Chapitre 4

Fonctions

Partie D : Études de fonctions

I Intérêt des études de fonctions

Il y a plusieurs bonnes raisons de faire des études de fonctions :

- pour tracer la courbe représentative d'une fonction.
- pour étudier une suite définie à l'aide d'une fonction (cf. chapitre 14).
- pour majorer/minorer une fonction, voire déterminer ses éventuels maxima. Cela se fait via l'étude des variations (et des limites éventuellement).
- pour résoudre des équations du type $\varphi(x) = \psi(x)$ ou des inéquations du type $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ ou $\varphi(x) < \psi(x)$ (où φ et ψ désignent des fonctions).
  ⚠ On peut toujours essayer d'utiliser les outils vus dans le chapitre 3 quand ces fonctions ne font intervenir que des petites puissances, racines, valeurs absolues ou parties entières. Mais sinon il faut avoir le réflexe de tout passer d'un côté, c'est-à-dire d'introduire la fonction $f : x \longmapsto \psi(x) - \varphi(x)$, puis de déterminer son signe (pour l'inéquation) et ses valeurs d'annulation (pour l'équation) via l'étude de ses variations.

Éventuellement l'existence de valeurs d'annulation découle du TVI ou de son corollaire.

- pour montrer des inégalités du type $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ ou $\varphi(x) < \psi(x)$ (où φ et ψ désignent des fonctions). Dans ce cas, réflexe encore une fois : on pose $f : x \longmapsto \psi(x) - \varphi(x)$ et on montre qu'elle est à valeurs positives ou strictement positives via une étude de variations.
- déterminer les limites d'une fonction en la « comparant » avec une autre : par des inégalités (cf. points précédents) ou d'autres outils que l'on verra dans le chapitre 26.

II Tableaux de variations

1) Construction et lecture d'un tableau de variations

L'étape centrale dans l'étude d'une fonction f est la détermination de ses variations. On peut synthétiser l'étude de ses variations dans un tableau de variations faisant apparaître :

- les bornes des différents intervalles dont le domaine de définition de f est l'union (on peut préciser les valeurs interdites grâce à une double barre).
- les variations (au sens strict) et la continuité sont représentées par des flèches obliques. Plus précisément : on convient qu'une flèche $\nearrow$ signifie que la fonction est continue et strictement croissante et qu'une flèche $\searrow$ signifie que la fonction est continue et strictement décroissante.

Si la fonction est constante sur un intervalle, on peut mettre la flèche $\rightarrow$ mais c'est rarissime dans une étude de fonction.

Pour connaître les variations, on s'aide en général du signe de la dérivée. On superpose donc souvent au tableau de variations, le tableau de signe de la dérivée (rappelons que $+$ signifie « strictement positif », $-$ signifie « strictement négatif » et que 0 « signifie s'annule »).

Enfin on peut accompagner le tableau de variations de plusieurs informations :

- les valeurs prises par la fonction en les points d'annulation de la dérivée.
- les limites en les bornes (à gauche et à droite).
- d'autres valeurs prises par la fonctions.

Les limites sont facultatives dans l'étude d'une fonction dont le but est d'établir une inégalité. On ne les calcule que si c'est vraiment nécessaire. Par exemple, si l'objectif est de montrer qu'une fonction est positive et que placer un point suffit à prouver que 0 est un minorant, alors les limites sont inutiles ! C'est le cas par exemple du tableau suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Exemple :

x	-5		-3		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$		$\Vert$	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	-1 $\Vert$		$\Vert$ 0	$\nearrow$	1

Ce tableau nous apprend que :

2) Utilisation d'un tableau de variations

a) Application du TVI ou théorème de la bijection

Puisqu'une flèche dans un tableau de variations signifie continuité et stricte monotonie, si on l'accompagne des limites ou valeurs en les bornes, on est précisément dans le cadre d'application du corollaire du TVI ou du théorème de la bijection. On peut tout à fait s'aider du tableau pour conclure mais les hypothèses de continuité et de stricte monotonie doivent impérativement être explicitées au moment d'application de l'un de ces deux résultats.

Exemple : *Reprenons l'exemple du paragraphe précédent.*

b) Déterminer des majorants/minorants/extrema

Dans ce paragraphe a, b, α et β peuvent désigner des réels ou bien $\pm\infty$ tels que $a < b$. En revanche c, m et M désignent des réels.

- **Présence d'un maximum.** On a vu dans la partie A que la situation suivante permet de conclure que f admet un maximum sur $]a\,;b[$ en c :

x	a		c		b
f		$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$	

- **Présence d'un maximum.** On a vu dans la partie A que la situation suivante permet de conclure que f admet un minimum sur $]a\,;b[$ en c :

x	a		c		b
f		$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$	

Si $M = 0$, cela montre que f est strictement négative sur $]a\,;b[$.

- **Présence d'un majorant optimal qui n'est pas le maximum.** On admet (cela sera montré dans le chapitre 21) que l'une des deux situations suivantes permet de conclure que M est le plus petit des majorants de f (on parlera de borne supérieure dans les chapitres 13 et 21) sur $]a\,;b[$ mais n'est le maximum.

x	a		b
f		$\nearrow$	M

x	a		b
f	M	$\searrow$	

Si $m = 0$, cela montre que f est strictement positive sur $]a\,;b[$.

- **Présence d'un minorant optimal qui n'est pas le minimum.** On admet (cela sera montré dans le chapitre 21) que l'une des deux situations suivantes permet de conclure que m est le plus grand des minorants de f (on parlera de borne inférieure dans les chapitres 13 et 21) sur $]a\,;b[$ mais n'est le minimum.

x	a		b
f	m	$\nearrow$	

x	a		b
f		$\searrow$	m

Bilan : sur son domaine de définition, f admet $\sqrt{2}$ pour maximum. Elle n'est pas minorée (puisque tend vers $-\infty$ en -5).

Exemple : *Reprenons encore l'exemple des paragraphes précédents :*

- *sur l'intervalle $]-5\,;0[$, f admet $\sqrt{2}$ pour maximum.*
- *sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$, 0 est le plus grand des minorants mais n'est pas le minimum de f et 1 est le plus petit des majorants mais n'est pas le maximum de f. Si on prolonge f par continuité en 2 en posant $f(2) = 0$, alors 0 devient minimum de f sur $[2\,;+\infty[$.*

III Plan d'étude de fonction

Inutile de détailler à l'extrême. L'important est de bien faire apparaître les valeurs interdites.

La méthodologie d'étude d'une fonction f est la suivante :

1. On détermine le domaine de définition D_f de la fonction f.
   Si f est une fonction présentant une base et une puissance variable, il faut avoir le réflexe immédiat de l'écrire sous forme exponentielle.

2. On cherche à restreindre le domaine d'étude de f en déterminant des propriétés de symétrie (périodicité, parité).

Si on sait que f s'écrit sous la forme $g \circ h$ avec g une fonction **strictement** croissante (respectivement décroissante), alors il suffit de déterminer les variations de h qui seront les mêmes que (respectivement le contraire de) celles de f, cf. partie A).

3. On se met ensuite à étudier la continuité de f et déterminer les variations (au sens strict) de f. Il se peut tout à fait qu'elles découlent d'opérations sur les fonctions monotones (cf. partie A). Mais en général, on passe par l'étude du signe de la dérivée. Dans ce cas :
   - On commence par dire que f est dérivable sur D_f privé éventuellement de quelques points grâce aux théorèmes d'opération (à ce stade on n'essaiera pas forcément d'étudier la dérivabilité en ces quelques points en étudiant le taux d'accroissement, sauf si c'est demandé). Notons A l'ensemble sur lequel on sait que f est dérivable.
   - On calcule f' et on factorise son expression au maximum. On sait en effet beaucoup mieux déterminer le signe d'un produit que le signe d'une somme.
   - On étudie le **signe** de f' au sens strict, c'est-à-dire on détermine $B = \{x \in A \,|\, f'(x) > 0\}$ et $C = \{x \in A \,|\, f'(x) < 0\}$. Forcément f' s'annule sur $A \backslash (B \cup C)$.

     ⚠ Déterminer l'ensemble des points d'annulation de f' ne suffit pas pour conclure sur le signe de f'.

Cela peut être aussi $D = \{x \,|\, f'(x) = 0\}$ ET B ou encore D ET C ou encore $\{x \,|\, f'(x) \geqslant 0\}$ ET $\{x \,|\, f'(x) \leqslant 0\}$, etc. L'important est que les deux cas traités nous permettent de conclure en quels points la dérivée est nulle, strictement positive ou strictement négative.

   - Si on n'arrive pas à déterminer le signe, on dérive à nouveau (en disant que f' est dérivable...) pour déterminer les variations puis le signe de f'. Mais on peut être plus malin : si f' s'écrit sous la forme $f' = g \times h$ avec h une fonction dont on connaît le signe, il suffit de dériver g (en disant que g est dérivable...) pour déterminer le signe de g' donc les variations de g puis le signe de g et donc le signe de f' (on s'aide éventuellement d'un tableau de signe).

     ⚠ Si h est strictement positive, on dit que le signe de f' **est** du signe de g et surtout pas « dépend » du signe de g.
   - On résume tout cela dans un tableau de variation.
4. On étudie les limites aux bords des intervalles dont D_f est l'union. On peut éventuellement prolonger la fonction par continuité et même étudier la dérivabilité en le ou les points de prolongement (mais gardons ça pour plus tard dans l'année, sauf si c'est demandé par l'énoncé). On ajoute ces données au tableau de variations.
5. Pour aider au tracé de la courbe représentative de f, on peut éventuellement ajouter l'étude :
   - de la convexité/concavité, des points d'inflexions de f.
   - des tangentes en certains points (les tangentes horizontales, qui sont celles en les points d'annulation de f', ou les tangentes en les points d'inflexions).
   - des éventuelles asymptotes obliques (les éventuelles asymptotes horizontales et verticales découlent déjà immédiatement des limites aux bords des intervalles dont D_f est l'union) et la position relative de la courbe par rapport aux asymptotes
   - des branches paraboliques.
6. On trace l'**allure** de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f dans un repère orthonormé. Au préalable on place quelques points particuliers (notamment les valeurs d'annulation de f et de f'), on trace les éventuelles tangentes et asymptotes que l'on a déterminées et on place d'autres points intermédiaires pour aider la construction.

Inutile d'être ultra précis en utilisant une règle graduée ou du papier millimétré : l'allure est suffisante. Mais il faut bien s'aider des asymptotes et des tangentes.

IV Un exemple

Étudions la fonction $f : x \longmapsto |x|^{1/x^2}$