Chapitre 6

Nombres complexes

Par exemple, l'équation $x^2+1=0$, d'inconnue $x\in\mathbb{R}$, n'admet pas de solution réelle. Cependant nous verrons qu'elle admet deux solutions complexes notées i et $-\mathrm{i}$. On a donc $\mathrm{i}^2=-1$.

Le but de ce chapitre est d'introduire et étudier l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Il s'agit d'une extension de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels qui a été introduite historiquement pour résoudre des équations polynomiales à coefficients réels n'admettant pas de solutions réelles. Nous allons étudier l'ensemble des nombres complexes sous toutes ses coutures et voir notamment qu'ils peuvent être exprimés sous plusieurs formes. Nous ferons des va-et-vient entre les nombres complexes, la trigonométrie et aussi la géométrie durant tout ce chapitre.

I Notion de nombre complexe

1) Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

La construction de l'ensemble des nombres complexes est hors-programme. La définition/proposition suivante est donc admise.

Nous verrons cependant, dans les chapitres 17 et 20, des méthodes de construction de $\mathbb{C}$ en guise d'exemples des notions des chapitres susmentionnés.

Proposition/Définition (ensemble des nombres complexes). *Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$ et dont les éléments sont appelés (nombres) complexes, tel que :*

- *$\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.*
- *$\mathbb{C}$ possède une addition interne, notée $+$, et une multiplication interne, notée $\cdot$ ou $\times$, qui prolongent celles de $\mathbb{R}$ et vérifient les mêmes propriétés, c'est-à-dire :*
  - ⋆ *l'addition*
    - — *est commutative : pour tout $(z,z')\in\mathbb{C}^2$, $z+z'=z'+z$.*
    - — *est associative : pour tout $(z,z',z'')\in\mathbb{C}^3$, $z+(z'+z'')=(z+z')+z''$.*
    - — *possède un élément neutre, noté 0 : pour tout $z\in\mathbb{C}$, $z+0=0+z=z$.*

    Et tout z dans $\mathbb{C}$ admet un opposé, noté $-z$: $z+(-z)=(-z)+z=0$.
  - ⋆ *la multiplication*
    - — *est commutative : pour tout $(z,z')\in\mathbb{C}^2$, $z\cdot z'=z'\cdot z$.*
    - — *est associative : pour tout $(z,z',z'')\in\mathbb{C}^3$, $z\cdot(z'\cdot z'')=(z\cdot z')\cdot z''$.*
    - — *possède un élément neutre, noté 1 : pour tout $z\in\mathbb{C}$, $z\cdot 1=1\cdot z=z$.*
    - — *est distributive par rapport à l'addition : pour tout $(z,z',z'')\in\mathbb{C}^3$,*

$$z\cdot(z'+z'')=z\cdot z'+z\cdot z''.$$

- *Il existe un complexe, noté i, qui vérifie $\mathrm{i}^2=-1$.*
- *Pour tout complexe z, il existe deux réels x et y, uniques, tels que $z=x+\mathrm{i}y$. Cette écriture est appelée écriture algébrique de z.*

interne signifie que le résultat de l'addition ou de la multiplication de deux éléments de $\mathbb{C}$ appartient à $\mathbb{C}$.

⚠ L'opposé d'un réel est encore un réel puisque l'addition de $\mathbb{C}$ prolonge celle de $\mathbb{R}$.

Comme avec les réels i^2 désigne encore $\mathrm{i}\times\mathrm{i}$ bien sûr.

⚠ Dans ce chapitre (et les suivants), quand nous écrirons « Soit $z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}$ », cela signifiera : « Soit $z\in\mathbb{C}$, soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ l'unique couple de réels tel que $z=x+\mathrm{i}y$ ». En particulier, cela signifiera que x et y sont réels.

Remarques :

- L'unicité de l'écriture algébrique signifie que, pour tous $z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}$ et $z'=x'+\mathrm{i}y'\in\mathbb{C}$, alors

$$z=z' \iff x=x' \text{ et } y=y'.$$

En particulier le complexe $z=x+\mathrm{i}y$ est nul si et seulement si $x=y=0$.

Et donc x,y,x',y' sont réels d'après la convention d'écriture que l'on vient d'adopter.

- Le complexe i est **non réel**. En effet le carré d'un réel est un réel positif, ce qui n'est pas le cas de $\mathrm{i}^2 = -1$.

Définition. *On note* $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

2) Calculs algébriques dans $\mathbb{C}$

La soustraction dans $\mathbb{C}$ prolonge également la soustraction dans $\mathbb{R}$.

Définition (soustraction dans $\mathbb{C}$). *Pour tout* $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, *on note* $z - z' = z + (-z')$ *la soustraction de* z *par* z'.

Comme dans le chapitre 3, on obtient de nombreuses autres propriétés (avec les mêmes démonstrations) :

En particulier, si $x \in \mathbb{R}$, $x + \mathrm{i}0 = x + 0 = x$.

Proposition. *Pour tout complexe* z, $0 \cdot z = 0$ *et* $(-1) \cdot z = -z$.

Proposition (développement/factorisation). *Soient* z, z', ζ *et* ζ' *des complexes. On a*

- $\zeta z - \zeta z' = \zeta(z - z')$.
- $\zeta z + \zeta z' + \zeta' z + \zeta' z' = (\zeta + \zeta')(z + z')$.
- $\zeta z - \zeta z' - \zeta' z + \zeta' z' = (\zeta - \zeta')(z - z')$.
- $\zeta z + \zeta z' - \zeta' z - \zeta' z' = (\zeta - \zeta')(z + z')$.

Proposition. *Pour tout* $(z, z', z'') \in \mathbb{C}^3$, *si* $z + z' = z + z''$, *alors* $z' = z''$.

Ainsi, on fait des calculs d'addition, soustraction, multiplication avec des nombres complexes exactement comme avec les réels en ajoutant la propriété que $\mathrm{i}^2 = -1$.

Exemples :

- $(2 - \mathrm{i})(1 + 3\mathrm{i}) = 2 + 6\mathrm{i} - \mathrm{i} - 3\mathrm{i}^2 = 5 + 5\mathrm{i}$.
- $(5 - 4\mathrm{i})(2 - 7\mathrm{i}) = 10 - 35\mathrm{i} - 8\mathrm{i} + 28\mathrm{i}^2 = -18 - 43\mathrm{i}$.

Plus généralement :

En particulier, si $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels, alors

$$-z = -x - \mathrm{i}y.$$

Proposition. *Soit* $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ *et* $z = x' + \mathrm{i}y' \in \mathbb{C}$. *Alors* :

$$z + z' = x + x' + \mathrm{i}(y + y'), \qquad z - z' = x - x' + \mathrm{i}(y - y')$$

$$zz' = xx' - yy' + \mathrm{i}(xy' + x'y).$$

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Puisque $z = x + \mathrm{i}y \neq 0$, on a $x \neq 0$ ou $y \neq 0$ donc $x^2 + y^2 \neq 0$ et il est donc licite de former le réel $\frac{x}{x^2+y^2}$ et le réel $\frac{y}{x^2+y^2}$.

Qu'en est-il de la division de complexes ?

Proposition/Définition. *Soit* $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}^*$. *On définit l'inverse de* z *par*

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \mathrm{i}\,\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

On a $z \times \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \times z = 1$.

Dans la pratique, on n'utilise jamais cette formule mais plutôt $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ avec les notions de conjugaison et de module du paragraphe II.

Démonstration. On a

$$z \times \frac{1}{z} = (x + \mathrm{i}y)\left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \mathrm{i}\,\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{(x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y)}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - \mathrm{i}xy + \mathrm{i}yx + y^2}{x^2 + y^2} = 1,$$

et, par commutativité de la multiplication, $\frac{1}{z} \times z = 1$. $\square$

La division dans $\mathbb{C}$ prolonge également la division dans $\mathbb{R}$. Et il n'y a toujours qu'un interdit suprême : **on ne peut pas diviser par** 0.

Ne surtout pas oublier le cas où $z = 0$! En effet, on ne simplifie (en divisant) par z que s'il est non nul.

Définition (division dans $\mathbb{C}$). *Pour tous complexes z et $z' \neq 0$, on note $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$ la division ou quotient de z par z'.*

Comme on l'a vu plus haut, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $0 \times z = z \times 0 = 0$ donc 0 n'admet d'inverse pour la multiplication. Autrement dit : tout complexe non nul admet un inverse dans $\mathbb{C}$.

Proposition. *Soient z, z' et z'' des complexes.*

- *Si $zz' = zz''$, alors $\underline{z = 0}$ ou $z' = z''$.*
- *Si $zz' = 0$, alors $z = 0$ ou $z' = 0$.*

Définition (puissances entières dans $\mathbb{C}$). *Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$, on appelle puissance $n^{\text{ième}}$ de z, et note z^n, le complexe $z^n = \underbrace{z \times z \times \cdots \times z}_{n \text{ termes}}$. On pose $z^0 = 1$.*

Si $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$ et $z \neq 0$, on définit $z^n = \underbrace{\frac{1}{z} \times \frac{1}{z} \times \cdots \times \frac{1}{z}}_{-n \text{ termes}}$.

Exemple :

Toutes les propriétés des puissances entières de réels s'étendent donc aux puissances entières de complexes (avec les mêmes démonstrations) :

Les identités remarquables pour les réels restent encore valables pour les complexes.

Proposition. *Soient n et p deux entiers relatifs et z et z' deux complexes non nuls. Nous avons :*

- $(zz')^n = z^n z'^n$
- $z^{n+p} = z^n z^p$
- $(z^n)^p = z^{np} = (z^p)^n$
- $\left(\frac{z}{z'}\right)^n = \frac{z^n}{z'^n}$
- $z^{n-p} = \frac{z^n}{z^p}$
- $z^{-n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n}$.

Proposition. *Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $z^n = 0$ si et seulement si $z = 0$.*

Bien que l'on verra plus bas la notion de racine $n^{\text{ième}}$ de complexe, les notations $\sqrt[n]{z}$, $z^{1/n}$ et z^α sont strictement interdites lorsque $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N} \backslash \{0; 1\}$ et $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.

3) Inégalités dans $\mathbb{C}$

On peut définir un ordre sur $\mathbb{C}$, (cf. chapitre 16) mais nous ne l'utiliserons pas ces deux années.

Les inégalités n'ont aucun sens dans $\mathbb{C}$. En particulier, la notion de complexe positif ou négatif n'a pas de sens.

4) Parties réelles et imaginaires

On peut donc reformuler l'un des résultats du paragraphe I.1 de la façon suivante : deux complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

Définition. *Soit $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$. Le **réel** x est appelé partie réelle de z et est noté $\mathrm{Re}(z)$. Le **réel** y est appelé partie imaginaire de z et est noté $\mathrm{Im}(z)$.*

Remarque : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a donc $z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$.

Exemple : $\mathrm{Re}(1 - 2\mathrm{i}) = 1$ *et* $\mathrm{Im}(1 - 2\mathrm{i}) = -2$.

Et non pas $-2\mathrm{i}$! La partie imaginaire est le coefficient devant i et pas la « partie non réelle » de l'écriture algébrique.

À l'aide des calculs du paragraphe précédent, il vient :

Proposition (linéarité de Re et Im). *Pour tout $(z,z')\in\mathbb{C}^2$,*

$$\mathrm{Re}(z+z')=\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(z') \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(z+z')=\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(z').$$

⚠ C'est faux pour le produit (et le quotient) : en général

$$\mathrm{Re}(zz')\neq \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z') \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(zz')\neq \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(z').$$

Par exemple, $\mathrm{Re}(i)=0$ mais $\mathrm{Re}\,(i\times i)=-1\neq \mathrm{Re}(i)\times\mathrm{Re}(i)$.

Ces formules font penser aux formules d'addition du cosinus et du sinus. Ce n'est pas un hasard, comme on le verra dans le paragraphe III.1.b.

On a vu malgré tout des formules (qu'il est déconseillé de retenir) :

$$\mathrm{Re}(zz')=\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z')-\mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(z') \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(zz')=\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z')+\mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Re}(z').$$

Un cas particulier à retenir :

En d'autres termes, on peut sortir les constantes **réelles**.

Proposition. *Pour tous $z\in\mathbb{C}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, $\mathrm{Re}(\lambda z)=\lambda\,\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(\lambda z)=\lambda\,\mathrm{Im}(z)$.*

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Proposition. *Soit $z\in\mathbb{C}$. Alors $z\in\mathbb{R}$ si et seulement si $\mathrm{Im}(z)=0$.*

Démonstration. Notons $z=x+iy$ de sorte que $y=\mathrm{Im}(z)$. Si $y=0$ alors $z=x\in\mathbb{R}$. Réciproquement, supposons que $z\in\mathbb{R}$. Si $y\neq 0$ alors $i=\frac{z-x}{y}\in\mathbb{R}$ car quotient de réels, ce qui est absurde, donc $y=0$. $\square$

En d'autres termes, un complexe est un imaginaire pur s'il est de la forme iy avec $y\in\mathbb{R}$. L'ensemble des imaginaires purs est donc noté $i\mathbb{R}$.

Définition. *Soit $z\in\mathbb{C}$. Si $\mathrm{Re}(z)=0$, on dit que z est un imaginaire pur.*

Remarques :

- Seul 0 est à la fois réel et imaginaire pur.
- ⚠ On ne confondra pas les termes « complexe », « non réel » et « imaginaire pur ». Tout élément de $\mathbb{C}$ est un complexe (en particulier, un réel est un complexe !), un complexe non réel est un complexe de la forme $x+iy$ avec $y\neq 0$). Enfin, un imaginaire pur est un complexe de la forme iy. Un complexe peut n'être ni réel, ni imaginaire pur, ce n'est pas l'un ou l'autre !

  Par exemple, $1+i$ est un complexe non réel mais n'est pas un imaginaire pur.

5) Interprétation géométrique des complexes

On verra la notion de bijection d'un ensemble dans un autre dans le chapitre 15. Elle généralise celle vue dans le chapitre 4. Ici cela signifie que :
• A tout complexe z, on associe le point du plan de coordonnées $(\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z))$.
• A tout point M du plan, il existe un unique complexe z dont la partie réelle est l'abscisse de M et la partie imaginaire l'ordonnée de M.
On peut donc identifier ces objets.

Proposition/Définition. *On appelle plan complexe un plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. L'application*

$$\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{P}\\ z=x+iy & \longmapsto & \text{le point } M \text{ de coordonnées } (x,y)\end{array}\right.$$

est une bijection. On « identifie » alors $\mathbb{C}$ et $\mathcal{P}$.

Définition.

- *L'affixe d'un point M de coordonnées (x,y) est le complexe $z_M=x+iy$.*
- *L'affixe d'un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est le complexe $z_{\vec{u}}=x+iy$.*

Il découle de la définition que :

La bijection de la proposition ci-dessus dit notamment que deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont la même affixe.

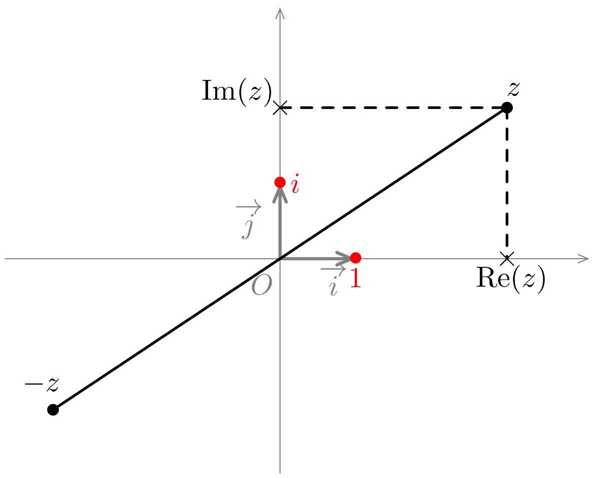
Proposition. *Pour tous points A et B du plan d'affixes respectives z_A et z_B, on a $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.*

On ne confondra pas le complexe i avec le vecteur $\vec{i}$.

Résumons déjà quelques points d'analogie entre complexes et géométrie :

Complexes	**Géométrie**
$\mathbb{C}$	Le plan $\mathcal{P}$
$z = x + \mathrm{i}y$	$M(x, y)$
$-z$	Symétrique de M par rapport à l'origine
$\dfrac{z_A + z_B}{2}$	Milieu du segment $[AB]$
$z_B - z_A$	$\overrightarrow{AB}$
Partie réelle	Abscisse
Partie imaginaire	Ordonnée
$\mathbb{R}$	Axe des abscisses
$i\mathbb{R}$	Axe des ordonnées

Nous irons même parfois plus loin : au lieu de parler du point M d'affixe z, nous identifierons ces deux objets et parlerons tout simplement du point z. Par exemple, ci-contre nous avons représenté les points i et $z = 3 + 2\mathrm{i}$.



Dans le suite de ce chapitre, nous donnerons l'interprétation géométrique de chaque objet que nous définirons. Cet interprétation est l'un des objectif du programme donc il est important de bien la comprendre dès maintenant.

6) Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

Dans ce paragraphe, les fonctions sont définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et non de $\mathbb{C}$. On peut bien sûr définir des fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ (et on le fera dans les paragraphes V et VI.) mais la notion de fonction dérivable de la variable complexe (on parle de fonction holomorphe) est totalement hors-programme.

Dans ce paragraphe, nous étendons quelques résultats du chapitre 4 aux fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes : ce qui change donc est que l'ensemble d'arrivée est une partie de $\mathbb{C}$, autrement dit, que l'image d'un réel du domaine de définition peut désormais être un nombre complexe. Mais toutes les notions se généralisent-elles ?

a) Extension des résultats généraux

Les notions du paragraphe I de la partie A du chapitre 4 se généralisent sans problème (antécédents, images, ensemble image, fonctions égales, fonction constante). La notion de courbe représentative aussi mais elle se trace dans l'espace (il faut prévoir un axe pour représenter la variable $x \in \mathbb{R}$ et un plan pour son image $z = f(x) \in \mathbb{C}$... ce qui n'est pas très commode à tracer à la main).

La composition de fonctions et les opérations algébriques (addition, soustraction, multiplication, inverse et quotient) s'étendent aussi. On peut ajouter les deux opérations suivantes :

Par définition, on a donc
$$f = \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f).$$

Définition. *Soit E une partie de $\mathbb{R}$ et soit $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$. On définit les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ par :*

$$\mathrm{Re}(f) : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Re}(f(x)) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f) : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Im}(f(x)) \end{array} \right. .$$

On les appelle respectivement la (fonction) partie réelle et la (fonction) partie entière de f.

On peut encore parler de fonction paire, impaire et périodique définie sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes.

Exemple : *La fonction $t \longmapsto \cos(t) + \mathrm{i}\sin(t)$ est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{U}$.*

On peut toutefois dire que $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ est bornée lorsque
$$|f| = \sqrt{\mathrm{Re}(f)^2 + \mathrm{Im}(f)^2}$$
est une fonction majorée (ce qui à un sens puisqu'elle est alors à valeurs réelles).

⚠ Il n'y a pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$. Aussi il n'y a aucun sens à parler du signe, des variations, de minorants ou de majorants de fonctions à valeurs complexes.

b) Continuité et dérivabilité

Conformément au programme, on définit pour le moment la continuité et la dérivabilité d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par celles de ses parties réelles et imaginaires.

On considère E une union d'un nombre fini d'intervalles non vides et non réduits à un point de $\mathbb{R}$. Soit a un point de E ou extrémité (éventuellement infinie) d'un des intervalles constituant E.

Nous donnerons une autre définition de la continuité et dérivabilité (bien sûr totalement équivalente) dans les chapitres 21 et 22 à partir de la notion de limite mais cela suppose d'avoir rigoureusement défini le concept de limite.

Définition. *Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$.*

- *Soit $a \in E$. On dit que f est continue en a si les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues en a.*
- *On dit que f est continue sur E si les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues sur E.*

On note $\mathscr{C}(E, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues sur E et à valeurs complexes.

Définition. *Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$.*

- *Soit $a \in E$. On dit que f est dérivable en a si les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables en a. On définit alors la dérivée de f en a par*
$$f'(a) = \mathrm{Re}(f)'(a) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f)'(a).$$
- *On dit que f est dérivable sur E si les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables sur E. On définit alors la dérivée de f par $f' = \mathrm{Re}(f)' + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f)'$.*

On note $\mathscr{D}(E, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur E et à valeurs complexes.

On a donc $\mathrm{Re}(f') = \mathrm{Re}(f)'$, et $\mathrm{Im}(f') = \mathrm{Im}(f)'$.

Définition. *On dit que $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur E si f est dérivable sur E et f' continue sur E. On note $\mathscr{C}^1(E, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur E et à valeurs complexes.*

On admet que les formules de dérivation d'une somme (plus généralement d'une combinaison linéaire), d'un produit et d'un quotient de fonctions à valeurs complexes sont les mêmes que pour celles à valeurs réelles. Il en est de même pour la formule de dérivation de la composée d'une fonction à valeurs réelles par une fonction à valeurs complexes.

C'est calculatoire et peu intéressant à montrer (et on verra une preuve bien plus simple dans le chapitre 22).

On peut aussi écrire $f : x \mapsto \frac{\cos(x^2)+\mathrm{i}x)(1-\mathrm{i}\sqrt{x})}{1+x}$ puis développer, séparer $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ et montrer qu'elles sont toutes les deux dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exemple : *Notons* $f : x \longmapsto \dfrac{\cos(x^2)+\mathrm{i}x}{\mathrm{i}\sqrt{x}+1}$.

Et je vous laisse simplifier...

On ne dira rien pour la dérivée de la composition d'une fonction à valeurs complexes par une fonction à valeurs complexes puisque cette dernière devrait être de la variable complexe et, on l'a dit, c'est hors programme

Il y a néanmoins un cas particulier au programme : celui de l'exponentielle complexe d'une fonction de E dans $\mathbb{C}$. Nous en reparlerons dans le paragraphe III.4.b.

⚠ Encore une fois, prudence avec la généralisation des théorèmes du chapitre 4, notamment ceux faisons intervenir des questions de monotonie : cela n'a aucun sens pour des fonctions à valeurs complexes. Contentons-nous d'énoncer l'un des résultats qui se généralise et qui sera utile dans le chapitre 10 :

Théorème. *Soit I un* ***intervalle*** *non vide et non réduit à un point. Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est constante sur I si et seulement si f est dérivable sur I et f' est nulle sur I.*

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer le théorème bien connu pour les fonction à valeurs réelles à $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ et d'utiliser le fait qu'un complexe est nul si et seulement si ses parties réelles et imaginaires le sont. □

II Conjugaison et module

1) Conjugaison

a) Définition et interprétation géométrique

Définition. *Soit $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$. On appelle conjugué de z, et on note $\overline{z}$, le complexe $x - \mathrm{i}y$.*

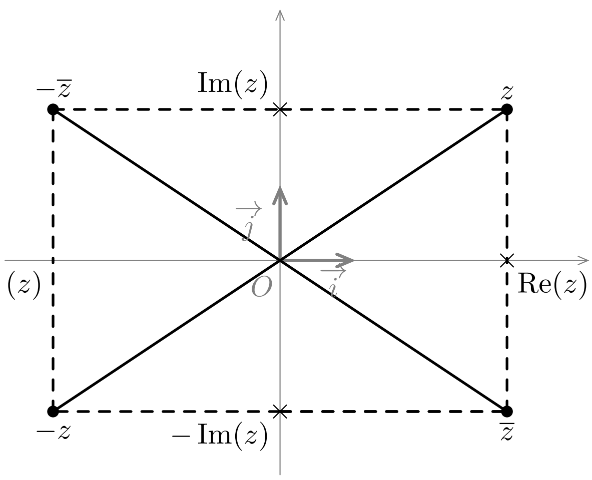
Si $z \in \mathbb{C}$, on a donc

$$\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z).$$

Exemples : $\overline{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$, $\overline{2} = 2$, $\overline{3-2\mathrm{i}} = 3 + 2\mathrm{i}$.

Interprétation géométrique. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{z}$ est le symétrique de z par par rapport à l'axe des abscisses.

Remarquons que $-\overline{z}$ est le symétrique de z par rapport à l'axe des ordonnées. On a déjà vu que $-z$ est le symétrique de z par rapport à l'origine.



Ne pas confondre conjugué et conjugaison. La conjugaison complexe est la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout complexe z associe son conjugué $\overline{z}$.

b) Propriétés de la conjugaison

Proposition. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$,*

1. $\overline{\overline{z}} = z$,

2. $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z = \overline{z}$,

3. $z \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $\overline{z} = -z$.

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Par exemple, si $z \in \mathbb{C}$, alors $\overline{2+\mathrm{i}z} \neq 2 - \mathrm{i}z$ car z n'est pas forcément réel ! En utilisant les propriétés de ce paragraphe, $\overline{2+\mathrm{i}z} = 2 - \mathrm{i} \times \overline{z}$, et si on veut être plus précis, on note $z = x + \mathrm{i}y$, et on a finalement $\overline{2+\mathrm{i}z} = 2 - \mathrm{i}x - y$. Dans le même ordre d'idée, $\overline{i+3} = -\mathrm{i} + 3$ et non pas $i - 3$: c'est la partie imaginaire qu'on multiplie par -1, pas « le deuxième morceau ».

Proposition. *Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. On a :*

1. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, $\overline{-z'} = -\overline{z'}$ et $\overline{z-z'} = \overline{z} - \overline{z'}$

2. $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

3. Si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

4. $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$.

Démonstration. Notons $z = x + \mathrm{i}y$ et $z = x' + \mathrm{i}y'$. On a alors $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$ et $\overline{z'} = x' - \mathrm{i}y'$.

1. D'une part, $z + z' = (x+x') + \mathrm{i}(y+y')$ donc $\overline{z+z'} = (x+x') - \mathrm{i}(y+y')$. D'autre part, $\overline{z} + \overline{z'} = (x+x') - \mathrm{i}(y+y')$. Ainsi $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$. Ensuite $\overline{-z'} = \overline{-x' - \mathrm{i}y'} = -x' + \mathrm{i}y' = -(x' - \mathrm{i}y') = -\overline{z'}$. Le cas de la soustraction découle de ces deux derniers cas.
2. D'une part, $zz' = (xx' - yy') + \mathrm{i}(xy' + x'y)$ donc $\overline{zz'} = (xx' - yy') - \mathrm{i}(xy' + x'y)$. D'autre part,
$$\overline{z}\overline{z'} = (x - \mathrm{i}y)(x' - \mathrm{i}y') = (xx' - yy') - \mathrm{i}(xy' + x'y).$$

Pour la première fois ici, on a écrit que
$$\frac{1}{x - \mathrm{i}y} = \frac{x + \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}.$$
On a multiplié au numérateur comme au dénominateur par le conjugué et utilise le fait que
$$z\overline{z} = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 + y^2.$$
Nous en reparlerons dans le prochain paragraphe.

3. Si $z' \neq 0$, alors $\dfrac{1}{z'} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\dfrac{y}{x^2+y^2}$ donc $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{x}{x^2+y^2} + \mathrm{i}\dfrac{y}{x^2+y^2}$. D'autre part
$$\frac{1}{\overline{z'}} = \frac{1}{x - \mathrm{i}y} = \frac{x}{x^2+(-y)^2} - \mathrm{i}\frac{-y}{x^2+(-y)^2} = \frac{x + \mathrm{i}y}{x^2+y^2}.$$
Ainsi $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z'}}$. En utilisant le point 2, on obtient alors :
$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{z \times \frac{1}{z'}} = \overline{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \overline{z} \times \frac{1}{\overline{z'}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}. \qquad \square$$
4. On a $\dfrac{z+z'}{2} = \dfrac{x + \mathrm{i}y + x - \mathrm{i}y}{2} = \dfrac{2x}{2} = x = \mathrm{Re}(z)$ et $\dfrac{z - z'}{2\mathrm{i}} = \dfrac{x + \mathrm{i}y - x + \mathrm{i}y}{2\mathrm{i}} = \dfrac{2\mathrm{i}y}{2\mathrm{i}} = y = \mathrm{Im}(z)$.

Attention à ne pas écrire $3^2 + \mathrm{i}^2$! Si $z = x + \mathrm{i}y$, le produit $z \times \overline{z}$ est égal à $x^2 + y^2$, c'est-à-dire à la partie réelle au carré + la partie imaginaire au carré ! Il n'y a que des termes positifs dans l'histoire !.

Exemple :

Comme on peut le voir dans cet exemple, la partie réelle d'un quotient n'est pas le quotient des parties réelles en général. Même chose pour les parties imaginaires. D'où l'importance de l'expression conjuguée !

Corollaire. *Pour tous $n \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{C}^*$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ (valable aussi si $z = 0$ et $n \in \mathbb{N}$).*

DÉMONSTRATION.

□

2) Module

a) Définition

⚠ Là aussi, c'est la partie imaginaire qui est mise au carré, pas « le morceau imaginaire » : le module de z n'est pas $\sqrt{x^2+(\mathrm{i}y)^2} = \sqrt{x^2-y^2}$ qui n'existe pas si $|y| > |x|$!

Définition. *Soit $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$. On définit le module de z, et on note $|z|$, le réel positif $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.*

Exemples : $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$, $|i| = 1$, $|-2| = 2$, $|3-4\mathrm{i}| = 5$ *et* $|-2+3\mathrm{i}| = \sqrt{13}$.

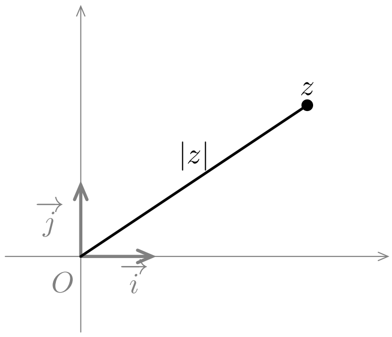
Remarques :

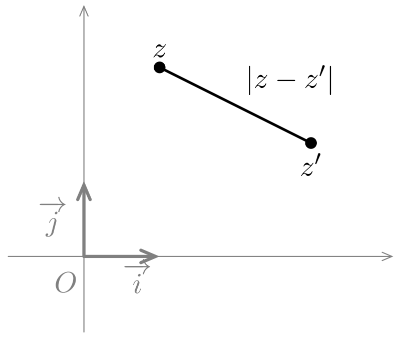
- Si $z \in \mathbb{C}$, on a donc $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$.
- Si $z \in \mathbb{C}$, comme $|z|$ est un réel positif, on a $\sqrt{|z|^2} = |z|$.
- Lorsque $z \in \mathbb{R}$, alors
$$\underbrace{|z|}_{\text{module}} = \sqrt{z^2} = \underbrace{|z|}_{\text{valeur absolue}}$$
Le module est donc une généralisation de la valeur absolue aux complexes (c'est pour cela qu'on les note de la même façon).
- Si $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ est tel que $|z|^2 = |z'|^2$, alors $|z| = |z'|$.
⚠ Mais on n'a pas $z = z'$ ou $z = -z'$ a priori.
Par exemple $|1| = |i|$ *mais* $1 \neq \pm\mathrm{i}$.

b) Interprétation géométrique

Si z et z' sont des complexes, alors :

- $|z|$ est la distance du point d'affixe z à l'origine.
- $|z - z'|$ est la distance entre les points z et z' (c'est-à-dire la longueur du segment qui joint les points du plan d'affixes z et z').





Rappelons (cf. partie A du chapitre 4) que, si $\Omega(x_0, y_0)$ est un point du plan et si $r \geqslant 0$, le cercle de centre Ω et de rayon r admet pour équation :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

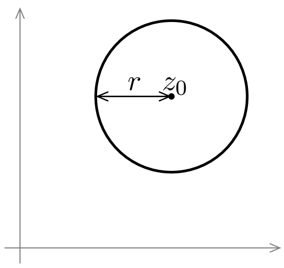
Le terme de gauche est $|z - z_0|^2$. Les définitions suivantes sont alors intuitives, étant donnée la correspondance entre complexes et points du plan :

Plus rigoureusement, ce sont les cercles et disques de centre Ω dont l'affixe est z_0.

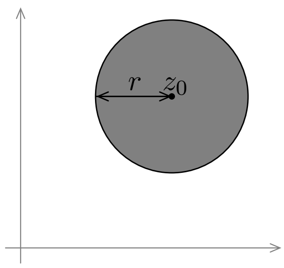
Définition. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, soit $r \in \mathbb{R}_+$. On définit les ensembles suivants :*

- $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$ *est le cercle de centre z_0 de rayon r.*
- $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leqslant r\}$ *est le disque (fermé) de centre z_0 de rayon r.*
- $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ *est le disque ouvert (c'est-à-dire privé du cercle) de centre z_0 de rayon r.*

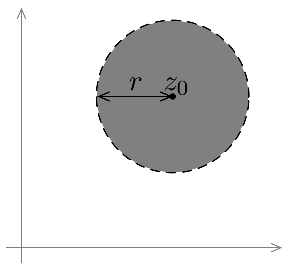
Lorsque $z_0 = 0$ et $r = 1$, on parlera respectivement du cercle unité (qu'on notera $\mathbb{U}$, cf. paragraphe II.1.a), du disque unité fermé ou du disque unité ouvert.



Cercle



Disque fermé



Disque ouvert

Exemple : *Déterminons l'ensemble des complexes z tels que*

$$A(z) = \frac{z+2}{1 + \mathrm{i}z} \in \mathbb{R}.$$

c) Propriétés du module

Proposition. *Soient* $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.

1. $|z| = 0$ *si et seulement si* $z = 0$,
2. $|\operatorname{Re}(z)| \leqslant |z|$ *avec égalité si et seulement si* $z \in \mathbb{R}$,
3. $|\operatorname{Im}(z)| \leqslant |z|$ *avec égalité si et seulement si* $z \in i\mathbb{R}$,
4. $z \times \overline{z} = |z|^2$,
5. *Si* $z \neq 0$, *alors* $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$,
6. $|z \times z'| = |z| \times |z'|$. *En particulier :*
   - $|z - z'| = |z' - z|$
   - *si* $\lambda \in \mathbb{C}$ *est de module* 1, *alors* $|\lambda z| = |z|$,
   - *si* $\lambda \in \mathbb{R}_+$, *alors* $|\lambda z| = \lambda |z|$,
7. $|\overline{z}| = |z|$.
8. *Si* $z' \neq 0$, *alors* $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.
9. *Si* $z \neq 0$ *et* $n \in \mathbb{Z}$, *alors* $|z^n| = |z|^n$ *(valable aussi si* $z = 0$ *et* $n \in \mathbb{N}$*).*

Formule très importante : pour diviser deux complexes ou juste calculer un inverse, on multiplie au numérateur et au dénominateur par le conjugué pour faire apparaître le carré du module au dénominateur.

Démonstration. Notons $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$.

1. Raisonnons par équivalences :
$$|z| = 0 \iff |z|^2 = 0 \iff x^2 + y^2 = 0 \iff x = y = 0 \iff z = 0.$$
2. La racine carrée étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$,
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant \sqrt{x^2} = |x| = |\operatorname{Re}(z)|,$$
avec égalité si et seulement si $x^2 + y^2 = x^2$ si et seulement si $y^2 = 0$ si et seulement si $y = 0$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.
3. Analogue au point 2.
4. $z\overline{z} = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 + y^2 = |z|^2$.
5. Découle immédiatement du point 4 puisque $z \neq 0$ (et donc $|z| \neq 0$).
6.
7. On a $|\overline{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.
8. D'après le point 6, $|z'| \times \left|\frac{z}{z'}\right| = \left|z' \times \frac{z}{z'}\right| = |z|$, ce qui permet de conclure.
9. S'obtient par récurrence à partir des points 6 et 8. □

Une somme de termes **positifs** est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls. Et le carré d'un nombre est nul si et seulement si ce nombre est nul.

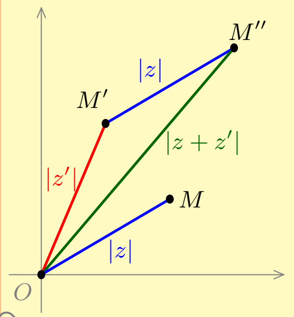
Théorème (inégalité triangulaire). *Pour tous complexes* z *et* z',
$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|,$$
avec inégalité si et seulement si z *et* z' *sont colinéaires dans le même sens.*

« Colinéaires dans le même sens » signifie les vecteurs d'affixes z et z' dirigent la même droite et dans le même sens. Autrement dit $z' = 0$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z = \lambda z'$.

Démonstration.

$\square$

Interprétation géométrique de l'inégalité triangulaire. Soient M et M' deux points du plans. Notons z et z' leurs affixes respectives. Si on note M'' le point d'affixe $z+z'$ alors, dans le triangle $0M'M''$, la longueur $0M''$ est inférieur ou égale à la somme des longueurs des deux autres côtés.



Corollaire (inégalité triangulaire renversée). *P our tous complexes z et z',*

$$\big||z|-|z'|\big| \leqslant |z-z'|.$$

Démonstration. L'inégalité triangulaire implique que

$$|z| = |(z-z')+z'| \leqslant |z-z'|+|z'|$$

donc $|z|-|z'| \leqslant |z-z'|$. De même $|z'| = |(z'-z)+z| \leqslant |z'-z|+|z'|$ donc $|z'|-|z| \leqslant |z-z'|$. En notant $a=|z-z'|$, on a donc $-a \leqslant |z|-|z'| \leqslant a$ et donc $\big||z|-|z'|\big| \leqslant a$. D'où le résultat. $\square$

Remarque : Soient z et z' des complexes. Puisque $|-z'|=|z'|$, on en déduit :

$$\boxed{\big||z|-|z'|\big| \leqslant |z \pm z'| \leqslant |z|+|z'|}$$

III Forme trigonométrique d'un complexe

1) Complexes de module 1

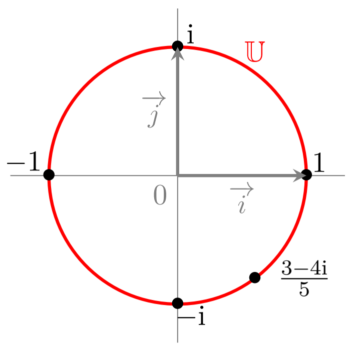
a) Ensemble $\mathbb{U}$

Définition. *On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$ l'ensemble des complexes de module 1.*

En particulier, $0 \notin \mathbb{U}$. On pourra donc parler de quotient d'élements de $\mathbb{U}$ sans préciser que le dénominateur est non nul.

Exemples : *1, -1, i et $-\mathrm{i}$ appartiennent à $\mathbb{U}$. Puisque $\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9+16}{25} = 1$, on a aussi $\frac{3-4\mathrm{i}}{5} \in \mathbb{U}$.*

Interprétation géométrique. L'image de $\mathbb{U}$ dans le plan complexe est le cercle trigonométrique, c'est-à-dire le cercle de centre O de rayon 1.



> Dans le chapitre 17, on dira que $\mathbb{U}$ est un groupe pour la multiplication.
> ⚠ $\mathbb{U}$ n'est pas stable par somme. Par exemple, $1+1=2\notin\mathbb{U}$.

Proposition. *L'ensemble $\mathbb{U}$ est stable par produit, par passage à l'inverse, par quotient et par conjugaison.*

⇝ DÉMONSTRATION LAISSÉE EN EXERCICE.

b) Exponentielle d'un imaginaire pur

Dans le chapitre 5, on a vu que, pour tous réels a et b vérifiant $a^2+b^2=1$, il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $\cos(\theta)=a$ et $\sin(\theta)=b$. De plus, θ est unique sur tout intervalle semi-ouvert de longueur 2π.

Proposition. *Soit $z\in\mathbb{U}$. Il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $z=\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta)$. De plus, θ est unique sur tout intervalle semi-ouvert de longueur 2π.*

DÉMONSTRATION. Puisque $1=|z|=\sqrt{\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2}$, on applique le rappel ci-dessus avec $a=\mathrm{Re}(z)$ et $b=\mathrm{Im}(z)$. □

Définition. *Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, on note $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta)$.*

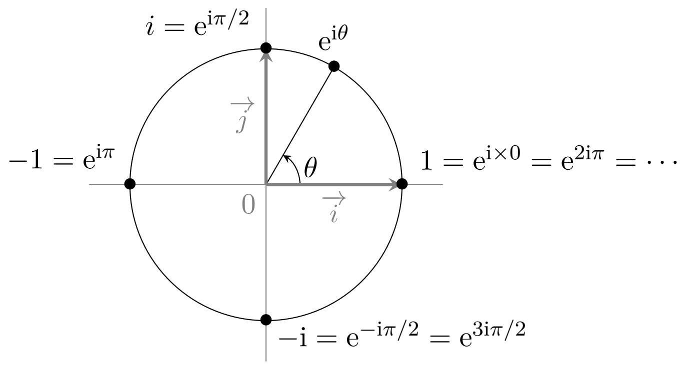
⚠ Pour l'instant, ce n'est qu'une notation ! Il n'y a a priori aucun lien avec la fonction exponentielle réelle ! Il est hors de question d'écrire

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\underbrace{e\times\cdots\times e}_{\mathrm{i}\theta\text{ fois}}$$

> Nous verrons, dans le chapitre 27, une définition commune de ces deux exponentielles.

Nous allons voir dans la suite que cette exponentielle vérifie les mêmes propriétés que l'exponentielle réelle et c'est pour cette raison que cette notation est légitime.

Interprétation géométrique. Le complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ correspond au point du cercle trigonométrique formant un angle θ avec l'axe des abscisses.



> On obtient notamment la formule d'Euler :
> $$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}+1=0,$$
> célèbre pour faire apparaître cinq nombres fondamentaux des mathématiques : $0,1,\mathrm{i},\pi,\mathrm{e}$.

Exemples :

- $1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\times 0}=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi}$ *et, plus généralement, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $1=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}n\pi}$.*
- $-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi}$ *et, plus généralement, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $-1=\mathrm{e}^{(2n+1)\mathrm{i}\pi}$.*
- $\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}=\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/2}$.

Proposition. *Pour tous θ et θ' réels, on a :*

1. $\cos(\theta)=\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ *et* $\sin(\theta)=\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$,
2. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\in\mathcal{U}$,
3. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$ *si et seulement si* $\theta\equiv\theta'\ [2\pi]$.
4. *Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2n\pi)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Autrement dit la fonction $\theta\longmapsto\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.*
5. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$,

6. $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$,

7. $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.

Démonstration. Soient θ et θ' des réels.

1. Découle de la définition.
2. $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)} = \sqrt{1} = 1$ donc $e^{i\theta} \in \mathcal{U}$.
3. Par unicité de la forme algébrique d'un complexe, $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ si et seulement si $\cos(\theta) = \cos(\theta')$ et $\sin(\theta) = \sin(\theta')$ si et seulement si $\theta \equiv \theta' \, [2\pi]$.
4. Découle du fait que $\cos$ et $\sin$ sont 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.
5. On utilise les formules d'addition de $\cos$ et $\sin$:
$$\begin{aligned} e^{i\theta}e^{i\theta'} &= (\cos(\theta)+i\sin(\theta))(\cos(\theta')+i\sin(\theta')) \\ &= \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + i(\sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta')) \\ &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') = e^{i(\theta+\theta')}. \end{aligned}$$
6. D'un côté $\overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos(\theta)+i\sin(\theta)} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$.
De l'autre $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$ puisque $\cos$ est paire et $\sin$ impaire sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$. Enfin $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = \dfrac{\overline{e^{i\theta}}}{|e^{i\theta}|^2} = \overline{e^{i\theta}}$.
7. Découle des points 5 et 6. $\square$

Corollaire. *Pour tous $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $H(n)$: « $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ »

- **Initialisation.** $\left(e^{i\theta}\right)^0 = 1 = e^{i\times 0\times\theta}$ donc $H(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $H(n)$ vraie. Alors le point 5 ci-dessus entraîne que
$$e^{i(n+1)\theta} = e^{in\theta}e^{i\theta} = (e^{i\theta})^n e^{i\theta} = (e^{i\theta})^{n+1}.$$
Ainsi $H(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion.** Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H(n)$ est vraie.

Enfin, on se donne $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$. On a alors $-n \in \mathbb{N}$ donc $H(-n)$ est vraie : $\left(e^{i\theta}\right)^{-n} = e^{-in\theta}$. Par conséquent, le point 6 ci-dessus entraîne que $\left(e^{i\theta}\right)^{-n} = \dfrac{1}{e^{in\theta}}$. Par passage à l'inverse, on obtient que $H(n)$ est vraie. $\square$

c) Retour à la trigonométrie

Théorème (formules d'Euler). *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,*
$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

Démonstration. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. En notant $z = e^{i\theta}$, on a $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$. D'où les formules d'Euler. $\square$

Les formules d'Euler permettent de retrouver les formules de trigonométrie et d'en démontrer de nombreuses autres.

Cette approche sera capitale pour chercher des primitives de fonctions de ce type (cf. chapitre 10).

Linéarisation. Lorsque l'on rencontre un terme du type $\sin^p(x)\cos^q(x)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et p et q des entiers naturels non nuls, il suffit d'utiliser les formules d'Euler, de tout développer, simplifier et faire réapparaitre des formules d'Euler pour obtenir une forme linéarisée.

Par exemple, on se donne $x \in \mathbb{R}$ et on souhaite linéariser $\cos^4(x)\sin^2(x)$.

Méthode de l'arc moitié (ou angle moitié). Elle permet de faire apparaître des formules d'Euler lorsque l'on est face à un terme du type $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$, avec a et b des réels. La méthode consiste à factoriser par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{a+b}{2}}$:

Par exemple :

- ⋆ *Donnons-nous a et b des réels et retrouvons la formule de linéarisation de $\cos(a) - \cos(b)$. On a*

En prenant plutôt les parties imaginaires, on obtient :

$\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

- ⋆ *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} =$*

Théorème (formule de Moivre). *Pour tous $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,*

$$(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta).$$

Démonstration. Il s'agit simplement d'une réécriture de $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$. □

Cette formule permet plutôt d'obtenir des formules de factorisation, c'est-à-dire de passer d'une expression du type $\sin(nx)$ ou $\cos(nx)$ (avec $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$) à une expression en fonction de puissances de $\cos(x)$ ou $\sin(x)$.

On verra un autre exemple dans le chapitre 7 en utilisant la formule du binôme de Newton.

Par exemple, pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimons $\sin(4x)$ et $\cos(4x)$ comme combinaison linéaire de puissances de $\cos(x)$ et $\sin(x)$:

2) Arguments d'un complexe non nul

a) Notion d'arguments

Lemme. *Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors $\dfrac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de voir que $\left|\dfrac{z}{|z|}\right| = \dfrac{1}{|z|} \times |z| = 1$. □

Puisque, pour tout complexe $\zeta \in \mathcal{U}$, il existe θ tel que $\zeta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, la définition suivante a un sens :

0 n'a aucun argument par définition !

Définition (argument). *Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On dit qu'un réel θ est **un** argument de z si $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \dfrac{z}{|z|}$.*

Exemple : *Le complexe $1 + \mathrm{i}$*

Proposition. *Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un argument de z. Soit $\theta' \in \mathbb{R}$. Alors θ' est un argument de z si et seulement si $\theta' \equiv \theta[2\pi]$.*

DÉMONSTRATION. Comme θ est un argument de z, on a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \frac{z}{|z|}$. Ainsi θ' est un argument de z si et seulement si $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \frac{z}{|z|}$ si et seulement si $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ si et seulement si $\theta' \equiv \theta[2\pi]$. □

Plus généralement, z admet un unique argument dans tout intervalle semi-ouvert de longueur 2π.

Remarque : Il en découle que tout complexe $z \in \mathbb{C}^*$ admet une infinité d'arguments. Ainsi on ne parlera jamais de l'argument de z mais d'**un** argument de z. Tous les arguments de z diffèrent les uns des autres d'un multiple entier de 2π. En particulier, z admet un unique argument dans $]-\pi\,;\pi]$ appelé argument principal. Selon les sources, la notation $\arg(z)$ peut désigner :

- un argument de z (sans savoir lequel précisément).
- l'argument principal de z.
- l'ensemble des arguments de z, c'est-à-dire que $\arg(z) = \left\{\theta \in \mathbb{R} \,\middle|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \frac{z}{|z|}\right\}$.

Pour éviter toute confusion, on évitera cette notation et on se contentera de dire : soit θ un argument de z.

b) Propriétés des arguments

Proposition. *Soient z et z' deux complexes non nuls et soient θ et θ' des arguments respectifs de z et z'. Alors :*

1. *$\theta + \theta'$ est un argument de $z \times z'$.*
2. *$-\theta$ est un argument de $\overline{z}$.*
3. *$\theta - \theta$ est un argument de $\dfrac{z}{z'}$.*
4. *Si $\theta \equiv \theta'[2\pi]$, alors θ est un argument de $z + z'$.*
5. *$z \in \mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\theta \equiv 0[2\pi]$.*
6. *$z \in \mathbb{R}_-^*$ si et seulement si $\theta \equiv \pi[2\pi]$.*
7. *$z \in \mathbb{R}^*$ si et seulement si $\theta \equiv 0[\pi]$.*
8. *$z \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.*

⚠ En d'autres termes, quand deux complexes ont les mêmes arguments, leur somme est non nulle et a les mêmes arguments qu'eux. Il n'y a pas de formule générale pour un argument de $z + z'$, déjà parce que, dans le cas général, $z + z'$ peut être nul donc ne pas admettre d'argument. Une seule solution : le cas par cas, et le faire à la main.

Démonstration.

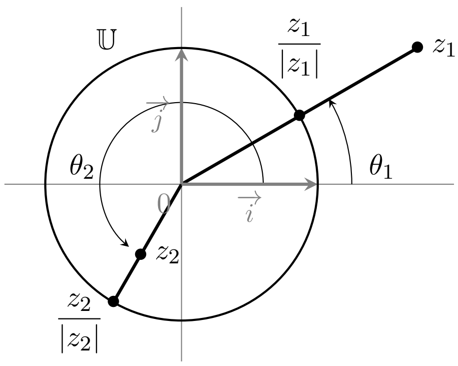
1. On a $\frac{zz'}{|zz'|} = \frac{z}{|z|}\frac{z'}{|z'|} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$ donc $\theta + \theta'$ est un argument de zz'.
2. On a $\frac{\overline{z}}{|\overline{z}|} = \frac{|z|^2/z}{|z|}\frac{|z|}{z} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ donc $-\theta$ est un argument de $\overline{z}$.
3. Découle des points 1 et 2.
4. Supposons que $\theta \equiv \theta'[2\pi]$.

Nous venons de montrer que, si deux complexes ont même argument, alors il y a égalité dans l'inégalité triangulaire. En effet, cela veut dire qu'ils sont colinéaires dans le même sens.

5. On a $z \in \mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{R}_+^*$ (puisque $|z| > 0$). Or $\mathcal{U} \cap \mathbb{R}_+^* = \{1\}$ si bien que $z \in \mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 1$ si et seulement si $\theta \equiv 0\,[2\pi]$.
6. Analogue au point précédent car $\mathcal{U} \cap \mathbb{R}_-^* = \{-1\}$.
7. Découle des deux points précédents.
8. On a $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ si et seulement si $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ (puisque $|z| > 0$). Or $\mathcal{U} \cap i\mathbb{R} = \{-\mathrm{i}; \mathrm{i}\}$ si bien que $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ si et seulement si $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ ou $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ si et seulement si $\theta \equiv 0\,[2\pi]$. □

c) Interprétation géométrique des arguments

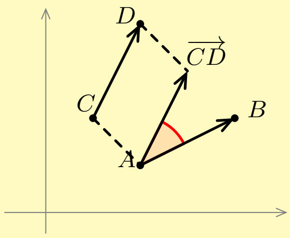
Si $z \in \mathbb{C}$, un argument de z est l'angle formé par le vecteur $\overrightarrow{OM_z}$ (avec M_z le point d'affixe z) avec l'axe des abscisses.



Proposition. *Soient A, B, C et D des points du plan d'affixes respectives a, b, c et d. On suppose que $a \neq b$ et $c \neq d$.*

- *La quantité $\left|\dfrac{d-c}{b-a}\right|$ est égal au quotient de deux longueurs $\dfrac{CD}{AB}$.*
- *Un argument de $\dfrac{d-c}{b-a}$ est une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$.*

Avec les mains : l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ est l'angle obtenu en « faisant partir les deux vecteurs du même point » et en allant de $\overrightarrow{AB}$ à $\overrightarrow{CD}$.



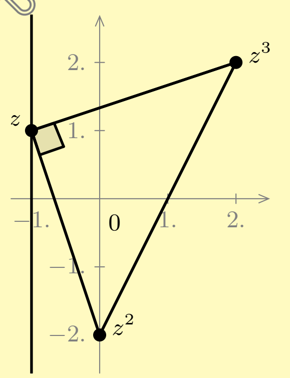
Démonstration. Découle de l'interprétation géométrique du module comme distance, et du fait que l'interprétation géométrique de l'argument d'un complexe z est l'angle formé par le vecteur $\overrightarrow{OM_z}$ avec l'axe des abscisses : quand on fait le quotient, on soustrait les arguments, et une mesure de l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{CD})$ moins une mesure de l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{AB})$ donne une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$. □

Corollaire. *Soient A, B et C des points du plan d'affixes respectives a, b et c. On suppose que $a \neq b$ et $a \neq c$. Soit θ un argument du complexe $\dfrac{c-a}{b-a}$. Alors, géométriquement, θ est une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. En particulier :*

- *A, B, C sont alignés $\iff \theta \equiv 0[\pi] \iff \dfrac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$.*
- *$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux $\iff \theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \iff \dfrac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}$.*

Exemple : *Donnons l'ensemble des complexes z tel que le triangle z, z^2 et z^3 soit rectangle en z.*

Notons A, B et C les points d'affixes z, z^2 et z^3 respectivement.



3) Notation exponentielle d'un complexe non nul

Définition. *Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Soit θ un argument de z. Notons $r = |z|$. L'écriture $z = re^{i\theta}$ est appelée écriture exponentielle de z.*

En effet, on a $e^{i\theta} = \frac{z}{|z|} = \frac{z}{r}$.

Remarques :

- De la même façon que lorsqu'on écrit $z = x + iy$, x et y désignent des réels (cf. paragraphe I.1) et plus précisément la partie réelle et la partie imaginaire de z, dans la suite, quand on écrira « Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ », cela signifiera : « Soit $z \in \mathbb{C}^*$, soit $r = |z| > 0$ et soit θ un argument de z ».
- ⚠ Dans cette écriture, r doit être strictement positif (c'est le module de z). Ainsi, lorsque z est écrit sous la forme $z = xe^{i\theta}$ avec $x < 0$, on procède ainsi :

- ⚠ Bien que $0 = 0 \times e^{i\theta}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on ne dit pas qu'il s'agit de l'écriture exponentielle de 0 : il n'y en a pas.
- Les écritures $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ et $z = x + iy$ sont respectivement appelées écriture trigonométrique et écriture algébrique de z.
- 0 n'admet pas d'écriture exponentielle ou trigonométrique car n'admet pas d'argument. En revanche, il admet une écriture algébrique.
- L'écriture algébrique est unique (cf. paragraphe I.1). Il n'y a pas unicité de l'écriture exponentielle, mais « presque » :

La forme trigonométrique est juste une réécriture de la forme exponentielle. Quand on fera un exercice, on se demandera toujours quelle est la forme la plus adaptée : la forme algébrique ou la forme exponentielle ? La première est plus adaptée pour des sommes, la seconde pour des produits ou des calculs de puissances.

Proposition. *Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On suppose qu'il existe un réel $R > 0$ et un réel α quelconque tels que $z = Re^{i\alpha}$. Alors $R = |z|$ et α est un argument de z.*

Démonstration. On a $|z| = |Re^{i\alpha}| = R \times 1 = R$ puis $e^{i\alpha} = \frac{z}{R} = \frac{z}{|z|}$ donc α est un argument de z par définition. □

La proposition suivante découle immédiatement des propriétés de l'exponentielle d'un imaginaire pur et du module d'un complexe.

Proposition. *Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ deux nombres complexes, avec r, r' des réels strictement positifs et θ, θ' des réels. Nous avons*

$$z = z' \quad \iff \quad r = r' \quad \text{et} \quad \theta \equiv \theta' \ [2\pi]$$

De plus $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$, $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$, $\overline{z} = re^{-i\theta}$ et

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad z^n = r^n e^{in\theta}.$$

Comment passer de la exponentielle à la forme algébrique, et réciproquement ?

- Pour passer de la forme exponentielle à la forme algébrique, il suffit de développer.

  Par exemple $2e^{i\pi/6} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\right) = \sqrt{3} + i$.

- Pour passer de la forme algébrique à la forme algébrique, il est facile de calculer le module : Si $z = x + iy$, alors $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Pour trouver un argument, on cherche un réel θ tel que $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, c'est-à-dire tel que

$$\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

  Lorsque $x \neq 0$, on a de plus $\tan(\theta) = \dfrac{y}{x}$. Sauf cas particuliers où on tombe sur des valeurs bien connues de sinus et cosinus, on devra utiliser les fonctions Arctan, Arcsin ou Arccos. Mais attention aux domaines de définition et aux ensembles d'arrivée de ces fonctions :

  ⋆ Lorsque $x > 0$ et $y > 0$, l'argument principal θ de $z = x + iy$ appartient à $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$. Puisque cet intervalle appartient à la fois aux domaines images de Arccos, Arcsin et Arctan, on a $\theta = \mathrm{Arccos}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$.

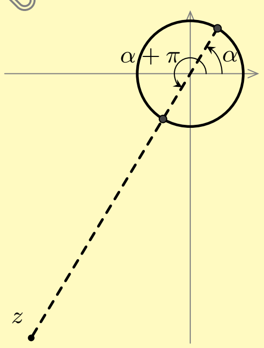
  ⋆ Lorsque $x > 0$ et $y < 0$, l'argument principal θ de $z = x + iy$ appartient à $\left]-\frac{\pi}{2}\,;0\right[$. Puisque cet intervalle appartient à la fois aux domaines images de Arcsin et Arctan (mais pas de Arccos), on a $\theta = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$.

Si $y = 0$ et $x \neq 0$, alors $z = x \in \mathbb{R}$ donc un argument de z est 0 si $x > 0$ et π si $x < 0$.

Si $x = 0$ et $y \neq 0$, alors $z = iy$ donc un argument de z est $\frac{\pi}{2}$ si $y > 0$ et $-\frac{\pi}{2}$ si $y < 0$.

$-\mathrm{Arccos}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ convient aussi.

$\pi - \text{Arcsin}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ et $\text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)+\pi$ conviennent aussi.



- ⋆ Lorsque $x < 0$ et $y > 0$, l'argument principal θ de $z = x + \mathrm{i}y$ appartient à $\left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[$. Puisque cet intervalle appartient au domaine image de Arccos (mais pas de Arcsin et Arctan), on a $\theta = \text{Arccos}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.
- ⋆ Lorsque $x < 0$ et $y < 0$, l'argument principal θ de $z = x + \mathrm{i}y$ appartient à $\left]-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right[$. Cet intervalle n'appartient à aucun des domaines images de Arccos, Arcsin et Arctan. Mais, comme l'argument de $-z$ appartient à $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\theta = \alpha + \pi$ avec $\alpha = \text{Arccos}\left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \text{Arcsin}\left(\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$.

Par exemple :

- ⋆ *Donnons la forme exponentielle de $z = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.*

- ⋆ *Donnons la forme exponentielle de $z = 2 - 7\mathrm{i}$.*

- ⋆ *Donnons la forme exponentielle de $z = -2 - 7\mathrm{i}$.*

- ⋆ *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Cherchons la forme exponentielle de $z = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$.*

4) Exponentielle complexe

a) Exponentielle d'un complexe

On a vu plus haut la notion d'exponentielle d'un imaginaire pur. On a vu dans le chapitre 4 la notion d'exponentielle d'un réel. On en déduit la notion d'exponentielle d'un nombre complexe :

Si z est réel ou imaginaire pur, cette définition coïncide avec, respectivement, l'exponentielle réelle et l'exponentielle définie sur les imaginaires purs.

Définition. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)}$.*

Exemple :

Les propriétés suivantes découlent immédiatement de la définition et des résultats vérifiés par l'exponentielle réelle et l'exponentielle définie sur les imaginaires purs :

Proposition. *Soit $z \in \mathbb{C}$.*

1. $\mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} \times \cos(\mathrm{Im}(z))$.
2. $\mathrm{Im}\,(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} \times \sin(\mathrm{Im}(z))$.
3. $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}$.
4. *Soit θ un argument de e^z. Alors $\theta \equiv \mathrm{Im}(z)[2\pi]$.*

Exemple : *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Notons $z = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$. On a*

Proposition (propriété d'addition). *Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^{z'}$.*

Démonstration. Par linéarité de la partie réelle et de la partie imaginaire

$$\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z+z')}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z+z')} = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(z')}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z')}.$$

Par propriété d'addition de l'exponentielle d'un réel et d'un imaginaire pur, on conclut que

$$\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z')}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z')} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z'}.$$ □

Ne pas oublier le i !

Proposition (Cas d'égalité). *Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. On a $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'}$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = z' + 2\mathrm{i}k\pi$.*

En d'autres termes, les complexes ayant même image que z par l'exponentielle s'obtiennent en ajoutant un multiple de $2\mathrm{i}\pi$. Géométriquement, cela se traduit par « des sauts verticaux d'amplitude 2π » :

DÉMONSTRATION.

□

⚠ 0 n'est pas une exponentielle complexe. En effet, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} \neq 0$ (puisque c'est un réel strictement positif) et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)} \neq 0$ (puisque c'est un complexe de module 1) donc $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)} \neq 0$. En revanche tout complexe non nul admet une infinité d'antécédents par la fonction $z \longmapsto \mathrm{e}^z$. Plus précisément :

Le programme ne dit pas s'il faut retenir ce théorème par cœur ou seulement la démarche de preuve (de la démonstration). Dans le doute, autant tout refaire.

Proposition. *Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Soit θ un argument de a. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,*

$$\mathrm{e}^z = a \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists k \in \mathbb{Z},\ z = \ln(|a|) + \mathrm{i}\theta + 2\mathrm{i}k\pi.$$

DÉMONSTRATION. Soit $z \in \mathbb{C}$. Puisque $|a| > 0$ (car $a \neq 0$), on a $a = |a|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\ln(|a|)+\mathrm{i}\theta}$. La proposition précédente permet de conclure. □

Exemple : *Résoudre l'équation $\mathrm{e}^z = 2 + 2\mathrm{i}$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.*

b) Fonction du type e^φ

Soit E une union d'un nombre fini d'intervalles non vides et non réduits à un point de $\mathbb{R}$.

Théorème. *Si $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{C}$ est dérivable sur E, alors la fonction $\mathrm{e}^\varphi : x \longmapsto \mathrm{e}^{\varphi(x)}$ est dérivable sur E et $(\mathrm{e}^\varphi)' = \varphi'\mathrm{e}^\varphi$.*

DÉMONSTRATION.

$\square$

IV Racines $n^{\text{ièmes}}$

Si $n = 2$, on dit que ζ est une racine carrée de z. Si $n = 3$, on dit que ζ est une racine cubique de z.

On se donne dans cette partie un entier $n \geqslant 2$.

1) Cas général

Définition. *Soit $z \in \mathbb{C}$. On dit que $\zeta \in \mathbb{C}$ est une racine $n^{\text{ième}}$ de z si $\zeta^n = z$.*

Exemple : *$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{-1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \mathrm{i}$. En d'autres termes, $\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ et $\frac{-1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ sont deux racines carrées de i.*

Remarques :

- Si $x \in \mathbb{R}_+$, il existe deux réels opposés dont le carré vaut x, et on **choisit** d'appeler $\sqrt{x}$ celui de ces deux réels qui est positif. Plus généralement, si $x \in \mathbb{R}_+$, on choisit de noter $\sqrt[n]{x}$ l'unique réel positif y tel que $y^n = x$. Cependant, sur $\mathbb{C}$, parler de complexe positif ou, plus généralement, de complexe plus grand qu'un autre n'a pas de sens (sauf si on manipule des réels). Pour cette raison, ce qui nous permettait de faire un choix parmi les racines carrées ou les racines $n^{\text{ièmes}}$ (réelles) de $x \in \mathbb{R}_+$ n'est plus valable sur $\mathbb{C}$, aucune racine ne se distingue par rapport aux autres, et donc la notation $\sqrt[n]{z}$ est interdite (sauf, encore une fois, lorsque z est un réel positif). On dira donc : « soit ζ une racine $n^{\text{ième}}$ de z » ou « soit ζ tel que $\zeta^n = z$ » mais jamais « Posons $\zeta = \sqrt[n]{z}$ ».

  Par exemple, qui est le plus grand entre $1 - \mathrm{i}$ et $-1 + \mathrm{i}$?

- Si $z = 0$, alors z n'a qu'une seule racine $n^{\text{ième}}$: lui-même. On s'intéressera donc uniquement au cas $z \neq 0$ dans la suite.

Théorème. *Soit $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C}^*$. Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de z sont exactement les complexes*

$$\zeta_k = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \qquad k \in [\![0\,;n-1]\!]$$

En particulier, tout complexe non nul admet exactement n racines $n^{\text{ièmes}}$ distinctes.

Aucun problème pour la notation $\sqrt[n]{r}$ ici puisque r est un réel strictement positif.

Remarque : Si $n = 2$, alors les deux racines carrées de z sont $\zeta_0 = \sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$ et

$$\zeta_1 = \sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta/2+\pi)} = \zeta_0 \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -\zeta_0.$$

En particulier, tout complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.

On reparlera de ce cas particulier dans le paragraphe V.2.

Démonstration.

Cas d'égalité de la forme exponentielle (cf. paragraphe III.3).

Remarque : Comme on vient de le voir dans la démonstration, on pourra écrire également que les racines $n^{\text{ièmes}}$ de z sont les ζ_k, pour $k \in [\![1\,;n]\!]$. Seule compte la congruence modulo n.

Nous donnerons l'interprétation géométrique de ce résultat dans le paragraphe suivant.

Exemple :

2) Cas particulier des racines de l'unité

a) Résultats généraux

Définition. *Soit $\omega \in \mathbb{C}$. On dit que ω est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité si $\omega^n = 1$.*

Avec des quantificateurs : ω est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité si et seulement si **il existe** $k \in [\![0\,;n-1]\!]$ tel que $\omega = \mathrm{e}^{2ik\pi/n}$.

Théorème. *Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont exactement les*

$$\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}, \qquad k \in [\![0\,;n-1]\!]$$

Remarques :

- Si on note $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$, les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont les ω^k, $k \in [\![0\,;n-1]\!]$.
- Comme dans le paragraphe précédent, on pourra écrire également que les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont les ω_k, pour $k \in [\![1\,;n]\!]$. Encore une fois, seule compte la congruence modulo n !
- Si ω désigne une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité quelconque et si k et ℓ sont deux entiers tels que $k \equiv \ell\,[n]$, alors $\omega^k = \omega^\ell$.

La réciproque est fausse. Prendre par exemple $\omega = 1$, $k = 0$ et $\ell = 1$.

Exemples :

- *Les racines carrées de l'unité sont 1 et -1.*
- *Les racines quatrièmes de l'unité sont 1, $\mathrm{e}^{i\pi/2} = i$, $\mathrm{e}^{i\pi} = -1$ et $\mathrm{e}^{3i\pi/2} = -i$.*
- *Si n est impair, 1 est la seule racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité réelle (voir le cas $n = 3$ ci-dessous),, et si n est pair, 1 et -1 sont les seules racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité réelles.*

Définition (le nombre j). *On note* $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Proposition (propriétés de j).

- $\mathrm{j}^3 = 1$, *c'est-à-dire* j *est une racine cubique de l'unité.*
- $\mathrm{j}^2 = \overline{\mathrm{j}} = \dfrac{1}{\mathrm{j}} = \mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- *Les trois racines cubiques de l'unité sont* 1, j *et* j^2.
- $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$, $1 + \mathrm{j} = -j^2$, $1 + \mathrm{j}^2 = -\mathrm{j}$ *etc.*
- *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $z^2 + z + 1 = (z - \mathrm{j})(z - \mathrm{j}^2)$.

⇝ Démonstration laissée en exercice.

Méthode à retenir : se ramener à une équation du type « machin^n = 1 ». Machin sera alors une racine de l'unité.

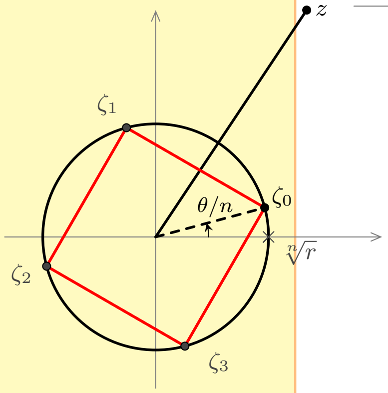
Exemple : *Résoudre l'équation* $(z + \mathrm{i})^n = (z - \mathrm{i})^n$ *d'inconnue* $z \in \mathbb{C}$.

Il faut résister à l'envie d'écrire $1/\tan(\frac{k\pi}{n})$: il peut y avoir un problème de définition car $\frac{k\pi}{n}$ peut être égal à $\frac{\pi}{2}$ (par exemple si $n = 4$ et $k = 2$), même si ce n'est pas très grave car alors on pourrait poser par convention « $1/\pm\infty = 0$ ». On pourrait écrire $\mathrm{cotan}(\frac{k\pi}{n})$ (cf. exercice 11 du TD n° 5) mais cotan est hors programme.

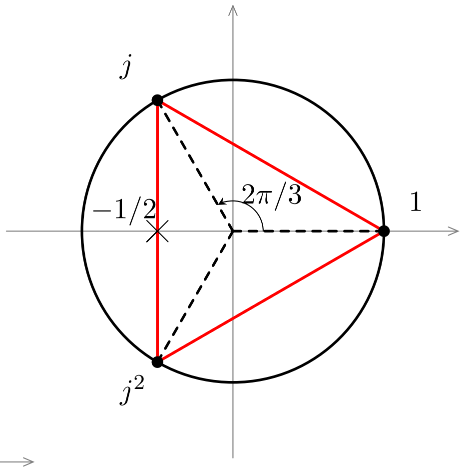
b) Interprétation géométrique

Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité « partagent le cercle unité $\mathbb{U}$ en n parts égales d'angle $\frac{2\pi}{n}$ » et forment donc un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique/le cercle unité.

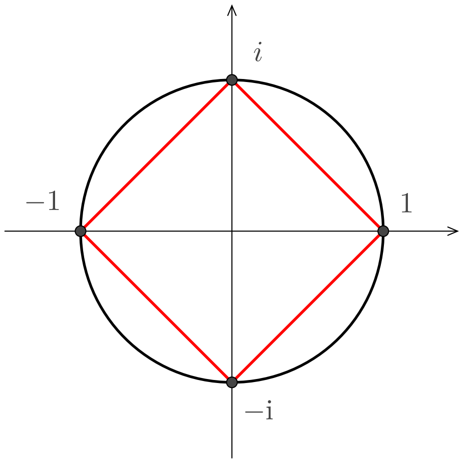
On peut à présent donner l'interprétation géométrique des racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un complexe $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C}^*$ quelconque.



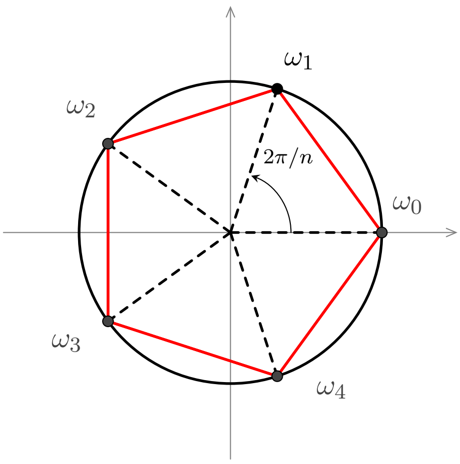
Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de z forment un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de rayon $\sqrt[n]{r}$ et qui « débute » en la première racine, c'est-à-dire $\zeta_0 = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/n}$.



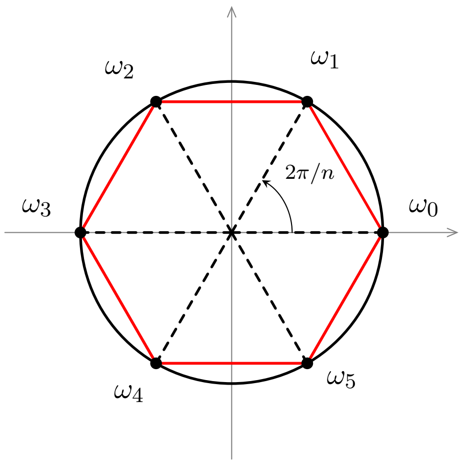
$n = 3$



$n = 4$



$n = 5$



$n = 6$

c) L'ensemble $\mathbb{U}_n$

En particulier, puisque $1 \in \mathbb{U}_n$, on dira dans le chapitre 17 que $\mathbb{U}_n$ est un groupe à n éléments pour le produit.

Définition. *On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.*

Proposition. *L'ensemble $\mathbb{U}_n$ est inclus dans $\mathbb{U}$, il possède n éléments, il est stable par produit, par inverse et par conjugaison.*

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Tout comme $\mathcal{U}$, l'ensemble $\mathbb{U}_n$ n'est pas stable par somme. Par exemple, $1 + 1 = 2 \notin \mathbb{U}_n$.

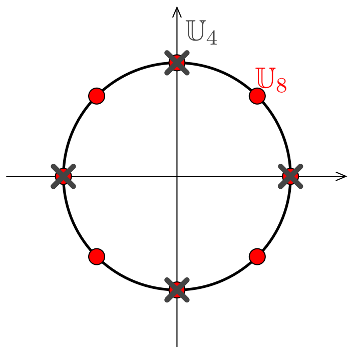
Si $d \nmid n$, $\mathbb{U}_d$ n'est pas inclus dans $\mathbb{U}_n$ mais, comme $1 \in \mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_d$, $\mathbb{U}_d$ et $\mathbb{U}_n$ ne sont jamais disjoints. On peut montrer (cf. exercice du TD n° 12) que $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_d = \mathbb{U}_{n \wedge d}$. ⚠ Avoir $d \leqslant n$ ne suffit pas ! Nous montrerons dans le chapitre 17 que les seuls sous-groupes de $\mathbb{U}_n$ sont les $\mathbb{U}_d$ avec d divisant n.

Proposition. *Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On a $\mathbb{U}_d \subset \mathbb{U}_n$ si et seulement si $d | n$.*

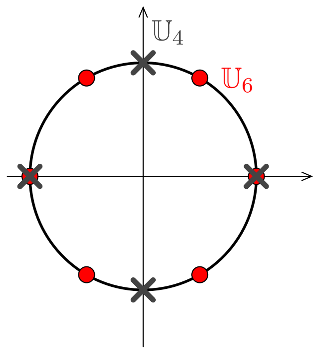
Démonstration.

□

Exemples :



$\mathbb{U}_4 \subset \mathbb{U}_8$



$\mathbb{U}_4 \not\subset \mathbb{U}_6$

V Équations polynomiales à coefficients complexes

1) Notion de fonction polynomiale à coefficients complexes

On ne dit pas dans cette définition que $a_n \neq 0$ ni même que les scalaires $a_0, a_1, \ldots, a_p$ ne sont pas tous nuls.

Définition. *Une fonction $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite polynomiale sur $\mathbb{C}$ si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et des scalaires $a_0, a_1, \ldots, a_p$ tels*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad P(x) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n.$$

Remarque : Puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, on peut voir toute fonction polynomiale à coefficients réels comme une fonction polynomiale sur $\mathbb{C}$.

Théorème. *Si P est une fonction polynomiale sur $\mathbb{C}$, alors :*

- *ou bien P est la fonction nulle,*
- *ou bien il existe un unique $p \in \mathbb{N}$ (appelé degré de P) et des uniques réels $a_0, a_1, \ldots, a_p$ (appelés coefficients de P) tels que $a_p \neq 0$ et :*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_p z^p.$$

Le coefficient a_p est appelé coefficient dominant de P et a_0 le coefficient constant. Le degré p du polynôme P est noté $\deg(P)$.

L'unicité du degré et des coefficients d'une fonction polynomiale non nulle signifie que, si P s'écrit

$$z \mapsto a_0 + a_1 z + \cdots + a_p z^p$$

et

$$z \mapsto b_0 + b_1 z + \cdots + b_q z^q$$

avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ et $a_0, \ldots, a_p, b_0, \ldots, b_q$ des scalaires tels que $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$, alors $p = q$ et

$$\forall i \in [\![0\,;p]\!], \; a_i = b_i.$$

Exemple : *La fonction $z \longmapsto \mathrm{i}z^5 - (2+\mathrm{i})z^3 + 8z^2 - 7$ est polynomiale de degré 5, de coefficient constant -7 et de coefficient dominant i.*

Remarques :

- Le terme « identifier » est interdit pour dire que les coefficients de deux fonctions polynomiales égales sont les mêmes deux à deux : on parle d'unicité des coefficients d'une fonction polynomiale.
- Le coefficient dominant d'une fonction polynomiale non nulle est, par définition, non nul.
- Par convention, on dit que la fonction (polynomiale) nulle est de degré $-\infty$.

Définition. *Soit P une fonction polynomiale sur $\mathbb{C}$. Soit $a \in \mathbb{C}$. On dit que a est une racine de P si $P(a) = 0$.*

Exemple : *Puisque $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$, j est une racine de $P : z \longmapsto z^2 + z + 1$.*

Définition. *On appelle équation polynomiale à coefficients complexes toute équation du type $P(z) = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, avec P une fonction polynomiale sur $\mathbb{C}$. Résoudre cette équation consiste à déterminer toutes les racines de P.*

2) Racines carrées d'un complexe

On a vu dans la partie précédente comment déterminer les deux racines carrées d'un complexe non nul lorsqu'on en connaît un argument... ce qui n'est pas garanti en pratique. Nous allons voir une autre méthode qui marche à tous les coups.

Supposons que $Z = X + \mathrm{i}Y \in \mathbb{C}^*$ et $z = x + \mathrm{i}y$, avec X, Y, x et y des réels.

Exemple : *Calculons les racines carrées de* $1 + 3\mathrm{i}$.

3) Équations polynomiales de degré 2

a) Le cas des coefficients réels

On a déjà étudié les équations polynomiales du second degré d'inconnue réelle dans le chapitre 3. Lorsque le discriminant est strictement négatif, on a vu qu'il n'y avait pas de racines. Si on autorise désormais une inconnue complexe, on peut aller plus loin.

Adoptons plutôt le vocabulaire des fonctions polynomiales pour être plus rigoureux que dans le chapitre 3.

On se donne $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$. On considère la fonction polynomiale

$$P : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & az^2 + bz + c \end{array} \right.$$

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de P.

Théorème (factorisation des trinômes du second degré).

- *Si $\Delta = 0$ alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = a(z - r_0)^2$ avec $r_0 = -\dfrac{b}{2a}$.*
- *Si $\Delta > 0$ alors, pour tout $z \in \mathbb{R}$, $P(z) = a(z - r_1)(z - r_2)$ avec*

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- *Si $\Delta < 0$ alors, pour tout $z \in \mathbb{R}$, $P(z) = a(z - \zeta)(z - \overline{\zeta})$ avec $\zeta = \dfrac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$.*

Démonstration. C'est la même preuve que dans le chapitre 3, mais avec $z \in \mathbb{C}$ au lieu de $x \in \mathbb{R}$. On n'avait pas pu conclure dans le cas où $\Delta < 0$ à l'étape suivante :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right).$$

□

On en déduit :

Dire que r est racine de P veut dire la même chose que r est solution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

Théorème (racines des trinômes du second degré). *Avec les notations du théorème précédent :*

- *Si $\Delta = 0$, alors P admet r_0 pour unique racine.*
- *Si $\Delta > 0$, alors P admet deux racines réelles : r_1 et r_2.*
- *Si $\Delta < 0$, alors P admet deux racines complexes non réelles : ζ et $\overline{\zeta}$.*

On a $|\zeta|^2 = \zeta\overline{\zeta} = \dfrac{c}{a}$ et

$$2\,\mathrm{Re}(\zeta) = z + \overline{\zeta} = -\frac{b}{a}.$$

Les relations coefficients/racines du chapitre 3 s'étendent donc dans ce cas.

Exemples :

- *La fonction $P : z \longmapsto z^2 + z + 1$*

- *La fonction $P : z \longmapsto 3z^2 - 2z + 5$*

b) Cas général

On se donne $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$. On considère la fonction polynomiale

$$P : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & az^2 + bz + c \end{array} \right.$$

On a vu dans le paragraphe V.2 une méthode pour trouver les deux racines carrées d'un complexe non nul. Ici on prend n'importe laquelle pour δ : cela n'a pas d'importance (remplacer δ par $-\delta$ donne le même couple de racines).

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de P. Notons δ un racine carrée du complexe Δ. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on met sous forme canonique :

$$P(z) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right)$$

On utilise ensuite une identité remarquable pour conclure :

Sur $\mathbb{C}$, il n'y a pas d'inégalités donc on ne parle surtout pas du signe de Δ. Il faut distinguer simplement deux cas selon que Δ est nul ou non.

Théorème (factorisation des trinômes du second degré).

- *Si $\Delta = 0$ alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = a(z - \zeta_0)^2$ avec $\zeta_0 = -\dfrac{b}{2a}$.*
- *Si $\Delta \neq 0$ alors, en notant δ une racine carrée de Δ puis $\zeta_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $\zeta_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$,*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad P(z) = a(z - \zeta_1)(z - \zeta_2).$$

Théorème (racines des trinômes du second degré). *Avec les notations du théorème précédent :*

- *Si $\Delta = 0$, alors P admet ζ_0 pour unique racine.*
- *Si $\Delta \neq 0$, alors P admet deux racines réelles : ζ_1 et ζ_2.*

Lorsque les coefficients ne sont pas réels, les deux racines simples ne sont pas forcément conjuguées ! C'est notamment le cas que lorsque les coefficients sont réels (et le discriminant strictement négatif).

Exemple : *Considérons l'équation $z^2 + 2iz - 3 + i = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Son discriminant est*

$$\Delta = (2i)^2 - 4(-3 + i) = -4 + 12 - 4i = 8 - 4i.$$

Dans le cas où $\Delta = 0$, si on compte en double l'unique racine, on retrouve les mêmes relations :

$$\zeta_0 + \zeta_0 = -\frac{b}{a}$$

et

$$\zeta_0\zeta_0 = \frac{c}{a}.$$

Proposition (Relation coefficients/racines). *Avec les notations des théorèmes précédents, dans le cas où $\Delta \neq 0$, on a $\zeta_1 + \zeta_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $\zeta_1\zeta_2 = \dfrac{c}{a}$.*

Démonstration. Découle du théorème de factorisation ci-dessus : si $\Delta \neq 0$ alors, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) = a(z^2 - (\zeta_1 + \zeta_2)z + \zeta_1\zeta_2)$$

On conclut par unicité des coefficients d'une fonction polynomiale. $\square$

Remarque : Ce résultat permet notamment de trouver facilement une racine lorsqu'on connaît l'autre.

Par exemple, 1 est racine évidente de $z \longmapsto z^2 + iz - (i+1)$, donc l'autre racine est $-1 - i$ car le produit des racines vaut $\frac{-(i+1)}{1} = -1 - i$.

En particulier, lorsque $a = 0$, la somme des racines est l'opposé du coefficient du terme de degré 1 quand le produit des racines est le coefficient constant. Réciproquement :

Proposition. *Soit $(s, p) \in \mathbb{C}^2$. Les solutions du système d'inconnues x et y complexes*

$$\begin{cases} x + y & = & s \\ xy & = & p \end{cases}$$

sont les solutions de l'équation $z^2 - sz + p = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Si (x, y) est un couple de solutions du système, alors

$$x^2 - sx + p = x^2 - (x+y)x + xy = 0 \quad \text{et} \quad y^2 - sy + p = y^2 - (x+y)y + xy = 0.$$

La réciproque a été montrée ci-dessus. $\square$

Exemple : *Il n'existe pas de réels x et y tels que $x + y = -1$ et $xy = 1$. En effet : x et y conviennent si et seulement si x et y sont solutions de $z^2 + z + 1 = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Or, cette équation n'a pas de solution réelle car son discriminant est strictement négatif. Par contre, si on s'autorise des solutions complexes, alors j et j^2 conviennent.*

4) Équations polynomiales de degré supérieur à 3

On reviendra longuement sur le cas des équations polynomiales de degré supérieur à 3 dans le chapitre 9 mais surtout le chapitre 18.

On sait résoudre des équations polynomiales du type $z^n = a$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, avec $n \geqslant 3$ et $a \in \mathbb{C}$ en utilisant les racines $n^{\text{ièmes}}$. Pour les autres équations polynomiales de degré supérieur ou égal à 3, et bien c'est tout un programme... Une méthode classique est d'essayer de se ramener à une équation de degré 2 en faisant des changements de variables ou en cherchant une racine. En effet, nous avons le théorème suivant (temporairement admis) :

Il sera montré dans le chapitre 18 mais aussi en exercice dans le TD n° 7.

Théorème (racine et factorisation). *Soit P une fonction polynomiale sur $\mathbb{C}$ de degré $p \in \mathbb{N}^*$. Si P admet une racine a, alors il existe une unique fonction polynomiale Q sur $\mathbb{C}$ de degré $p - 1$ telle que :*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad P(z) = (z - a) \times Q(z).$$

Quand c'est plus subtile, l'énoncé vous donnera volontiers une indication.

On verra aussi comment obtenir Q via une division euclidienne dans les chapitres 9 et 18.

Le théorème de D'Alembert Gauss, que nous verrons (mais admettrons) dans le chapitre 18, assure qu'il est toujours possible de l'écrire sous la forme d'un produit de fonctions polynomiales de degré 1 à coefficients complexes (faux en général si on ne veut que des coefficients réels)... ce qui ne veut pas dire que l'on sait le faire explicitement.

On cherche d'abord les racines parmi $\pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$ ou encore $\pm 3\mathrm{i}, \pm 2\mathrm{i}, \pm \mathrm{i}$, sachant qu'une racine nulle saute au yeux : c'est le cas si et seulement si le coefficient constant est nul. On voit aussi facilement quand 1 est racine : c'est le cas lorsque la somme des coefficients est nulle.

Dans la pratique, pour trouver l'application polynomiale Q, on l'écrit de façon générique comme une combinaison linéaire de fonctions puissances entières naturelles. On développe $(x-a)Q(x)$ et on utilise l'unicité des coefficients d'une application polynomiale pour trouver les coefficients de Q un à un (en commençant par les coefficients dominants et constants).

On répète ce procédé de factorisation pour factoriser la fonction polynomiale au maximum (c'est-à-dire l'écrire sous la forme d'un produit de fonctions polynomiales de degré 1).

Exemple : *Résoudre l'équation $z^3 - (4+2\mathrm{i})z^2 + (4+10\mathrm{i})z + (4-8\mathrm{i}) = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, avec l'indication qu'elle admet une racine imaginaire pure.*

VI Transformations usuelles du plan complexe

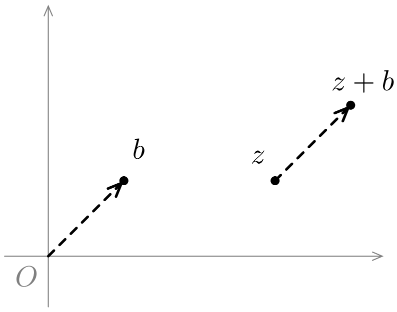
Dans ce paragraphe, lorsque z est un complexe, notons M_z le point du plan d'affixe z.

1) Translations, homothéties, rotations

C'est-à-dire M_{z+b} s'obtient à partir de M_z par une translation de vecteur $\overrightarrow{OM_b}$.

Proposition. *Soit $(z, b) \in \mathbb{C}^2$. Géométriquement, $z + b$ s'obtient à partir de z par une translation de vecteur b.*

Démonstration. Immédiat en sommant les coordonnées de M_z et celles de M_b. □

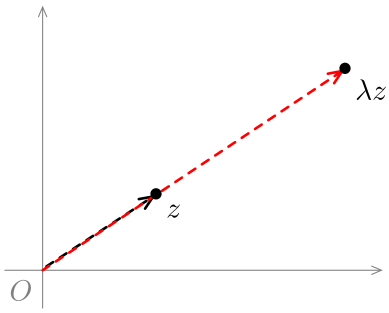


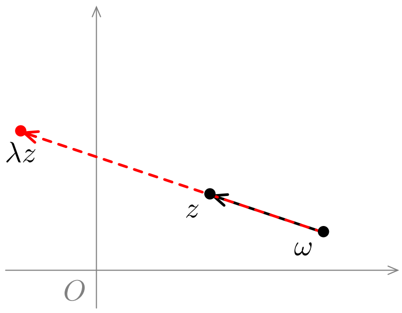
C'est-à-dire $\overrightarrow{M_\omega M_{z'}}$ s'obtient à partir de $\overrightarrow{M_\omega M_z}$ par une homothétie de rapport λ. Cela consiste à multiplier la distance $M_\omega M_z$ par λ.

Proposition. *Soit $(z, \omega, \lambda) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}_+^*$.*

- *Géométriquement, $\lambda \times z$ s'obtient à partir de z par une homothétie de centre 0 et de rapport λ.*
- *Géométriquement, $z' = \omega + \lambda \times (z - \omega)$ s'obtient à partir de z par une homothétie de centre ω et de rapport λ.*

Démonstration. Immédiat en multipliant les coordonnées de M_z par λ. □





C'est-à-dire $M_{z'}$ s'obtient à partir de M_z par une rotation d'angle θ et de centre M_ω.

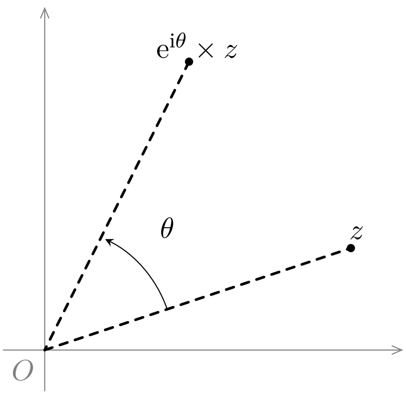
Proposition. *Soit $(z, \omega, \theta) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$.*

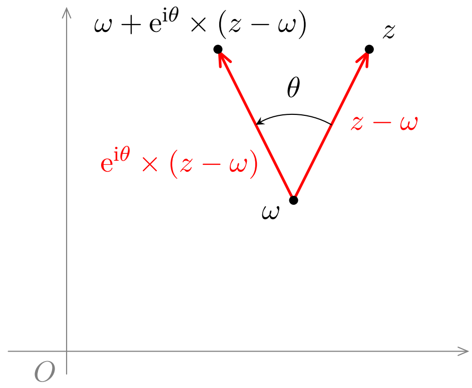
- *Géométriquement, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times z$ s'obtient à partir de z par une rotation d'angle θ et de centre 0.*
- *Géométriquement, $z' = \omega + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times (z - \omega)$ s'obtient à partir de z par une rotation d'angle θ et de centre ω.*

Démonstration.

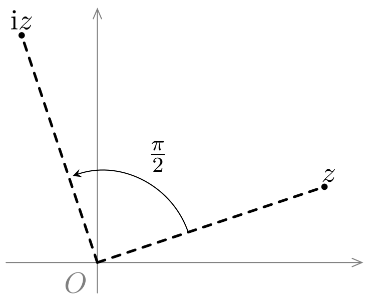
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times z$ a le même module que z et, si φ est un argument de z, alors $\theta + \varphi$ est un argument de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times z$.
- Notons $\omega + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times (z - \omega)$. On multiplie le vecteur $\overrightarrow{M_\omega M_z}$ par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, ce qui donne un vecteur de même norme mais sur lequel on a fait une rotation d'angle θ, et obtient le vecteur $\overrightarrow{M_\omega M_{z'}}$. □

En particulier, si $\theta = -\pi$, on retrouve que $-z$ s'obtient à partir de z par une rotation d'angle π, autrement dit par une symétrie centrale de centre O.





Exemple : *Multiplier par i revient à faire une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens direct.*



Proposition. *Soit $a = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$. Soit $(z, \omega) \in \mathbb{C}^2$.*

- *Géométriquement, $a \times z$ s'obtient à partir de z par une rotation d'angle θ et une homothétie de rapport $r = |a|$ (toutes les deux de centre O), l'ordre de ces opérations n'ayant pas d'importance.*
- *Géométriquement, $\omega + a \times (z - \omega)$ s'obtient à partir de z par une rotation d'angle θ et une homothétie de rapport $r = |a|$ (toutes les deux de centre ω), l'ordre de ces opérations n'ayant pas d'importance.*

Le fait que l'ordre ne compte pas vient de la commutativité de la multiplication sur $\mathbb{C}$.

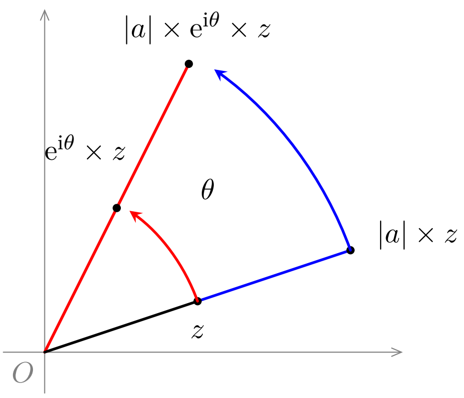
Démonstration. Il suffit de voir que :

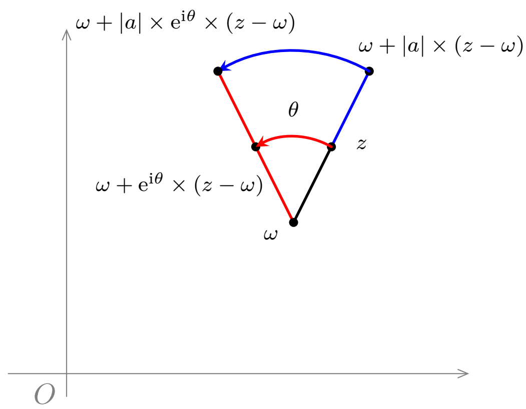
$$a \times z = \underbrace{|a| \times \underbrace{e^{i\theta} \times z}_{\text{rotation d'angle } \theta}}_{\text{homothétie de rapport } |a|} = \underbrace{e^{i\theta} \times \underbrace{|a| \times z}_{\text{homothétie de rapport } |a|}}_{\text{rotation d'angle } \theta}$$

$\square$

et c'est la même chose pour $a(z - \omega) + \omega$.

Ci-contre, deux exemples : qu'on fasse d'abord la rotation puis l'homothétie (en rouge) ou d'abord l'homothétie puis la rotation (en bleu), on arrive au même point.





2) Cas général : similitudes directes

Définition. *On dit que $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une similitude directe s'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que :*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad f(z) = az + b.$$

On se donne dans la suite $f : z \longmapsto az + b$ une similitude directe (avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$).

- Si $a = 1$ alors, géométriquement, f est la translation de vecteur b.
- Supposons que $a \neq 1$.

Il faut impérativement retenir cette méthode (que l'on reverra dans le chapitre 14 pour les suites arithmético-géométriques) : la difficulté est de trouver le centre ω. Un angle de la rotation est juste un argument de a et le rapport de l'homothétie le module de a.

Retenons de cette étude :

Théorème. *Une similitude directe est :*

- *ou bien une translation*
- *ou bien il existe $(\omega, \theta, r) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ tel que f soit la composée de la rotation d'angle θ et de l'homothétie de rapport r (toutes les deux de centre ω), l'ordre de ces opérations n'ayant pas d'importance.*

Exemple : *Donner les éléments caractéristiques de la similitude directe*

$$f : z \longmapsto (1 + \mathrm{i})z + 1.$$

Ci-dessous un dessin représentant l'égalité

$$f(1 + 2\mathrm{i}) = 3\mathrm{i}.$$