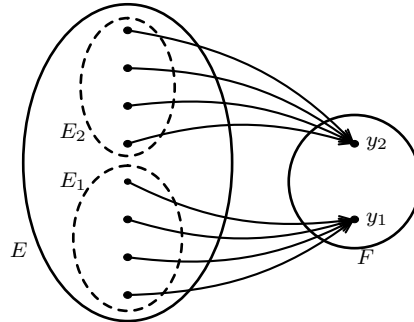
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons u_n le nombre de façons de paver un damier de taille $n \times 2$ avec des dominos de taille 1×2 . On cherche à déterminer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Faisons un dessin pour de petites valeurs de n :

3) Principe multiplicatif

Le principe multiplicatif repose sur le résultat théorique suivant :

Lemme (des bergers). Soient E et F deux ensembles finis et $f : E \rightarrow F$ surjective. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si tout élément de F admet exactement k antécédents par f , alors $\text{card}(E) = k \times \text{card}(F)$.

Si un berger a n moutons (non amputés), alors il a $4n$ pattes de mouton dans son troupeau.



DÉMONSTRATION.

□

Exemple : Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 2$. Notons C_E l'ensemble des couples d'éléments distincts de E . La fonction

$$f : \begin{cases} C_E & \rightarrow E \\ (x_1, x_2) & \mapsto x_1 \end{cases}$$

est surjective (en effet, pour tout $x \in E$, comme $\text{card}(E) \geq 2$, il existe $x' \in E \setminus \{x\}$ et on a $f(x, x') = x$) et, pour tout $x \in E$, les antécédents de x par f sont exactement de la forme

(x, x') avec $x' \in E \setminus \{x\}$. Un antécédent de x est donc entièrement déterminé par sa seconde coordonnée qui est un élément de E distincts de x . Par conséquent x admet $n - 1$ antécédents par f . Le lemme des bergers entraîne que $\text{card}(C_E) = (n - 1) \times \text{card}(E)$: il y a $n(n - 1)$ couples d'éléments distincts de E .

Mais le programme demande de restreindre l'usage des bijections pour faire du dénombrement. On transforme donc l'énoncé du lemme des bergers de la façon suivante : si pour dénombrer un ensemble fini E (c'est-à-dire compter le nombre de façons de choisir un élément de E), on peut effectuer un premier choix parmi n possibilités puis un second choix parmi k possibilités (ce nombre k étant indépendant du premier choix), alors E est de cardinal kn . En effet ce procédé de choix successifs consiste à construire une fonction surjective de E dans un ensemble F à n éléments (l'ensemble des n possibilités du premier choix) ayant chacun k antécédents (l'ensemble des k possibilités, après avoir effectué le premier choix).

Reprenons l'exemple ci-dessus avec cette nouvelle formulation : pour dénombrer l'ensemble des couples d'éléments distincts de E , on commence par choisir la première coordonnée x parmi les n éléments de E (il y a n possibilités) puis la seconde coordonnée parmi les $n - 1$ éléments de E qui ne sont pas x . Il y a donc $n(n - 1)$ possibilités en tout et donc il y a $n(n - 1)$ couples d'éléments distincts de E .

Cette façon de procéder s'appelle le principe multiplicatif. Il se généralise ainsi :

Principe multiplicatif : si pour dénombrer un ensemble fini, on peut effectuer une succession de $n \in \mathbb{N}^*$ choix ayant respectivement r_1, \dots, r_n possibilités (sous entendu les nombres r_1, \dots, r_n ne dépendent pas des choix effectués), alors cet ensemble contient $r_1 \times r_2 \times \dots \times r_n$ possibilités.

Ce sont les nombres qui sont indépendants et non les possibilités à chaque choix.

Exemples :


- Si on a 3 sac contenant chacun 7 bonbons, alors on a $3 \times 7 = 21$ bonbons.
- En France, à tout véhicule est attribué un numéro d'immatriculation (SIV) formé de sept caractères alphanumériques : deux lettres, un tiret, trois chiffres, un tiret et deux lettres (par exemple KZ-119-EP). Les lettres interdites sont I, O et U (car elles sont trop ressemblantes avec 1, 0 et V respectivement). La série de chiffres 000 est interdite, ainsi que la série de lettres SS. Enfin la série WW est interdite pour le bloc de gauche (elle correspond aux immatriculations provisoires). Combien y a-t-il d'immatriculations possibles ?

Car choisir un bonbon consiste à choisir un sac (3 possibilités) puis un bonbon dans le sac choisi (7 possibilités). Le nombre de possibilités une fois le sac choisi est bien indépendant du sac choisi (mais le bonbon choisir dépend a priori du sac choisi).

- Autre démonstration du fait que le cardinal de F^E est $\text{card}(F)^{\text{card}(E)}$ lorsque E et F sont finis :

- Autre démonstration du fait que le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ est $2^{\text{card}(E)}$ lorsque E est fini :

- Autre démonstration du fait que, si E_1, \dots, E_n sont des ensembles finis, alors le cardinal de $E_1 \times \dots \times E_n$ est le produit $\text{card}(E_1) \times \dots \times \text{card}(E_n)$:

 Dans le principe multiplicatif, il faut bien qu'il y ait indépendance des **nombres** de possibilités dans les choix successifs.

Reprenons l'exemple du paragraphe précédent avec le nombre de couples de de $\llbracket 1 ; n \rrbracket$ dont la première coordonnée est strictement inférieure à la seconde. On a trouvé qu'il y en avait $\frac{n(n-1)}{2}$ en utilisant le principe additif. On pourrait être tenté d'utiliser le principe multiplicatif.

- ★ Une mauvaise manière de procéder : on choisit la première coordonnée (il y a n possibilités) puis la seconde mais, problème : le nombre de possibilités dépend du premier choix (si on a choisi 1, il y a $n-1$ possibilités pour la deuxième coordonnée mais il n'y en a que 1 si on a choisi $n-1$ en premier).
- ★ Une bonne manière de procéder :

Cet exemple illustre le principe de double comptage qui consiste à dénombrer un ensemble de deux façons différentes pour obtenir une formule. Nous l'utiliserons plusieurs fois dans les prochains paragraphes, notamment pour compter le nombre de combinaisons (dont l'exemple ci-contre est un cas particulier).

III Listes et combinaisons

Dans ce paragraphe, p et n désignent des entiers naturels non nuls.

1) p -listes

Définition. On appelle p -liste d'éléments de E toute famille de p éléments de E , c'est-à-dire tout élément de E^p .

Remarque : Dans une famille, contrairement à un ensemble, l'ordre des éléments compte et on peut avoir plusieurs fois le même élément.

Par exemple $(1, 1, 5)$ et $(1, 5, 1)$ sont deux 3-listes distinctes de $\llbracket 1 ; 6 \rrbracket$.

Les p -listes sont utilisés en probabilité pour modéliser des tirages **successifs** et **avec remise**.

Par exemple, si on tire successivement et avec remise p boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , alors les numéros des boules tirées forment une p -liste d'éléments de $\llbracket 1 ; n \rrbracket$.

Il découle de la formule du cardinal d'un produit cartésien d'ensembles finis que :

Théorème. Si $\text{card}(E) = n$, alors $\text{card}(E^p) = n^p$. Autrement dit, il y a n^p p -listes dans un ensemble à n éléments.

Exemples :

- Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On effectue 4 tirages successifs avec remise et on note les numéros obtenus. Le nombre total de tirages possibles est le nombre de 4-uplets d'éléments de $\llbracket 1 ; 10 \rrbracket$, c'est-à-dire $10^4 = 10000$.
- Il y a $6^3 = 216$ résultats possibles lorsqu'on effectue trois lancers successifs d'un dé à 6 faces.

Une p -liste d'éléments de E est tout simplement un p -uplet d'éléments de E . Le terme liste est un vocabulaire utilisé surtout en dénombrement.

Retenons que pour construire un p -uplet d'éléments de E , il y a n choix pour le premier élément, puis n choix pour le deuxième, n choix pour le troisième, etc. donc il y a $n \times n \times \dots \times n = n^p$ p -uplets d'éléments de E .

2) p -listes d'éléments distincts

a) Nombre de p -listes d'éléments distincts

Intéressons-nous maintenant aux p -listes d'éléments distincts d'un ensemble E à n éléments. On a alors forcément $p \leq n$ car il ne peut pas y avoir dans une telle liste plus d'éléments distincts qu'il n'y a d'éléments dans E . L'ordre compte toujours comme dans le paragraphe précédent.

Par exemple $(2, 4, 5)$ et $(5, 2, 4)$ sont deux 3-listes distinctes d'éléments distincts de $\llbracket 1 ; 6 \rrbracket$.

Remarque : Les p -listes d'éléments distincts sont utilisés en probabilité pour modéliser des tirages **successifs** et **sans remise**.

Par exemple, si on tire successivement et sans remise p boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , alors les numéros des boules tirées forment une p -liste d'éléments distincts de $\llbracket 1 ; n \rrbracket$.

Théorème. Si $p \leq n$, alors il y a $n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ p -listes d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n .

DÉMONSTRATION. Il y a n choix pour le premier élément de la liste, puis, indépendamment de ce premier choix, il y a $n-1$ choix pour le deuxième (on ne peut pas répéter le premier élément choisi), puis $n-2$ choix pour le troisième (on ne peut pas répéter les deux premiers éléments choisis), etc. et enfin $n-p+1$ choix pour le $p^{\text{ième}}$. D'après principe multiplicatif, il y a donc $n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ p -uplets éléments distincts d'un ensemble à n éléments. \square

Exemple : Huit nageurs s'affrontent lors d'une compétition. Combien y a-t-il de podiums possibles ?

b) Nombre d'injections, nombre de permutations

Soient E et F deux ensembles finis ayant respectivement p et n éléments. Notons $E = \{x_1; \dots; x_p\}$. On a vu dans le paragraphe II.1 qu'une fonction f de E dans F est entièrement caractérisée par la donnée des images de x_1, \dots, x_p . Autrement dit f est entièrement caractérisée par la p -liste $(f(x_1), \dots, f(x_p))$ d'éléments de F . On retrouve donc le fait que $\text{card}(F^E) = n^p$.

Si $p > n$, il n'y a pas d'injections de E dans F . Si $p \leq n$, alors une injection f de E dans F est entièrement caractérisée par la p -liste $(f(x_1), \dots, f(x_p))$ d'éléments **distincts** de F . On en déduit que :

Théorème. Si $p \leq n$, alors il y a $n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ injections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.

Définition. Soit E un ensemble fini non vide. On appelle permutation de E toute bijection de E dans lui-même.

Remarques :

- On parle parfois de permutation pour un ensemble infini mais c'est plus rare.
- L'ensemble des permutations de E est noté S_E . Lorsque $E = \llbracket 1 ; n \rrbracket$, on note S_n au lieu de S_E et on parle de groupe symétrique (cf. chapitre 36).

Une p -liste d'éléments distincts de E est aussi appelée p -arrangements de E .

Le nombre de p -listes d'éléments distincts est parfois noté A_n^p (mais cette notation n'est pas au programme)... avec un A comme arrangement (autre terme pour désigner une liste d'éléments distincts).

Choisir une injection de $E = \{x_1; \dots; x_p\}$ revient à choisir $f(x_1)$ dans F (n possibilités), puis $f(x_2)$ dans F ($n-1$ possibilités puisqu'on ne peut plus choisir $f(x_1)$), etc. On conclut avec principe multiplicatif une fois de plus.

- Se donner une permutation d'un ensemble E revient à ordonner/ranger/classer les éléments de l'ensemble E . En effet :
 - ★ Si $E = \{x_1; \dots; x_n\}$ et σ est une permutation de E , alors on peut ranger les éléments de E via σ en mettant, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\sigma(x_i)$ en $i^{\text{ième}}$ position.
 - ★ Réciproquement, en rangeant les éléments de E dans un certain ordre : $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$, on construit une permutation σ par : pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\sigma(x_k) = x_{i_k}$.
- Une permutation de E est une injection de E dans E (puisque E est fini une application de E dans E est injective si et seulement si elle est bijective). Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$, on obtient :

Théorème. Il y a $n!$ permutations d'un ensemble à n éléments, c'est-à-dire $n!$ façons de ranger n éléments.

Exemples :

- Il y a $3! = 6$ façons d'ordonner les nombres 3, 5, 7 :

$$(3, 5, 7), (3, 7, 5), (5, 3, 7), (5, 7, 3), (7, 3, 5) \text{ et } (7, 5, 3).$$

- Il y a $44!$ façons de classer les élèves de la MPSI2.
- On a choisi au préalable 60 chansons. Il y a $60!$ playlists possibles avec ces 60 chansons.

On a $60! \approx 8,32 \times 10^{81}$. Le nombre d'atomes dans l'univers est de l'ordre de 10^{79} ...

Corollaire. Le groupe symétrique S_n est de cardinal $n!$.

3) Combinaisons

a) Nombre de combinaisons

Lorsque l'on choisit des éléments distincts d'un ensemble fini E et que l'ordre compte, on utilise des p -listes. Mais que faire lorsque l'ordre n'a pas d'importance? Et bien on utilise plutôt des parties de E . En effet, par convention, dans la notation par extension d'un ensemble, un élément ne peut apparaître qu'au plus une fois et l'ordre ne compte pas.

Par exemple, $\{1; 1; 5\} = \{1; 5\} = \{5; 1\}$.

Définition. Soit $k \in \mathbb{N}$. On appelle combinaison de k éléments (ou k -combinaisons) d'un ensemble fini E toute partie de E de cardinal k .

Remarque : Les combinaisons de k éléments de E sont utilisés en probabilité pour modéliser des tirages **simultanés**.

Par exemple, si on tire simultanément k boules (forcément distincts) dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , alors les numéros des boules tirées forment une combinaison d'éléments de $\llbracket 1; n \rrbracket$.

Théorème. Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Il y a $\binom{n}{k}$ combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments.

DÉMONSTRATION.

Bien sûr, il n'existe pas de parties de E contenant plus d'éléments que E et encore moins de parties contenant un nombre négatif d'éléments... Cela explique la convention que $\binom{n}{k} = 0$ lorsque $k > n$ ou $k < 0$, vue dans le chapitre 7.

□

Corollaire. Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, il y a exactement $\binom{n}{k}$ façons de choisir k éléments (distincts et sans ordre) d'un ensemble à n éléments.

DÉMONSTRATION. Choisir k éléments distincts sans ordre dans un ensemble E à n éléments revient exactement à choisir la partie de E dont les éléments sont les éléments en question. □

Exemples :

- Combien y a-t-il d'anagrammes (ayant un sens ou non) du mot MILLEFEUILLE ? Une telle anagramme est un mot de 12 lettres.

Par exemple, il y a

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{120}{12} = 10$$

combinaisons de 3 éléments de $E = \{1; 3; 5; 7; 9\}$:

{1; 3; 5},	{1; 3; 7},
{1; 3; 9},	{1; 5; 7},
{1; 5; 9},	{1; 7; 9},
{3; 5; 7},	{3; 5; 9},
{3; 7; 9},	{5; 7; 9}.

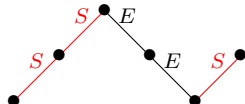
- Soient E et F deux parties finies de \mathbb{R} ayant respectivement p et n éléments. Combien y a-t-il de fonctions strictement croissantes de E dans F ?

Raisonnement classique : choisir d'abord des objets sans ordre (avec des combinaisons), puis les ordonner.

- On réalise n fois une expérience où deux issues sont possibles : succès et échec. On représente la répétition de ces expériences sous forme d'un chemin dans un arbre binaire constitué de montées (lorsqu'il y a succès) et de descentes (lorsqu'il y a échec). Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, un chemin à k succès est entièrement déterminé par les instants auxquels ont lieu les succès (les autres instants donnant obligatoirement lieu à des échecs). En d'autres termes, un chemin à k succès est entièrement déterminé par la partie à k éléments de $\llbracket 1; n \rrbracket$ formée des instants auxquels ont lieu des succès.

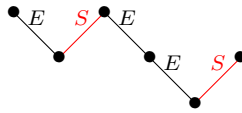
Par exemple, si $E = \{0; 2; 4; 6; 8\}$, alors :

— La combinaison $\{0; 2; 8\}$ est codée par le chemin



Sur cet exemple, $n = 3$ et $k = 2$. Il y a bien $\binom{3}{2} = 3$ chemins avec 2 succès.

— Le chemin



code la combinaison $\{2; 8\}$.

Par conséquent, il y a $\binom{n}{k}$ chemins réalisant p succès pour n répétitions dans un arbre binaire. Autrement dit il y a $\binom{n}{k}$ façons d'obtenir k succès parmi n réalisations.

- Combien y a-t-il de mots de 7 lettres (ayant un sens ou non) contenant 4 consonnes et 3 voyelles ?



Une erreur classique est de répondre $20^4 6^3$. Ce serait la bonne réponse si les consonnes étaient toutes au début du mot. Ici il faut compter toutes les façons de placer 4 consonnes dans un mot de 7 lettres.

Blank space for the answer to the first question.

- Combien y a-t-il de mains de 5 cartes (d'un jeu classique de 52 cartes) contenant deux paires ?

★ *Raisonnement faux* : on choisit la valeur commune des 2 cartes d'une paire (il y a 13 possibilités) puis la valeur commune des 2 cartes d'une autre paire (il y a 12 possibilités puisqu'on ne peut plus reprendre la même valeur que la paire précédente... sinon on aurait un carré et non pas deux paires), puis la couleur des 4 cartes choisies et enfin on choisit la dernière carte. Le problème est qu'on a introduit un ordre : il y a une première paire et une seconde paire.



Dans une main d'un jeu de carte, l'ordre ne compte pas.

★ *Bon raisonnement* :

Blank space for the answer to the second question.

b) Revisitons les propriétés des coefficients binomiaux

L'objectif de ce paragraphe est de redémontrer les propriétés des coefficients binomiaux vus dans le chapitre 7 mais avec des techniques combinatoires. Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

- L'ensemble E est la seule partie de E de cardinal n donc $\binom{n}{n} = 1$.
- Les parties de E à un seul élément sont les singletons. Il y en a n si bien que $\binom{n}{1} = n$.
- Choisir k éléments de E revient exactement à considérer une partie à $n - k$ éléments de E et à prendre tous les éléments qui n'y sont pas. D'où $\binom{n}{k} = \binom{n}{n - k}$.
- **Formule du chef**. Supposons que $k \geq 1$.

Blank space for the answer to the 'Formule du chef' question.



C'est de cette démonstration que cette formule tire son nom. Rappelons que ce n'est pas son nom officiel dans le programme (elle n'en a pas) donc prudence en l'utilisant sur une copie de concours.

- **Formule de Pascal.** Supposons que $k \leq n - 1$.

- **Formule du binôme de Newton.** Soient a et b des complexes. Remarquons que $(a + b)^n$ n'est rien d'autre que l'écriture condensée de

$$\underbrace{(a + b) \times \cdots \times (a + b)}_{n \text{ fois}}$$

En développant, on obtient une somme de 2^n termes dont chacun est un produit obtenu en prenant exactement un a ou un b par parenthèse. En regroupant ces termes et les écrivant avec des puissances, il s'agit de termes de la forme $a^k b^\ell$ avec $k + \ell = n$. Mais, pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, il y a $\binom{n}{k}$ façons d'obtenir k fois a (et on obtient automatiquement $n - k$ fois b), donc il y a $\binom{n}{k}$ termes de la forme $a^k b^{n-k}$. On en déduit que

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

- **Cardinal de l'ensemble des parties.**

On peut aussi en démontrer d'autres :

- **Formule de Vandermonde.** Soient m et n dans \mathbb{N}^* puis $k \in \llbracket 0; n + m \rrbracket$.



On utilisera notamment la formule de Vandermonde dans le chapitre 35 pour démontrer la stabilité des lois binomiales de même paramètres.



Si $m < k$, on ne peut prendre qu'au maximum m éléments du sac B donc on prend au minimum $k - m$ éléments du sac A . Mais, avec la convention que $\binom{m}{k} = 0$ lorsque $k > m$, on peut tout de même considérer ces premiers cas qui n'existent pas en fait. Idem si $n < k$, on ne peut prendre qu'au maximum n éléments du sac A . Mais, avec la convention que $\binom{n}{k} = 0$ lorsque $k > n$, on peut tout de même considérer ces derniers cas qui n'existent pas en fait.



En fait la somme commence à $k - m$ si $k > m$ et finit à n si $k > n$ mais on peut la laisser telle qu'elle vu la convention évoquée ci-dessus dans la marge.

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \binom{m}{k-j}.$$

Un cas particulier classique :

c) Exemple : chemins de Bernoulli

On munit le plan d'un repère orthonormé direct. Soient a, b, c, d des entiers tels que $a < c$. On appelle chemin de Bernoulli de (a, b) à (c, d) une ligne polygonale dans le plan joignant le point de coordonnées (a, b) au point de coordonnées (c, d) en ne faisant que des montées (déplacements selon le vecteur $(1, 1)$) et des descentes (déplacements selon le vecteur $(1, -1)$). Le chemin est alors constitué de $n = c - a$ pas.



On en a parlé plus haut : les montées sont des succès et les descentes sont des échecs, par exemple.

L'exemple ci-dessous est un chemin allant de $(0, 0)$ à (n, k) avec $n = 20$ et $k = 2$. Il est constitué de deux montées successives, puis d'une descente, puis de trois montées successives, puis de deux descentes successives, etc.



Dénombrons quelques chemins de Bernoulli particuliers.

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$. Combien y a-t-il de chemins de Bernoulli allant de $(0, 0)$ à (n, k) ? Un tel chemin est totalement caractérisé par les instants où il amorce une montée (il amorce obligatoirement une descente aux autres instants).

Pour caractériser entièrement le chemin de l'exemple ci-dessus, il suffit de savoir qu'il amorce une montée aux instants $0, 1, 3, 4, 5, 8, 13, 16, 17, 18, 19$.

Il suffit donc de savoir à quels instants, entre 0 et $n - 1$ (ce qui fait n instants) il amorce une montée. Notons m le nombre de montées, et d le nombre de descentes. On a bien sûr $n = m + d$ et aussi $k = m - d$. En effet, il termine sa course à l'altitude k et, pour cela :

- ★ il a effectué k montées de plus que de descentes lorsque $k > 0$ ($k = m - d$),
- ★ il a effectué $-k$ descentes de plus que de montées lorsque $k < 0$ ($-k = d - m$),
- ★ il a effectué autant de montées que de descentes lorsque $k = 0$ ($k = m - d$).

Par conséquent $m = \frac{n+k}{2}$. On en déduit deux choses :

- ★ Si $n+k$ est impair (ce qui arrive quand n et k n'ont pas la même parité), m n'est pas entier, ce qui est absurde : il n'y a aucun chemin de $(0, 0)$ à (n, k) .
- ★ Si $n+k$ est pair, alors un tel chemin est entièrement caractérisé par l'ensemble des instants où il a amorcé une montée. Il y a $m = \frac{n+k}{2}$ montées et n pas donc le nombre de chemins de $(0, 0)$ à (n, k) est $\binom{n}{\frac{n+k}{2}}$.

- Combien y a-t-il de chemins de Bernoulli allant de (a, b) à (c, d) ?

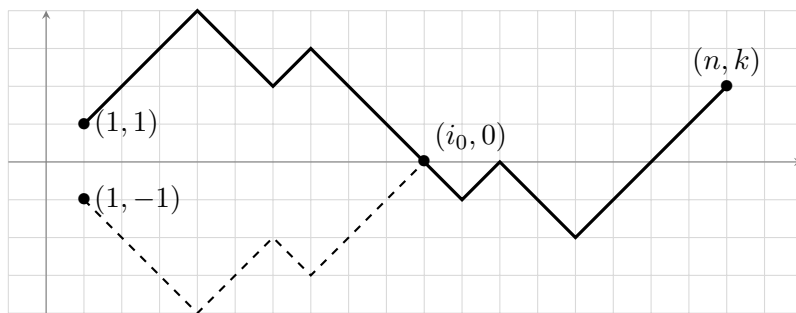
Notons $n = c - a$ et $k = d - b$. A tout chemin allant de (a, b) à (c, d) , on peut associer (de manière bijective) un chemin allant de $(0, 0)$ à $(c - a, d - b)$ en translatant chaque point du chemin d'un vecteur $(-a, -b)$. Dès lors, par principe bijectif,

- ★ Si $c - a$ et $d - b$ n'ont pas la même parité, il n'y a aucun chemin allant de (a, b) à (c, d) .
- ★ Sinon, il y a $\binom{c-a}{\frac{c+d-a-b}{2}}$ chemins allant de (a, b) à (c, d) .

- Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ ayant la même parité que n . Combien y a-t-il de chemins de Bernoulli allant de $(0, 0)$ à (n, k) **sans toucher** l'axe des abscisses ?

Pour commencer, remarquons qu'un tel chemin commence nécessairement pas une montée. Il s'agit donc de compter le nombre de chemin allant de $(1, 1)$ à (n, k) sans toucher l'axe des abscisses. Pour cela nous allons plutôt compter le nombre de chemin allant de $(1, 1)$ à (n, k) **en touchant** l'axe des abscisses.

Nous allons construire une bijection φ de l'ensemble des chemins allant de $(1, 1)$ à (n, k) **en touchant** l'axe des abscisses sur l'ensemble des chemins allant de $(1, -1)$ à (n, k) de la façon suivante :



- ★ Soit C un chemin allant de $(1, 1)$ à (n, k) en touchant l'axe des abscisses. Notons $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ la liste des altitudes successives du chemin C et posons $i_0 = \min\{i \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket \mid x_i = 0\}$. Considérons alors $\varphi(C)$ le chemin démarrant allant de $(1, -1)$ à (n, k) dont les altitudes respectives sont

$$(-x_1, -x_2, \dots, -x_{i_0-1}, 0, x_{i_0+1}, \dots, x_{n-1}, x_n).$$

- ★ Soit C' un chemin allant de $(1, -1)$ à (n, k) . Notons $(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n)$ la liste des altitudes successives du chemin C' et posons $i_0 = \min\{i \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket \mid y_i = 0\}$. Considérons alors C le chemin dont la liste

On pourrait se dire qu'un chemin est tout aussi bien caractérisé par l'ensemble des instants où il amorce une descente. On trouve alors que le nombre de chemins est

$$\binom{n}{d} = \binom{n}{\frac{n-k}{2}}$$

ce qui est la même chose par symétrie des coefficients binomiaux puisque

$$d = n - m.$$

Plus précisément, $c_1 = 1$, $c_n = k$ et, pour tout $i \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket$, c_i est l'altitude à l'instant i

des altitudes successives est $(-y_1, -y_2, \dots, -y_{i_0-1}, 0, y_{i_0+1}, \dots, y_{n-1}, y_n)$. Par définition $y_1 < 0, y_2 < 0, \dots, y_{i_0-1} < 0$ donc $-y_1 > 0, -y_2 > 0, \dots, -y_{i_0-1} > 0$ et $y_{i_0} = 0$. Dès lors C est un chemin allant de $(1, 1)$ à (n, k) en touchant l'axe des abscisses et $\varphi(C) = C'$.

★ Il est immédiat que φ est injective car i_0 est uniquement déterminée.

On en déduit qu'il y a autant de chemin allant de $(1, 1)$ à (n, k) **en touchant** l'axe des abscisses que de chemins allant de $(1, -1)$ à (n, k) . Il y en a donc $\binom{n-1}{\frac{n-1+k-(-1)}{2}}$ et donc $\binom{n-1}{\frac{n+k}{2}}$.

Enfin il y a $\binom{n-1}{\frac{n-1+k-1}{2}} = \binom{n-1}{\frac{n+k}{2}-1}$ chemins allant de $(1, 1)$ à (n, k) donc on en déduit que le nombre de chemins de Bernoulli allant de $(0, 0)$ à (n, k) **sans toucher** l'axe des abscisses est

$$\binom{n-1}{\frac{n+k}{2}-1} - \binom{n-1}{\frac{n+k}{2}}.$$

Terminons ce calcul en notant $x = \frac{n+k}{2}$ pour simplifier

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{x-1} - \binom{n-1}{x} &= \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} - \frac{(n-1)!}{x!(n-1-x)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{x!(n-x)!} (x - (n-x)) \\ &= \frac{1}{n} \binom{n}{x} (2x - n) \\ &= \frac{k}{n} \binom{n}{x}. \end{aligned}$$

Ainsi, il y a $\frac{k}{n} \binom{n}{\frac{n+k}{2}}$ chemins de Bernoulli allant de $(0, 0)$ à (n, k) **sans toucher** l'axe des abscisses.

Voyons une application de ce résultat, appelée théorème du ballot : à la suite d'un vote opposant deux candidats, quel est la probabilité que le vainqueur soit toujours strictement en tête lors du dépouillement ?

★ Notons a le nombre de votes pour le vainqueur et b le nombre de votes pour le perdant. On peut représenter le dépouillement par un chemin de Bernoulli allant de $(0, 0)$ à $(a+b, a-b)$ de sorte que, pour tout $i \in \llbracket 1; a+b \rrbracket$, le $i^{\text{ième}}$ pas est une montée si et seulement si le $i^{\text{ième}}$ bulletin dépouillé porte sur le vainqueur.

★ Le vainqueur est en tête tout au long du dépouillement si et seulement si le chemin ne touche pas l'axe des abscisses. Il y en a $\frac{a-b}{a+b} \binom{a+b}{\frac{a+b+a-b}{2}} = \frac{a-b}{a+b} \binom{a+b}{a}$.

★ En tout il y a $\binom{a+b}{\frac{a+b+a-b}{2}} = \binom{a+b}{a}$ chemins de $(0, 0)$ à $(a+b, a-b)$ sans contraintes.

★ Puisqu'il y a équiprobabilité entre tous les dépouillements possibles, la probabilité est le rapport entre ces deux quantités : elle vaut donc $\frac{a-b}{a+b}$.

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de chemins de Bernoulli allant de $(0, 0)$ à $(2n, 0)$ restant strictement au dessus de l'axe des abscisses sauf en les instants 0 et $2n$?

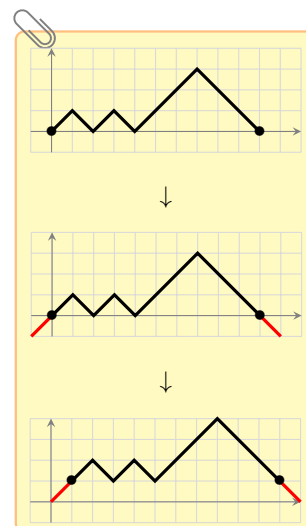
Un tel chemin finit nécessairement par une descente. Il y en a donc autant que de chemins allant de $(0, 0)$ à $(2n-1, 1)$ **sans toucher** l'axe des abscisses, à savoir

$$\frac{1}{2n-1} \binom{2n-1}{\frac{2n-1+1}{2}} = \frac{1}{2n-1} \binom{2n-1}{n} = \frac{1}{n} \binom{2n-1}{n-1}.$$

On en reparlera dans le prochain chapitre.

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de chemins de Bernoulli allant de $(0, 0)$ à $(2n, 0)$ sans descendre sous l'axe des abscisses (on appelle cela un chemin de Dyck) ?

Considérons un tel chemin. Si on lui ajoute une montée à l'instant -1 , une descente à l'instant $2n + 1$ et qu'on translate tous les points d'un vecteur $(1, 1)$, on se retrouve avec un chemin allant de $(0, 0)$ à $(2n + 2, 0)$ restant strictement au dessus de l'axe des abscisses sauf en les instants 0 et $2n + 2$. Cette association est bijective (ce que je vous laisse démontrer, le dessin dans la marge aide à bien comprendre ce qui se passe) si bien qu'il y a $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ chemins de Dyck allant de $(0, 0)$ à $(2n, 0)$.



4) Retour sur le nombre de tirages

Lorsque l'on veut choisir p éléments dans un ensemble E à n éléments (situation typique en probabilités avec les tirages dans une urne notamment), il faut se poser les deux questions suivantes : l'ordre compte-t-il ? Peut-on avoir plusieurs fois le même élément ?

- Dans le cas avec ordre et avec répétitions, on modélise par des p -listes d'éléments de E . Il y a n^p possibilités.
- Dans le cas avec ordre et sans répétitions, on modélise par des p -listes d'éléments distincts de E . Il y a $\frac{n!}{(n-p)!}$ possibilités.
- Dans le cas sans ordre et sans répétitions, on modélise par des p -combinaisons. Il y a $\binom{n}{p}$ possibilités.
- Le cas sans ordre et avec répétitions n'est pas au programme mais c'est un exercice classique. Disons que $E = \{x_1; \dots, x_n\}$.

C'est typiquement la situation que l'on rencontre si on dispose de n poches dans lesquelles on veut placer p objets indistinguables (comme des pièces, d'où les ronds). C'est comme si chaque poche était numérotée de 1 à n et qu'on associe à chaque pièce le numéro de la poche dans laquelle on la place. On rencontrera d'autres situations analogues dans la feuille d'exercices.

Par exemple, combien y a-t-il de tirages de 10 éléments de $\llbracket 1; 6 \rrbracket$ sans ordre et avec répétitions ?