Attention renumérotation : dans les chapitres 1 à 30, ce présent chapitre était référencé sous le numéro 35.

Chapitre 32

Codage matriciel

On a vu dans les chapitres d'algèbre linéaire que de nombreux problèmes passent par la résolution d'un système linéaire. Or ceux-ci peuvent se résoudre en se ramenant à une matrice. Par ailleurs on a aussi vu que les matrices carrées et les endomorphismes ont des propriétés très similaires. Dans ce chapitre, nous allons étudier plus précisément les liens entre les matrices et les applications linéaires.

On se place dans le cadre du programme une fois de plus mais les résultats de ce chapitre restent vrais si $\mathbb{K}$ est un corps quelconque.

Notons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ comme d'habitude. Dans ce chapitre, n et p désignent deux entiers naturels non nuls.

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on identifiera/confondra $\mathbb{K}^m$ et $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$. C'est-à-dire que l'on pourra écrire tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_m)$ sous la forme $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ et vice versa.

On a vu dans le chapitre 31 que

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}^m$ dans $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$.

I Représentation matricielle

Dans ce paragraphe, sauf mention du contraire, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie p muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et F un espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$.

1) Matrice d'une famille de vecteurs en dimension finie

Définition (matrice d'un vecteur). *Soit $x \in E$. Notons $x_1, \dots, x_p$ les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$, c'est-à-dire $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \in E$. La matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ est appelée matrice du vecteur x dans la base $\mathscr{B}$ et notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$.*

On note aussi $X_{\mathscr{B}}$ ou encore X s'il n'y a aucune ambiguïté.

Exemples :

Définition (matrice d'une famille de vecteurs). *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1, \dots, x_k)$ une famille de k vecteurs de E. Pour tout $j \in [\![1\,;k]\!]$, notons $x_{1,j}, \dots, x_{p,j}$ sont les coordonnées de x_j dans la base $\mathscr{B}$, c'est-à-dire $x_j = \sum_{i=1}^{p} x_{i,j} e_i$. La matrice*

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,k} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \dots & x_{2,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{p,1} & x_{p,2} & \dots & x_{p,k} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{K})$$

est appelée matrice de la famille de vecteurs $(x_1, \dots, x_k)$ dans $\mathscr{B}$. On la note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_k)$.

La première colonne code le premier vecteur, la deuxième le deuxième vecteurs, etc. Pour tout $(i,j) \in [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;k]\!]$, le coefficient d'indice (i,j) de la matrice est la $i^{\text{ième}}$ coordonnée de x_j.

Remarques :

> Le nombre de lignes est la dimension de l'espace et le nombre de colonne est le nombre de vecteurs.

- Si $X_1, \dots, X_k$ désignent les matrices des vecteurs $x_1, \dots, x_k$ dans la base $\mathscr{B}$, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_k) = \Big(X_1 \big| X_2 \big| \cdots \big| X_k\Big).$$

  Si $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_k)$, on note encore $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$.
- On précise souvent en haut des colonnes le nom des vecteurs et à droite des lignes le noms des vecteurs de la base :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_k) = \begin{array}{c} \begin{matrix} \color{red}{x_1} & \color{red}{x_2} & \color{red}{\cdots} & \color{red}{x_k} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,k} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \dots & x_{2,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{p,1} & x_{p,2} & \dots & x_{p,k} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \color{red}{e_1} \\ \color{red}{e_2} \\ \color{red}{\vdots} \\ \color{red}{e_p} \end{array}$$

- Lorsque $E = \mathbb{K}^m$ ou $\mathbb{K}_m[X]$ ou $\mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{K})$ pour certains m et q dans $\mathbb{N}^*$ et lorsque $\mathscr{B}$ désigne la base canonique sur E, alors on dit que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_k)$ est la matrice canoniquement associée aux vecteurs $(x_1, \dots, x_k)$.

Exemples :

- *La matrice de la famille* $\big((1,0,4,7),(2,-3,-1,-6),(1,0,0,-5)\big)$ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^4$ *est*

- *On suppose que la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 4 \\ 0 & 31 & 0 \\ 1 & 0 & 83 \end{pmatrix}$ *désigne la matrice coniquement associée à une famille* (P, Q, R) *de* $\mathbb{R}_4[X]$*. On a alors*

  La base doit bien être précisée. Si on avait plutôt pris la base $(1, 2X, 3X^2, 4X^3, 5X^4 + 1)$*, on aurait eu*

  Si on change l'ordre des vecteurs de la base, cela change le codage aussi. Si on avait pris la base $(X, 1, X^2, X^3, X^4)$*, on aurait eu*

  L'espace de départ (dont la dimension est le nombre de lignes) doit bien être précisé. Si on avait pris plutôt $\mathbb{R}^5$ *au lieu de* $\mathbb{R}_4[X]$ *et la base canonique de* $\mathbb{R}^5$*, cette matrice aurait été celle de*

- *Soient* $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ *des matrices de* $\mathcal{T}_2^+(\mathbb{K})$ *qui est un espace vectoriel de dimension* 3 *dont* $\mathscr{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{22})$ *est une base. La matrice de la famille* (A, B, C, D) *dans la base* $\mathscr{B}$ *est*

On voit sur les exemples précédents que l'on arrive facilement à décoder une matrice, c'est-à-dire retrouver une famille de vecteurs associée. Il y a même unicité :

> Il y a unicité une fois que l'espace et la base ont été précisés !

Proposition. *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'application $(x_1, \ldots, x_k) \in E^k \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_k)$ est un isomorphisme de E^k dans $\mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{K})$*

Démonstration. Notons $\varphi : (x_1, \ldots, x_k) \in E^k \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{K})$.

- φ est linéaire. En effet, si $(x_1, \ldots, x_k) \in E^k$, $(y_1, \ldots, y_k) \in E^k$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}
&\varphi\big(\lambda(x_1, \ldots, x_k) + (y_1, \ldots, y_k)\big)\\
&= \varphi\big((\lambda x_1 + y_1, \ldots, \lambda x_k + y_k\big)\\
&= \begin{pmatrix} \lambda x_{11} + y_{11} & \lambda x_{12} + y_{12} & \ldots & \lambda x_{1k} + y_{1k} \\ \lambda x_{21} + y_{21} & \lambda x_{22} + y_{22} & \ldots & \lambda x_{2k} + y_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda x_{p1} + y_{p1} & \lambda x_{p2} + y_{p2} & \ldots & \lambda x_{pk} + y_{pk} \end{pmatrix}\\
&= \lambda \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & x_{p2} & \ldots & x_{pk} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \ldots & y_{1k} \\ y_{21} & y_{22} & \ldots & y_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{p1} & y_{p2} & \ldots & y_{pk} \end{pmatrix}\\
&= \lambda\, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\,(x_1, \ldots, x_k) + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\,(y_1, \ldots, y_k)\\
&= \lambda \varphi\big((x_1, \ldots, x_k)\big) + \varphi\big((y_1, \ldots, y_k)\big).
\end{aligned}$$

- φ est injective. En effet, si $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_k) = 0_{p,k}$. Autrement dit les coordonnées des vecteurs $x_1, \ldots, x_k$ dans la base $\mathscr{B}$ sont toutes nulles. Il s'agit donc des vecteurs nuls si bien que $(x_1, \ldots, x_k) = (0, \ldots, 0)$. On a bien $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{(0, \ldots, 0)\}$.
- $\dim(E^k) = k \dim(E) = kp = \dim(\mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{K}))$.

Ainsi φ est une application linéaire injective entre deux espaces de même dimension : c'est un isomorphisme. □

> La surjectivité est toutefois immédiate : soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{K})$. Pour tout $j \in [\![1\,;k]\!]$, notons $c_j = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} e_i$. On vérifie alors aisément que que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(c_1, \ldots, c_k) = \varphi((c_1, \ldots, c_k))$.

2) Matrice d'une application linéaire en dimension finie

a) Matrice d'une application linéaire dans ses bases

Définition (matrice d'une application linéaire). *Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ des vecteurs $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ dans la base $\mathscr{B}'$ est appelée matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ et on la note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f)$.*

Dit autrement, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f)$ est la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $j \in [\![1\,;p]\!]$, $a_{1,j}, \ldots, a_{n,j}$ sont les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}'$, c'est-à-dire $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e'_i$.

Si $E = F$ et si $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$, alors on note simplement $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ la matrice de l'endomorphisme f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}$.

> Les vecteurs $f(e_1)$, ..., $f(e_p)$ appartiennent à F donc on les exprime dans une base de F.

> On note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$ et non pas $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$. La raison est que le nombre de lignes est la dimension de l'espace d'arrivée et le nombre de colonne est la dimension de l'espace de départ.

Remarques :

- Lorsque A est la matrice de $f \in \mathscr{L}(E, F)$ dans des bases de E et F, on dit que f est représenté par la matrice A.
- Lorsque E et F sont des espaces du type $\mathbb{K}^m$ ou $\mathbb{K}_m[X]$ ou $\mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{K})$ pour certains m et q dans $\mathbb{N}^*$ et lorsque $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ désignent les bases canoniques sur E et F respectivement, alors on dit que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f)$ est la matrice canoniquement associée à f.

- Comme on l'a vu plus haut, on note souvent le nom des vecteurs en haut et les vecteurs dans la base dans laquelle ils sont exprimés à droite :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1' \\ e_2' \\ \vdots \\ e_n' \end{array}$$

La famille $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est souvent notée $f(\mathscr{B})$ si bien que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(\mathscr{B}))$.

Lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté sur les bases de E et F que l'on considère, on notera plus simplement $\mathrm{Mat}(f)$.

Exemples :

- *Considérons*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x+2y-t, 3x+z, -y+5z+t) \end{array} \right.$$

Il s'agit d'une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$. Notons $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.

- *Considérons*

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_4[X] \\ P & \longmapsto & (X^3+1)P' \end{array} \right.$$

Il s'agit d'une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_4[X]$. Notons κ_2 et κ_4 les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}_4[X]$.

- *Considérons*

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(1), P'(1), P''(1)) \end{array} \right.$$

Il s'agit d'une application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^3$. Notons $\kappa_3 = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathscr{C}_3$ celle de $\mathbb{R}^3$.

- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons*

$$D : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$$

Il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$. La matrice canoniquement associée (carrée de taille $n+1$) à D est :

Cependant, si on prend comme base de départ $(1, X, \ldots, X^n)$ (c'est-à-dire la base canonique) et comme base d'arrivée $(1, 2X, 3X^2, \ldots, (n+1)X^n)$, la matrice associée est :

On peut remarquer que la matrice dépend des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ choisies (ce qui était attendu), c'est-à-dire que si on prend des bases différentes, on aura (pour une même application linéaire !) des matrices différentes. Y a-t-il un lien entre les matrices associées à une même application linéaire ? Réponse au paragraphe IV.

- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in \mathbb{K}^*$. Considérons*

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+a) \end{array} \right.$$

et donnons sa matrice A canoniquement associée.

- *Considérons*

$$T : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A + A^\top \end{array} \right.$$

Il s'agit d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Notons $\mathscr{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

- *Soit* $M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *Considérons*

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & MX \end{array} \right.$$

Donnons sa matrice canoniquement associée.

Nous notons de la même façon la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et celle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ car il n'y a aucun risque de confusion dès qu'on s'intéresse à la taille des matrices.

- *Soit* $z_0 = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$. *L'application*

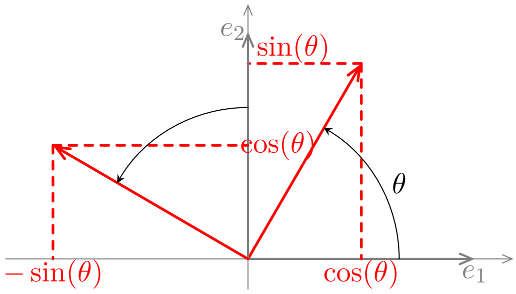
$$s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z \times z_0 \end{array} \right.$$

Exemple explicitement au programme !

Il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{C}$ *vu comme un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel. Donnons sa matrice dans la base* $(1, \mathrm{i})$ *de* $\mathbb{C}$.

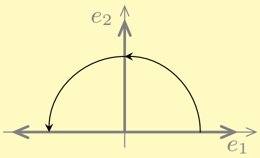
Par exemple, si $\theta \in \mathbb{R}$, *la matrice associée à la multiplication par* $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$ *est*

On a vu dans le chapitre 6 que multiplier par $e^{i\theta}$ *revient à effectuer une rotation d'angle* θ. *En conclusion, la matrice ci-dessus est la matrice associée à la rotation d'angle* θ, *ce qu'on aurait aussi pu trouver en travaillant sur* $\mathbb{R}^2$ *muni de la base canonique :*



$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} r(e_1) & r(e_2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array}$$

Par exemple, la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire la multiplication par i, est représentée par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.



b) Décodage matriciel

On parle de codage matriciel car on transforme une application linéaire en matrice mais aussi car, réciproquement, on peut décoder : quelle que soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une unique $f \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f) = A$.

Théorème. *L'application*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

Si on change E (mais pas sa dimension) ou F (mais pas sa dimension) ou la base $\mathscr{B}$ de E ou la base $\mathscr{B}'$ de F, on ne trouve pas la même application linéaire dont A est la matrice. Il n'y a unicité que à E, F, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ fixés.

Démonstration. Notons φ cette application.

- Montrons qu'elle est linéaire. Soient f et g dans $\mathscr{L}(E,F)$ et λ dans $\mathbb{K}$. Notons $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f) = (a_{i,j})_{i,j}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(g) = (b_{i,j})_{i,j}$. Pour tout $j \in [\![1\,;p]\!]$, par définition,

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_i \qquad \text{et} \qquad g(e_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{i,j} e'_i.$$

  On en déduit que

$$\forall j \in [\![1\,;p]\!], \qquad (\lambda f + g)(e_j) = \lambda f(e_j) + g(e_j) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{i,j} + b_{i,j}) e'_i.$$

  Dès lors, pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$,

$$\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\lambda f + g)\big)_{i,j} = \lambda a_{i,j} + b_{i,j} = \lambda\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f)\big)_{i,j} + \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(g)\big)_{i,j}.$$

  On en déduit que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\lambda f + g) = \lambda\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(g)$ et donc $\varphi(\lambda f + g) = \lambda \varphi(f) + \varphi(g)$. Autrement dit φ est linéaire.

- Soit $M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Par théorème de caractérisation par l'image d'une base, il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que

$$\forall j \in [\![1\,;p]\!], \qquad f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_i$$

  c'est-à-dire telle que $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f) = \varphi(f)$. Dès lors φ est bijective.

Ainsi l'application φ est un isomorphisme de $\mathscr{L}(E,F)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. $\square$

Remarques :

- Lorsqu'on se donne une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on peut donc écrire « Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f) = A$ ». Si on se donne plutôt B de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on peut donc écrire « Soit $g \in \mathscr{L}(F,E)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(g) = B$ ».
- L'injectivité permet d'affirmer que, si f et g sont deux applications linéaire de E dans F telles que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(g)$, alors $f = g$.

- Des cas particuliers :
  - ⋆ Pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathrm{Id}_E(e_j) = e_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \delta_{i,j} e_i$. On en déduit que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) = (\delta_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \mathrm{I}_n$. Par conséquent un endomorphisme f de E vérifie $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{I}_n$ si et seulement si $f = \mathrm{Id}_E$.
  - ⋆ Par linéarité de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$, pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{L}(E)$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \lambda \mathrm{I}_n$ si et seulement si $f = \lambda\,\mathrm{Id}_E$.
  - ⋆ De même une application linéaire f de E dans F vérifie $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f) = 0_{n,p}$ si et seulement si f est l'application linéaire nulle.

Résultat faux si on ne met pas la même base de E à l'arrivée et au départ (nous en reparlerons dans les paragraphes II.1 et IV.1.

- Il découle de la démonstration précédente que, si $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f)$ lorsque

$$f : x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j \longmapsto \sum_{j=1}^{p} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j\right) e'_i.$$

Il n'est pas nécessaire de retenir cette formule par cœur. Il faut connaître la méthode : si on dispose d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, pour la décoder (i.e. trouver l'application linéaire dont A est la matrice).

  - ⋆ On précise les espaces E (de dimension p) et F (de dimension n) que l'on considère.
  - ⋆ On précise la base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ de E et la base $\mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ de F que l'on considère.
  - ⋆ Pour tout $j \in [\![1\,;p]\!]$, la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice A correspond aux coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}'$. On exprime alors $f(e_j)$.
  - ⋆ On se donne $x \in E$. On dit qu'il existe des scalaires $x_1, \ldots, x_p$ tels que $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} x_j e_j$, on en déduit que $f(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} x_j f(e_j)$ et on conclut en utilisant les expressions trouvées dans le point précédent.

Exemple : *Considérons la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

- *Cherchons* $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^4)$ *dont* A *est la matrice de* f *dans les bases canoniques de* $\mathbb{R}_2[X]$ *et* $\mathbb{R}^4$.

- *Cherchons* $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathcal{M}_2(\mathbb{K}))$ *dont* A *est la matrice de* f *dans les bases canoniques de* $\mathbb{R}^3$ *et* $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Remarque : Si f est une forme sur linéaire sur E, alors on peut prendre $\mathscr{B}' = (1)$ pour base de $F = \mathbb{K}$. Il s'ensuit que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f)$ est une matrice ligne à n colonnes $\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ avec, pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, $a_j = f(e_j)$. Réciproquement si $A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, alors l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j e_j & \longmapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j a_j \end{array} \right.$$

est une forme linéaire sur E dont A est la matrice dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}' = (1)$.

Exemples :

- *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \longmapsto \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$. Il s'agit d'une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$ et, si $\mathscr{C}_n$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^n$, alors*

- *Soit $g : P \in \mathbb{R}_5[X] \longmapsto P'(1)$. Il s'agit d'une forme linéaire sur $\mathbb{R}_5[X]$ et, si κ_5 désigne la base canonique de $\mathbb{R}_5[X]$,*

- *Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,9}(\mathbb{K})$. Alors la forme linéaire sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ dont M est la matrice canoniquement associée est*

Parmi toutes les applications linéaire représentée par une matrice $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ donnée, la plus immédiate est celle qui va de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$ dont A est canoniquement associée :

Proposition/Définition (application linéaire canoniquement associée). *Soit $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application*

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{1j} x_j, \sum_{j=1}^{p} a_{2j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^{p} a_{nj} x_j \right) \end{array} \right.$$

est linéaire et A est la matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$. On dit que φ est l'application linéaire canoniquement associée à A.

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Remarque : Puisqu'on identifie $\mathbb{K}^p$ avec $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$ avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on pourra aussi appelé application linéaire canoniquement associée à A l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{1j} x_j \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{nj} x_j \end{pmatrix} \end{array}$$

Ce n'est rien d'autre que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}.$$

Exemples :

- *Reprenons la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ *des exemples ci-dessus.*

  L'application linéaire f canoniquement associée à A...

- *L'application linéaire φ canoniquement associée à* $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$...

Terminons ce paragraphe par une conséquence du codage matriciel :

Proposition. *L'espace vectoriel $\mathscr{L}(E, F)$ est de dimension finie et*

$$\dim\big(\mathscr{L}(E, F)\big) = \dim(E) \times \dim(F).$$

En particulier l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E)$ est de dimension finie égale à $(\dim(E))^2$. On retrouve aussi le fait que $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ et E ont la même dimension.

Démonstration. Puisque $\mathscr{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont isomorphes et puisque $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension finie égale à np, il s'ensuit que $\mathscr{L}(E, F)$ est également de dimension finie et $\dim\big(\mathscr{L}(E, F)\big) = \dim\big(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\big) = np = \dim(E) \times \dim(F)$. □

3) Écriture matricielle de $y = f(x)$

Proposition. *Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $x \in E$ et $y \in F$. Notons*

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}', \mathscr{B}}(f), \qquad X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \qquad \textit{et} \qquad Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(y).$$

Alors $y = f(x)$ si et seulement si $Y = AX$.

On a $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Démonstration.

□

Exemple : *Notons d l'application linéaire qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_4[X]$ associe $P' \in \mathbb{R}_3[X]$. Notons $\kappa_4 = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$ et $\kappa_3 = (1, X, X^2, X^3)$. Lorsque $P_0 = X^4 + 3X - 2$,*

Corollaire. *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a $A = 0_{n,p}$ si et seulement si, pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $AX = 0_{n,1}$.*

Insistons sur le quantificateur « pour tout ». Si on a $AX = 0$ seulement pour une certaine matrice colonne X, alors rien ne permet de conclure que $A = 0$ (toutefois on a vu dans le chapitre 23 que, si $X \neq 0$, alors A n'est pas inversible et on dira dans le paragraphe I.4.b que X appartient au noyau de A).

DÉMONSTRATION. Notons $f \in \mathscr{L}(E, F)$ tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f)$.

$$\begin{aligned} A = 0_{n,p} \quad &\iff \quad f = 0 \\ &\iff \quad \forall x \in E, \quad f(x) = 0 \\ &\iff \quad \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \quad AX = 0_{n,1}. \end{aligned}$$

Corollaire. *Soient A et B dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a $A = B$ si et seulement si, pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $AX = BX$.*

Là encore, attention au « pour tout ». Si on a $AX = BX$ seulement pour une certaine matrice colonne X, alors on ne peut rien conclure. Simplifier par X est une erreur très grave.

DÉMONSTRATION. On considère $A - B$ au lieu de A dans le corollaire précédent. □

4) Image, noyau et codage matriciel

a) Application du codage matriciel à l'étude de l'image et du noyau

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. Notons A la matrice canoniquement associée à f. On peut obtenir des informations sur $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ en « lisant » la matrice A. Plus précisément :

- $\mathrm{Im}(f)$ est engendré par les vecteurs colonnes de A. En effet, ceux-ci sont égaux à $f(e_1), \dots, f(e_p)$ et on sait que l'image d'une base est une famille génératrice de l'image.
- Si A possède une colonne nulle, disons la $j_0$ième, cela signifie que $f(e_j) = 0$ et donc que $e_j \in \mathrm{Ker}(f)$.
- Si une colonne est combinaison linéaire d'autres, on peut en déduire que la différence entre cette colonne et la combinaison linéaire en question fournit un vecteur qui est dans le noyau.

Dans le cas d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ quelconque avec des bases pas forcément canoniques, le raisonnement est analogue, si ce n'est qu'il faut remplacer les vecteurs colonnes par les éléments de F dont ce sont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}'$. Par exemple, dans le cas d'une matrice à 3 lignes, il faut remplacer le vecteur $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ par

$$\alpha e_1' + \beta e_2' + \gamma e_3'.$$

Exemple : *Notons $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^3)$ dont la matrice canoniquement associée est*

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

Alors on a :

On en déduit que :

Soient $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. Notons $A = (a_{i,j})_{i,j}$ la matrice canoniquement associée à f. Soit $x \in \mathbb{K}^p$. En notant X sa matrice dans la base canonique de $\mathscr{B}$, on a

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(f) &\iff f(x) = 0 \\ &\iff AX = 0_{n,1} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

On a $y = f(x)$ si et seulement si $Y = AX$ lorsque Y est la matrice de y dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

En d'autres termes, les lignes donnent un système d'équations du noyau.

Exemple : *Notons $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^3)$ dont la matrice canoniquement associée est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le noyau de f est donc l'ensemble des $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Dans le cas d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ quelconque avec des bases pas forcément canoniques, les lignes donnent un système d'équations des coordonnées des vecteurs du noyau.

b) Noyau, image d'une matrice

On peut s'affranchir des applications linéaires et définir directement l'image et le noyau d'une matrice de la façon suivante :

Définition. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit l'image de A par*

$$\mathrm{Im}(A) = \{AX \mid X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}.$$

et le noyau de A par :

$$\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0_{n,1}\}.$$

Remarques :

- En d'autre termes, $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$ sont respectivement l'image et le noyau de l'application linéaire
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$$
En particulier, $\mathrm{Im}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.
- Puisqu'on identifie $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^p$, on peut aussi définir l'image de A par $\mathrm{Im}(A) = \{AX \mid X \in \mathbb{K}^p\}$ et le noyau de A par $\mathrm{Ker}(f) = \{X \in \mathbb{K}^p \mid AX = 0\}$, ce qui en font des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ et de $\mathbb{K}^p$ respectivement.

On a vu que si $A = \mathrm{Mat}(f)$, l'opération $y = f(x)$ s'écrit matriciellement $Y = AX$. Puisque les $u(x)$, $x \in E$, forment l'image de u, on définit l'image de A par l'ensemble des AX quand X décrit $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ (ou $\mathbb{K}^p$).

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ représentée par A. Alors :*

- $\mathrm{Im}(A)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *sont isomorphes.*
- $\mathrm{Ker}(A)$ *et* $\mathrm{Ker}(f)$ *sont isomorphes.*

Démonstration. Montrons que

$$\varphi : \begin{cases} \mathrm{Im}(f) & \longrightarrow & \mathrm{Im}(A) \\ y & \longmapsto & Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(y). \end{cases}$$

est un isomorphisme.

- Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = f(x)$. En notant $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$, on a $Y = AX$ donc $Y = \varphi(y) \in \mathrm{Im}(A)$.
- φ est linéaire car c'est la restriction de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}$ (que l'on sait linéaire) à $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(A)$.
- Elle est injective car restriction d'une injection.
- Soit $Z \in \mathrm{Im}(A)$. Il existe $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = Z$. Notons x le vecteur de E dont X est la matrice dans la base $\mathscr{B}$. Notons $y = f(x)$. Il vient que $AX = Y$ et donc $Y = Z$ et donc $Z = \varphi(y)$. D'où la surjectivité de φ.

On montre de même que

$$\psi : \begin{cases} \mathrm{Ker}(f) & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(A) \\ x & \longmapsto & X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x). \end{cases}$$

est un isomorphisme. □

Remarques :

- Tous les résultats concernant $\mathrm{Im}(f)$ (respectivement $\mathrm{Ker}(f)$ sont encore valables pour $\mathrm{Im}(A)$ (respectivement $\mathrm{Ker}(f)$) en adaptant les termes, notamment :
  - ⋆ L'image de A est engendrée par les vecteurs colonnes de A.
  - ⋆ Les lignes de A fournissent un système d'équations du noyau de A.
- On en déduit aussi que $\dim(\mathrm{Im}(A)) = \dim(\mathrm{Im}(f))$ et $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = \dim(\mathrm{Ker}(f))$. Et donc le théorème du rang se réécrit :

  Dans le paragraphe III, on définira proprement le rang $\mathrm{rg}(A)$ d'une matrice A et on montrera que $\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$. On énoncera alors encore une fois le théorème du rang pour les matrices.

La somme des dimension est égale à p (le nombre de colonnes qui est la dimension de l'espace de départ) et non pas $n \times p$ (la taille de la matrice).

5) Matrice d'une composée

Soit G un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathscr{B}''$.

Proposition. *Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f)$, $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}'}(g)$ et $C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}}(g \circ f)$. Alors $C = BA$, c'est-à-dire*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}'}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f).$$

En fait cette formule est à l'origine de la définition du produit matriciel vue dans le chapitre 23 : on a mis au point ce produit matriciel afin que cette formule soit vraie.

Démonstration.

$\square$

Exemple : *Considérons*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_3[X] \\ P & \longmapsto & X^2P' \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ P & \longmapsto & (P(1), P'(1)) \end{array} \right.$$

Ce sont deux applications linéaires. Notons κ_2, κ_3 et $\mathscr{C}_2$ les bases canoniques de $\mathbb{K}_2[X]$, $\mathbb{K}_3[X]$ et $\mathbb{K}^2$ respectivement.

On pouvait bien sûr aussi calculer directement que

$$\begin{aligned} g \circ f(P) &= g(X^2P') \\ &= \big((X^2P')(1), (X^2P')'(1)\big) \\ &= \big((P'(1), (X^2P'' + 2XP')(1)\big) \\ &= (P'(1), P''(1) + 2P'(1)) \\ &= (b + 2c, 2c + 2(b + 2c)) \\ &= (b + 2c, 2b + 6c) \end{aligned}$$

6) Bien choisir ses bases et ses espaces

On a vu dans le paragraphe I.4.a que la lecture d'une matrice permet d'obtenir facilement des informations sur l'image et le noyau d'une application linéaire f qu'elle représente (et, plus tard dans ce chapitre, sur son rang). Si on arrive à trouver une base dans laquelle la matrice représentant f est « simple » (typiquement diagonale, triangulaire), alors cela permet de considérablement simplifier ce travail. Autre intérêt : représenter un endomorphisme par une matrice dont on peut facilement calculer l'inverse ou les puissances permet de facilement calculer sa réciproque ou ses puissances (en vertu du résultat du paragraphe précédent dont on verra le cas particulier des endomorphismes dans le paragraphe II). Voyons quelques exemples dans ce paragraphe.

Une grande partie du programme de second année consiste justement à chercher des critères et des méthodes pour pouvoir trouver des bases dans laquelle la matrice représentant un endomorphisme est diagonale ou triangulaire.

Exemples :

- *Soit f un projecteur de E....*

- *Soit f une symétrie sur E...*

- *Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Cherchons, si possible, une base de $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

La démarche ci-contre sera reprise et généralisée en seconde année. Il s'agit d'un exemple de diagonalisation.

II Le cas particulier des matrices carrées

Dans ce paragraphe, nous supposons que $\dim(E) = \dim(F) = n$. Soient $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{B}'$ une base de F. Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors toute matrice qui représente f est une matrice carrée de taille n.

1) Le cas particuliers des endomorphismes

⚠ Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Avant de commencer, précisons qu'il est tout à fait possible de représenter f par des matrices dans des bases différentes au départ et à l'arrivée, même s'il s'agit du même espace. Cette situation est toutefois rare (mais nous la rencontrerons tout de même parfois).

Rappelons que, si la base est la même au départ et à l'arrivée, on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ au lieu de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$.

a) Isomorphisme d'anneau entre $\mathscr{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Théorème. *L'application*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels et un isomorphisme d'anneaux. En particulier,

$$\forall (f, g) \in \mathscr{L}(E)^2, \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f).$$

Si $E \neq F$, alors $\mathscr{L}(E, F)$ n'est pas un anneau (pour la composition) donc ce théorème n'aurait pas eu de sens dans les paragraphes précédents.

Démonstration. Notons φ cette application. On a déjà vu dans le paragraphe I.2.b que c'est un isomorphisme (on prend $E = F$ et $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$) d'espaces vectoriels. En particulier,

$$\forall (f,g) \in \mathscr{L}(E)^2, \qquad \varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(f).$$

On a aussi vu dans le paragraphe I.2.b que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{I}_n$ et donc $\varphi(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{I}_n$. Enfin, pour tous f et g dans $\mathscr{L}(E)$, on a (cf. paragraphe I.5) :

$$\varphi(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \varphi(g) \times \varphi(f).$$

On en déduit que φ est un isomorphisme d'anneaux. $\square$

Corollaire. *Pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{L}(E)$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^k) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big)^k$.*

Corollaire. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Alors f est un projecteur si et seulement si $A^2 = A$.*

b) Retour sur les endomorphismes et matrices nilpotentes

Proposition. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Alors f est nilpotent si et seulement si A est nilpotente. Si c'est le cas, f et A ont le même indice de nilpotence.*

Démonstration. Supposons que A est nilpotence d'indice p. Alors $A^{p-1} \neq 0$ et $A^p = 0$. On en déduit que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{p-1}) = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))^{p-1} = A^{p-1} \neq 0$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^p) = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))^p = A^p = 0$. Par bijectivité du codage matriciel on en déduit que $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$ donc f est nilpotente d'indice p. La réciproque est analogue. $\square$

Nous avons montré dans le chapitre 31 que l'indice d'un endomorphisme d'un espace de dimension n est au plus n. C'est donc aussi le cas pour l'indice de nilpotence d'une matrice carrée de taille n. Montrons maintenant le résultat admis à la toute fin du paragraphe III du chapitre 23, à savoir :

Proposition.

- *Une matrice triangulaire supérieure stricte (i.e. avec une diagonale nulle) est nilpotente d'indice inférieur ou égal à n.*
- *Si $k \in [\![2\,;n]\!]$, alors la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*

$$N = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k-1 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

est nilpotente d'indice k.

C'est intuitif : les rangées de coefficients vont « monter d'un étage » à chaque fois jusqu'à disparaître. Cependant, attention, la réciproque est fausse ! Une matrice peut être nilpotente sans être triangulaire ! Par exemple, la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \\ \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 & 1 \\ \mathrm{j}^2 & 1 & \mathrm{j} \end{pmatrix}$$

est nilpotente d'indice 2 (j est ici le complexe $e^{2i\pi/3}$).

Démonstration.

$\square$

c) Sous-espace stable, endomorphisme induit, matrices par blocs

Supposons que $n = \dim(E) \geqslant 2$.

- Soit G un sous-espace vectoriel de E qui n'est ni $\{0_E\}$ ni E. Notons $p = \dim(G)$. On a alors $p \in [\![1\,;n-1]\!]$ et il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $\mathscr{B}_G = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base de G. Supposons que G est stable par f, c'est-à-dire $f(G) \subset G$. On rappelle que la restriction de f à G au départ comme à l'arrivée est appelée l'endomorphisme induit par f sur G. Notons le f_G et notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G}(f_G)$. Il existe donc $B \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ telles que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f(e_1) & \cdots & f(e_p) & f(e_{p+1}) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0_{n-p,p} & B \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ e_{p+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

  Si, de plus, le sous-espace vectoriel $H = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est également stable par f, la matrice C est nulle et la matrice B est la matrice dans la base $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ de f_H, l'endomorphisme induit par f sur H. On se retrouve alors avec :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f(e_1) & \cdots & f(e_p) & f(e_{p+1}) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} A & 0_{p,n-p} \\ \hline 0_{n-p,p} & B \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ e_{p+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

Le concept de matrice définies par blocs comme ci-dessus, ainsi que les calculs algébriques sur de telles matrices, sont au programme de deuxième année. Le chapitre de réduction des endomorphismes (de deuxième année) consiste notamment à exploiter le lien entre l'existence d'une base dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs et l'existence d'une décomposition de E en somme directe de sous-espace vectoriels stables par f.

- La réciproque est également vraie : si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E dans laquelle un endomorphisme f a la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f(e_1) & \cdots & f(e_p) & f(e_{p+1}) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0_{n-p,p} & B \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ e_{p+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

  avec $p \in [\![1\,;n-1]\!]$, $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$, alors on peut immédiatement conclure que $G = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ est stable par f et que A est la matrice dans la base $(e_1, \ldots, e_p)$ de l'endomorphisme induit par f sur G. Si on a plutôt

Puisqu'on « lit » que

$$f(e_j) \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$$

pour tout $j \in [\![1\,;p]\!]$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f(e_1) & \cdots & f(e_p) & f(e_{p+1}) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} A & 0_{p,n-p} \\ \hline \widetilde{C} & B \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ e_{p+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

  avec $\widetilde{C} \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})$, alors c'est $H = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ qui est stable par f et B est la matrice dans la base $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ de l'endomorphisme induit par f sur H.

Puisqu'on « lit » que

$$f(e_j) \in \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$$

pour tout $j \in [\![p+1\,;n]\!]$.

2) Matrices inversibles et isomorphismes

a) Inverse d'une matrice et matrice d'une réciproque

Proposition. *Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f)$. Alors f est un isomorphisme si et seulement si A est inversible.*

Dans ce cas, A^{-1} est la matrice de f^{-1} dans les bases $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}$, c'est-à-dire

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f^{-1}) = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f)\Big)^{-1}.$$

Rappelons qu'on a supposé que

$$\dim(E) = \dim(F) = n.$$

Démonstration. Notons $n = \dim(E) = \dim(F)$. Supposons que f soit un isomorphisme. On a alors $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et donc

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f^{-1} \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f^{-1})\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f).$$

On a aussi $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ et de même on obtient $\mathrm{I}_n = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f^{-1})$. Nous en déduisons que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f)$ est inversible et que son inverse est $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f^{-1})$.

Réciproquement, supposons que A est inversible. Notons g l'application linéaire de F dans E dont la matrice dans les bases $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}$ est A^{-1}. On a alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f) = A^{-1}A = \mathrm{I}_n$$

et donc $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. De même $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}'}(f \circ g) = \mathrm{I}_n$ et donc $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. Ainsi f est un bijective (et son réciproque est g). □

En particulier :

Proposition. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On a $f \in \mathrm{GL}(E)$ si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Dans ce cas,*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1}) = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\Big)^{-1}.$$

Exemples :

- *Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Déterminons si $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (ax+by, cx+dy)$ est un automorphisme et explicitons sa réciproque le cas échéant.*

- *L'application $g : P \in \mathbb{R}_3[X] \longmapsto 4P - (X+1)P'$ est un endomorphisme et on trouve que sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  On voit immédiatement que A est inversible (car elle est triangulaire supérieure sans 0 sur sa diagonale). Avec la méthode du pivot de Gauss, on trouve que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/12 & 1/12 & 1/12 & 3/12 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- *Inversibilité de la matrice de Vandermonde. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{K}$. On définit*

On en reparlera dans le chapitre 37.

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Donnons une CNS pour que V soit inversible.

- *Considérons*

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P - P' \end{array} \right.$$

L'application u est bien linéaire et à valeurs dans $\mathbb{K}_n[X]$: en effet, si P est constant alors $P' = 0$ donc $P - P' = P \in \mathbb{K}_n[X]$, et si P n'est pas constant, alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$, et donc $\deg(u(P)) = \deg(P)$ car $u(P)$ est la différence de deux polynômes de degrés distincts, et en particulier $u(P) \in \mathbb{K}_n[X]$. Montrons de deux manières différentes que u est bijective.

- ⋆ ***Première méthode.*** *Soit $P \in \mathrm{Ker}(u)$. Alors $P = P'$, ce qui n'est possible que si $P = 0$ (voir ci-contre). Ainsi, $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$ donc u est un endomorphisme injectif donc est bijectif.*
- ⋆ ***Deuxième méthode (par codage matriciel).*** *La matrice canoniquement associée à u est :*

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u(1) & u(X) & u(X^2) & \cdots & \cdots & u(X^n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & -n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{n-1} \\ X^n \end{array}$$

Puisque A est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux tous non nuls, elle est inversible : u est bijective.

Si P est constant, alors $P' = 0$ donc $P = P'$ si et seulement si $P = 0$. Si P n'est pas constant, alors $\deg(P) \neq \deg(P')$ donc $P \neq P'$.

b) Critères d'inversibilité

On vient de voir qu'une matrice carrée est inversible si et seulement elle représente un isomorphisme. Voyons à présent des critères d'inversibilité de matrices héritées des propriétés des isomorphismes (et en particuliers des endomorphismes).

Proposition. *Soit A une matrice carrée. Quel que soit l'endomorphisme f que A représente, on a*

$$\begin{aligned} A \text{ est inversible } &\iff f \text{ est bijective} \\ &\iff f \text{ est surjective} \\ &\iff f \text{ est injective.} \end{aligned}$$

f étant uniquement déterminé une fois que l'on s'est fixé un espace E de dimension n (lorsque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) et une base de E. Ce résultat est encore valable si l'espace d'arrivée n'est pas E mais est de même dimension (et alors f est un isomorphisme).

Démonstration. L'équivalence entre f bijective et A inversible découle du paragraphe précédent. Comme f est un endomorphisme, sa bijectivité est équivalente à son injectivité et aussi à sa surjectivité. □

Remarque : Redémontrons le résultat du chapitre 23 sur les matrices triangulaires supérieures à savoir qu'une telle matrice est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls et que, le cas échéant, son inverse est encore triangulaire supérieure. Pour cela, nous allons « bien choisir » les espaces et les bases dans lesquels A représente un endomorphisme.

Théorème (critère du noyau). *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si $\operatorname{Ker}(A) = \{0_n\}$, c'est-à-dire*

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \qquad AX = 0_n \quad \Longrightarrow \quad X = 0_n.$$

On a déjà vu dans le chapitre 23 que, s'il existe $X \neq 0_n$ tel que $AX = 0_n$, alors A n'est pas inversible.

Démonstration. Notons $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A. La matrice A est inversible si et seulement si f est injective sur $\mathbb{K}^n$ si et seulement si $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$ si et seulement si $\operatorname{Ker}(A) = \{0_n\}$ (en effet on a vu que $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Ker}(A)$ étaient isomorphes).□

Exemple : *Le critère d'Hadamard. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :*

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!], \qquad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrons que A est inversible.

En d'autres termes, chaque coefficient diagonal est en valeur absolue (ou en module si on est sur $\mathbb{C}$) strictement supérieur à la somme des modules des autres termes de la ligne (on dit que A est à diagonale strictement dominante). Par exemple,

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 & 2 \\ -13 & -19 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

est inversible.

Théorème (critère de l'image). *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si $\mathrm{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, c'est-à-dire*

$$\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \qquad \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \qquad Y = AX.$$

Démonstration. Notons $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A. La matrice A est inversible si et seulement si f est surjective sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}^n$ si et seulement si $\mathrm{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (en effet on a vu que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(A)$ étant isomorphes).□

Nous pouvons enfin démontrer que l'inversibilité à gauche et l'inversibilité à droite d'une matrice sont équivalences :

Théorème. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
- *Si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = \mathrm{I}_n$ (on dit que A est inversible à droite), alors A est inversible et $A^{-1} = B$.*
- *Si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $BA = \mathrm{I}_n$ (on dit que A est inversible à gauche), alors A est inversible et $A^{-1} = B$.*

Preuve alternative : ce théorème est la version matricielle du fait qu'une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F de même dimension est bijective si et seulement si il existe $g \in \mathscr{L}(F, E)$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ **ou** $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. Rappelons que, en dimension quelconque, c'est un **et** qu'il faut !

Démonstration.

□

Voyons un nouveau critère d'inversibilité :

Corollaire. *Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une base de $\mathbb{K}^n$ si et seulement si ses vecteurs lignes forment une base de $\mathbb{K}^n$.*

Il est même équivalent de dire que les vecteurs colonnes (respectivement lignes) engendrent $\mathbb{K}^n$. Et encore équivalent de dire que les vecteurs colonnes (respectivement lignes) forment une famille libre.

Démonstration. Notons $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A. On a

$$\begin{aligned} A \text{ est inversible} &\iff f \text{ est bijective,} \\ &\iff f \text{ envoie une base sur une base,} \\ &\iff (f(e_1), \dots, f(e_n)) \text{ est une base de } \mathbb{K}^n. \end{aligned}$$

Mais, par définition, les vecteurs colonnes de A sont $f(e_1), \dots, f(e_n)$. Ainsi A est inversible si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une base de $\mathbb{K}^n$. Enfin,

$$\begin{aligned} A \text{ est inversible} &\iff A^\top \text{ est inversible,} \\ &\iff \text{les colonnes de } A^\top \text{ forment une base de } \mathbb{K}^n, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure puisque les vecteurs colonnes de $A^\top$ sont les vecteurs lignes de A. □

Exemple : *La matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible car les vecteurs colonnes de M forment une base de $\mathbb{K}^n$. En effet, si on note comme d'habitude $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, alors les vecteurs colonnes de M sont $(e_n, e_1, \dots, e_{n-1})$, et donc c'est encore une base de $\mathbb{K}^n$.

Le fait que des vecteurs forment une base ou non ne dépend pas de l'ordre des vecteurs.

Nous verrons encore d'autres critères d'inversibilité avec le rang (dans le paragraphe III) et les systèmes linéaires (dans le paragraphe V).

c) Effet de la multiplication par une matrice inversible sur le noyau et l'image

Revisitions le résultat du chapitre 31 qui assure la stabilité du noyau (respectivement de l'image) d'une application linéaire par composition à gauche (respectivement à droite) par un isomorphisme :

Proposition. *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{Ker}(CA) = \mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(AB) = \mathrm{Im}(A)$.*

Autrement dit le noyau est préservé par multiplication à gauche par une matrice inversible et l'image est préservée par multiplication à droite par une matrice inversible.

Démonstration. Soient $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, $g \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p)$ et $h \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associées à A, B et C respectivement. Puisque les matrices B et C sont inversibles, g et h sont bijectives. D'après le paragraphe III.3.d du chapitre 31, $\mathrm{Ker}(h \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f)$. Or, si on note φ l'application qui à $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ associe sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^p$, on a vu (dans le paragraphe I.4.b) que $\varphi(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{Im}(A)$, $\varphi(\mathrm{Im}(f \circ g)) = \mathrm{Im}(AB)$, $\varphi(\mathrm{Ker}(f)) = \mathrm{Ker}(A)$ et $\varphi(\mathrm{Ker}(h \circ f)) = \mathrm{Ker}(CA)$, ce qui permet de conclure. □

Corollaire. *Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice préservent son noyau. Les opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice préservent son image.*

Démonstration. Découle du fait (cf. chapitre 23) qu'effectuer une opération élémentaire sur les lignes (respectivement les colonnes) se traduit matriciellement par une multiplication à gauche (respectivement à droite) par une matrice inversible. Il suffit ensuite d'appliquer la proposition précédente. □

III Rang d'une matrice

On a déjà vu la notion de rang d'une famille de vecteurs et de rang d'une application linéaire. Voyons maintenant la notion de rang d'une matrice puis explorons les liens entre toutes ces différentes notions.

1) Une définition

Je dis *une définition* car on aurait aussi pu définir le rang d'une matrice comme le rang de n'importe quelle application linéaire qu'elle représente (ce que l'on verra en caractérisation dans le prochain paragraphe).

Définition. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Notons $\mathscr{F}$ la famille des p vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ définis par les colonnes de A (dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$). On appelle rang de A, et on note $\mathrm{rg}(A)$, le rang de la famille $\mathscr{F}$:*

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \dim\big(\mathrm{Vect}(\mathscr{F})\big).$$

Remarque : Puisque $\mathscr{F}$ contient p vecteurs, on a $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) \leqslant p$. Puisque $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, on a $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leqslant n$. Ainsi $\mathrm{rg}(A) \leqslant \min(n, p)$.

On peut aussi le voir comme le rang de la famille des p vecteurs de $\mathbb{K}^n$ définis par les colonnes de A (dans la base canonique de K^n) puisqu'on identifie usuellement $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

2) Lien entre les différentes notions de rang

On a vu dans le chapitre 31 que le rang d'une famille de vecteurs est invariant par isomorphisme. On en déduit :

Proposition. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si $v_1, \ldots, v_k$ sont des vecteurs de E, alors*

$$\mathrm{rg}(v_1, \ldots, v_k) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_k)\right).$$

Ainsi, pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs, il suffit d'écrire sa matrice dans une base **quelconque** et de déterminer son rang.

Démonstration. L'application φ qui à un vecteur de E associe sa matrice (colonne) dans la base $\mathscr{B}$ est un isomorphisme. Par conséquent

$$\mathrm{rg}(v_1, \ldots, v_k) = \mathrm{rg}(\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k)).$$

Or $(\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k))$ est la famille des vecteurs colonnes de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_k)$, ce qui permet de conclure. □

Remarque : Rappelons (cf. chapitre 31) que le rang d'une famille de vecteurs est :

- le maximum des cardinaux de ses sous familles libres.
- est invariant lorsqu'on effectue une succession d'opérations élémentaires sur les vecteurs de la famille (et invariant par retrait d'un vecteur nul ou d'un vecteur qui est combinaison linéaire des autres).

Dans la pratique, il suffit donc d'appliquer la méthode du pivot de Gauss aux colonnes de la matrice d'une famille de vecteurs et d'enlever les colonnes nulles ou combinaison linéaire d'autres... jusqu'à ce que les colonnes restantes forment une famille libre. Dans le paragraphe III.4, nous verrons des critères « visibles » permettant de conclure sur la liberté (avec des matrices dites échelonnées).

Exemple : *Déterminons le rang de la famille*

$$\mathcal{F} = \big((1, 2, -7, 4), (-1, 0, 2, 5), (0, -3, 5, 0), (-2, 1, 4, 1)\big)$$

via le rang de sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Proposition. *Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f)\right)$.*

Démonstration. Comme $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$, on a $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(f(e_1), \ldots, f(e_p)\right)$. Puisque $\left(f(e_1), \ldots, f(e_p)\right)$ est une famille de vecteurs de F, la proposition précédente entraîne que

$$\mathrm{rg}(f(e_1), \ldots, f(e_p)) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(e_1), \ldots, f(e_p))\right) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f)). \qquad \square$$

Cette proposition signifie que le rang d'une application linéaire de E dans F est égal au rang de sa matrice dans **n'importe quelles bases** de E et F.

Corollaire. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Toutes les applications linéaires représentées par A ont le même rang.*

Ou encore A est le rang de toute application linéaire qu'elle représente.

Exemples :

- *Reprenons l'exemple ci-dessus. La matrice A de la famille $\mathscr{F}$ est aussi le rang de l'application linéaire*

$$T : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^4 & \longrightarrow & \mathbb{K}^4 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x-y-2t, 2x-3z+t, -7x+2y+5z+4t, 4x+5z+t) \end{array} \right.$$

  Il s'agit de l'application linéaire canoniquement associée à A.

  Le théorème du rang nous assure alors que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 4 - \mathrm{rg}(f) = 1$. On remarque que si, si on note C_1, C_2, C_3, C_4 les colonnes de A, alors $C_1 + C_3 + C_4 = C_2$. On en déduit que $f(e_1) - f(e_2) + f(e_3) + f(e_4) = 0$ donc $f(e_1 - e_2 + e_3 + e_4) = 0$ et donc $(1,-1,1,1) = e_1 - e_2 + e_3 + e_4 \in \mathrm{Ker}(f)$. Le sous espace vectoriel $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 1 et on en connaît un vecteur non nul. Il est donc engendré par ce vecteur : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1,-1,1,1))$.

- *Reprenons l'exemple de l'application linéaire*

$$T : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A + A^\top \end{array} \right.$$

  Déterminons son rang et son noyau.

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$.*

On en déduit aussi que $\mathrm{rg}(A) = 0$ si et seulement si A est la matrice nulle.

Démonstration. Découle du fait que $\mathrm{Im}(f)$ est isomorphe à $\mathrm{Im}(A)$ donc $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(A))$. $\square$

3) Propriétés du rang d'une matrice

On déduit de la proposition précédente que :

Théorème (du rang). *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a $\mathrm{rg}(A) + \dim(\mathrm{Ker}(A)) = p$.*

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{rg}(A) = n$ si et seulement si A est inversible.*

L'équivalence entre $\mathrm{rg}(A) = n$ et A est inversible découle aussi du fait que ses vecteurs colonnes forment une base de $\mathbb{K}^n$. Or on a vu dans le paragraphe II.3 du chapitre 31 que cela était équivalent à dire que les vecteurs colonnes en questions forment une famille de rang n.

DÉMONSTRATION. Notons f une application linéaire représentée par A. On a $\mathrm{rg}(A) = n$ si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = n$ si et seulement si f est surjective. Or on a vu dans le paragraphe II.2.b que cela était équivalent à l'inversibilité de A. □

Proposition. *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors*

$$\mathrm{rg}(AB) \leqslant \min(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)).$$

DÉMONSTRATION. Notons $v \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^q, \mathbb{K}^p)$ représentés par A et B respectivement. On a vu dans le paragraphe III.3.d du chapitre 31 que $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$. Comme $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(AB)$, $\mathrm{rg}(v) = \mathrm{rg}(A)$ et $\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(u)$, cela permet de conclure. □

Proposition. *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On a $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(CA) = \mathrm{rg}(A)$. Autrement dit le rang est invariant par multiplication par une matrice inversible à gauche ou à droite.*

DÉMONSTRATION. On a vu dans le paragraphe II.2.c que $\mathrm{Im}(AB) = \mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(CA) = \mathrm{Ker}(A)$. Dès lors $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(A)$ et, par théorème du rang,

$$\mathrm{rg}(CA) = p - \dim(\mathrm{Ker}(CA)) = p - \dim(\mathrm{Ker}(A)) = \mathrm{rg}(A).$$ □

Corollaire. *Les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes préservent le rang.*

On a déjà rappelé plus haut que les opérations élémentaires sur les colonnes préservent le rang de vecteurs les représentant (qui est égal au rang de la matrice).

⚠ On peut donc alterner des opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes sans problème quand on calcule le rang d'une matrice. Mais rappelons que cela ne fonctionne pas pour déterminer l'inverse d'une matrice via la méthode du pivot de Gauss (cf. chapitre 23) : il faut choisir uniquement les colonnes ou uniquement les lignes. Attention aussi : les opérations élémentaires sur les colonnes préservent l'espace qu'elles engendrent mais pas les opérations sur les lignes.

Terminons par une proposition qui est dans le même esprit mais dont nous reportons la démonstration au paragraphe IV.2 :

Proposition. *Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{rg}(A^\top) = \mathrm{rg}(A)$.*

Corollaire. *Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est aussi le rang de la famille des n vecteurs définie par les vecteurs lignes de A (dans la base canonique de $\mathbb{K}^p$).*

Cela permet de retrouver le fait que les opérations élémentaires sur les lignes préservent le rang.

4) Rang d'une matrice échelonnée

Il y a plein de définitions (qui ne sont pas toutes immédiatement équivalentes) des matrices échelonnées. Prenons la suivante :

Définition. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dite échelonnée si chaque ligne commence par strictement plus de zéros que la précédente ou est nulle si la précédente est nulle.*

Le premier coefficient non nul d'une ligne d'une matrice échelonnée est appelé pivot.

Exemples : *Les matrices suivantes sont échelonnées :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : Lorsqu'on applique la méthode du pivot de Gauss aux lignes d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on obtient une matrice du type

$$\begin{pmatrix} d_{1,1} & * & \cdots & * & \cdots & * \\ 0 & d_{2,2} & \cdots & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & d_{r,r} & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

avec $r \in [\![0\,;\min(n,p)]\!]$ et $d_{1,1},\dots,d_{r,r}$ non nuls. Il s'agit bien d'une matrice échelonnée au sens de la définition ci-dessus.

Théorème. *Le rang d'une matrice échelonnée A est égal au nombre de lignes non nulles de A.*

DÉMONSTRATION.

En fait on pourrait directement raisonner avec A mais c'est moins visuel. En effet, pour tout $j \in [\![1\,;p]\!]$, $a_{j,k_j} \neq 0$ et, pour tout $i > j$, $a_{i,k_j} = 0$ (puisque $k_j < k_i$) si bien que $u(X^{k_j-1})$ est de degré $k_j - 1$. Ainsi la famille $(u(X^{k_j-1}))_{1\leqslant j\leqslant r}$ est échelonnée en degré et donc libre. On en déduit que $\dim(\mathrm{Im}(u)) \geqslant r$ et on conclut en remarquant que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathbb{K}_{r-1}[X]$.

Il se peut que ce soit la transposée de la matrice qui soit échelonnée (notamment si on a fait des opérations élémentaires sur les colonnes).

□

Exemple : *Les quatre matrices de l'exemple précédent sont respectivement de rang 3, 4, 2 et 3.*

La méthode est donc toute tracée : pour calculer le rang d'une matrice, on la met sous forme échelonnée avec des opérations élémentaires (via l'algorithme du pivot de Gauss) et on compte le nombre de lignes non nulles.

Exemple : *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Donnons, en fonction de λ, le rang de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

On met λ le plus loin possible pour éviter au maximum de faire des cas : rappelons que, si le pivot est nul, il faut échanger des lignes dans la méthode.

Exemples :

- *Une matrice A est de rang 1 si et seulement si toutes ses colonnes sont proportionnelles et l'une au moins est non nulle. En effet :*
  - ⋆ *Si $n-1$ colonnes sont proportionnelles à une autre colonne non nulle, des opérations élémentaires permettent de se ramener à la matrice dont toutes les colonnes sont nulle sauf une. Celle ci est alors de rang 1 et donc $\mathrm{rg}(A) = 1$.*
  - ⋆ *Si deux colonnes (au moins) sont non proportionnelles, alors elles forment une famille libre à deux éléments donc le rang des vecteurs associées est supérieur à 2. Par contraposée, on obtient la réciproque.*

  Puisque le rang d'une matrice est le rang de sa transposée, elle donc de rang 1 si et seulement si toutes ses lignes sont proportionnelles et l'une au moins est non nulle.

- *Si une matrice carrée d'ordre n est triangulaire supérieure avec tous ses coefficients non nuls sur la diagonale, alors elle est échelonnée sans ligne nulle. Elle est donc de rang n et donc inversible. On retrouve ainsi le résultat vu dans le chapitre 23.*

5) Rang et matrices extraites

Définition. *Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Une matrice B est extraite de A s'il existe $I \subset [\![1\,;n]\!]$ et $J \subset [\![1\,;p]\!]$ tels que $B = (a_{i,j})_{i\in I, j\in J}$.*

Remarque : Si on note $I = \{i_1; \dots; i_q\}$ et $J = \{j_1; \dots; j_r\}$, la matrice B est la matrice obtenue en ne gardant que les lignes d'indices $i_1, \dots, i_q$ et les colonnes d'indices $j_1, \dots, j_r$. En d'autres termes, une matrice B est extraite d'une matrice A lorsqu'on peut l'obtenir en barrant des lignes et des colonnes de A (pas forcément le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes).

Avec les notations ci-contre, B est de taille $q \times r$: B n'a aucune raison d'être carrée !

$$\begin{pmatrix}
a_{1,1} & \cdots & a_{1,j_1} & \cdots & a_{1,j_2} & \cdots & a_{1,j_r} & \cdots & a_{1,p} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i_1,1} & \cdots & a_{i_1,j_1} & \cdots & a_{i_1,j_2} & \cdots & a_{i_1,j_r} & \cdots & a_{i_1,p} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i_2,1} & \cdots & a_{i_2,j_1} & \cdots & a_{i_2,j_2} & \cdots & a_{i_2,j_r} & \cdots & a_{i_2,p} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i_q,1} & \cdots & a_{i_q,j_1} & \cdots & a_{i_q,j_2} & \cdots & a_{i_q,j_r} & \cdots & a_{i_q,p} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & \cdots & a_{n,j_1} & \cdots & a_{n,j_2} & \cdots & a_{n,j_r} & \cdots & a_{n,p}
\end{pmatrix}
= \begin{pmatrix}
a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \cdots & a_{i_1,j_r} \\
a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \cdots & a_{i_2,j_r} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{i_q,j_1} & a_{i_q,j_2} & \cdots & a_{i_q,j_r}
\end{pmatrix}$$

Exemple : *La matrice $B = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$ est extraite de $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}$: on a rayé les colonnes $1, 3, 5$ et la deuxième ligne.*

Théorème. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*

- *Si B est extraite de A, alors $\mathrm{rg}(B) \leqslant \mathrm{rg}(A)$.*
- *Le rang de A est la taille de la plus grande matrice (carrée) inversible que l'on peut extraire de A.*

Démonstration.

- On obtient B à partir de A en deux étapes (que l'on peut effectuer dans l'ordre qu'on veut) : on supprime des colonnes et on supprime des lignes.
  - ⋆ Notons C la matrice obtenue à partir de A en ne supprimant que les colonnes. Cela consiste à supprimer des vecteurs à la famille des colonnes (vues comme des vecteurs de $\mathbb{K}^p$) de A. L'espace engendré par les colonnes restantes étant inclus dans l'espace engendré par toutes les colonnes, le rang de C est inférieur au rang de A.
  - ⋆ La matrice B est obtenue à partir de C en supprimant les lignes. Cela consiste à supprimer des vecteurs à la famille des lignes (vues comme des vecteurs de $\mathbb{K}^p$) de C.

Car le rang d'une matrice est aussi la dimension de l'espace engendré par les vecteurs formés par ses colonnes.

L'espace engendré par les lignes restantes étant inclus dans l'espace engendré par toutes les lignes, le rang de B est inférieur au rang de C .

Ainsi $\mathrm{rg}(B) \leqslant \mathrm{rg}(A)$.

- Supposons évidemment A non nulle. Notons $r = \mathrm{rg}(A) \in \mathbb{N}^*$. D'après ce qui précède, il suffit de prouver qu'on peut extraire de A une matrice (carrée) inversible de taille r. D'après ce qui précède, A possède r vecteurs colonnes libres (le rang est le nombre maximal de vecteurs libres) : en ne prenant que ces vecteurs (et en rayant donc les autres), cela donne une matrice C à r colonnes de rang r (puisque ses r colonnes sont libres). Le rang d'une matrice étant aussi le rang de ses vecteurs lignes, la matrice C possède r vecteurs lignes libres. Dès lors, en prenant uniquement ces r vecteurs lignes, cela donne une matrice B à r lignes et r colonnes, donc carrée, dont les vecteurs lignes sont libres donc cette matrice est de rang r donc est inversible (car carrée de taille r). La matrice B est obtenue en rayant des lignes et des colonnes de A donc est extraite de A, ce qui est le résultat voulu. $\square$

Car le rang d'une matrice est aussi la dimension de l'espace engendré par les vecteurs formés par ses lignes.

Exemple : *Calculons* $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *en procédant par extraction.*

IV Changement de base, matrices équivalentes, matrices semblables

On a vu dans le paragraphe I.6 qu'il existe parfois des bases dans lesquelles des applications linéaires sont représentées par des matrices « simples », par exemple des matrices diagonales ou triangulaires. Pour de telles matrices, les calculs de puissances ou d'inverses sont plus simples si bien que travailler dans de telles bases permet de simplifier les calculs de puissances d'endomorphismes ou d'inverses d'isomorphismes.

Dans ce paragraphe, nous n'allons pas chercher de méthodes pour trouver de telles bases (c'est plutôt l'un des buts de la seconde année) mais plutôt étudier les liens entre les différentes matrices représentant une même applications linéaire dans des bases différentes.

1) Changement de base

a) Matrices de passage

Définition. *Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$ la matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, la j-ième colonne est formée des coordonnées de e'_j dans la base $\mathscr{B}$.*

Et donc $\dim(E) = n$ dans cette proposition. La lettre p est déjà utilisée pour autre chose.

Remarque : En d'autres termes, $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = (p_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où, pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$,

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i$$

c'est-à-dire que pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $p_{i,j}$ est la i-ème coordonnée de e'_j dans la base $\mathscr{B}$. On note :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

Moyen mnémotechnique pour se souvenir quels vecteurs on met au-dessus : dans l'égalité ci-contre, $\mathscr{B}'$ est « à côté » des vecteurs $e'_1, \dots, e'_n$ (qui forment la base $\mathscr{B}'$), et éloignée des vecteurs $e_1, \dots, e_n$ qui forment la base $\mathscr{B}$.

On a donc $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$.

Exemples :

- *Dans $\mathbb{K}^2$, notons $e'_1 = (1,2)$, $e'_2 = (3,4)$, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{K}^2$...*

- *Notons $\mathscr{B}' = (7, 3X-1, (X-1)^2)$ et $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$...*

Proposition. *Soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ des bases de E. Alors :*

1. $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{Id}_E)$.
2. $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}} = \mathrm{I}_n$.
3. $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} P_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.
4. $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ *est inversible et* $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$.

Lorsque la base de départ n'est pas la même que la base d'arrivée, la matrice de Id_E n'est pas forcément I_n.

DÉMONSTRATION.

$\square$

Remarques :

- Le dernier point est intuitif : une matrice de passage va d'une base dans une autre, pour revenir en sens inverse... il suffit d'aller de la seconde base vers la première.
- La réciproque est vraie, c'est-à-dire que toute matrice inversible est une matrice de passage : soit P une matrice carrée inversible de taille $n = \dim(E)$. Si on se donne $\mathscr{B}_2$ une base de E et si on appelle $\mathscr{B}_1$ la base de E dont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}_2$ sont les vecteurs colonnes de P (c'est bien une base car P est inversible donc la famille de ses vecteurs colonnes est de rang n et donc est une base) alors P est la matrice de $\mathscr{B}_1$ dans la base $\mathscr{B}_2$, et donc $P = P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1}$.

b) Changement de coordonnées dans une base (pour les vecteurs)

Théorème. *Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Soit $x \in E$. On note $X_{\mathscr{B}}$ et $X_{\mathscr{B}'}$ les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dont les coordonnées sont les coordonnées de x dans, respectivement, les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. Alors : $X_{\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}X_{\mathscr{B}'}$.*

Moyen mnémotechnique : dans l'égalité ci-contre, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}$ sont côte à côte, ainsi que $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}'$.

DÉMONSTRATION.

□

Exemples :

- *Reprenons les notations $(e_1, e_2, e'_1, e'_2, \mathscr{B}, \mathscr{B}')$ du premier exemple du paragraphe précédent. Déterminer les coordonnées de $(x, y) \in \mathbb{K}^2$ dans la base (e'_1, e'_2).*

- *Notons de nouveau $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Si on applique une rotation d'angle θ à e_1, on obtient le vecteur $u_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta))$. Cette même rotation transforme e_2 en $v_\theta = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$ (cf. dernier exemple du paragraphe I.2.a). Déterminons les coordonnées (x_θ, y_θ) de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ dans la base (u_θ, v_θ).*

c) Changement de coordonnées dans une base (pour les applications linéaires)

Théorème. *Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ des bases de E. Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ des bases de F. Alors*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}',\mathscr{B}'}(f) = P_{\mathscr{C}',\mathscr{C}}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f)P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}.$$

DÉMONSTRATION.

□

Remarque : Ce théorème peut faire un peu peur, mais il est très simple ! Il suffit de bien visualiser le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
E,\mathscr{B} \arrow[d, "f"] & E,\mathscr{B}' \arrow[l, "\mathrm{Id}_E"'] \arrow[d, "f"] \\
F,\mathscr{C} \arrow[r, "\mathrm{Id}_F"'] & F,\mathscr{C}'
\end{tikzcd}$$

et son équivalent matriciel :

$$\begin{tikzcd}
E,\mathscr{B} \arrow[d, "\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f)"'] & E,\mathscr{B}' \arrow[l, "P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}"'] \arrow[d, "\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}',\mathscr{B}'}(f)"] \\
F,\mathscr{C} \arrow[r, "P_{\mathscr{C}',\mathscr{C}}"'] & F,\mathscr{C}'
\end{tikzcd}$$

Le résultat du théorème précédent est donc très simple :

- Si on va directement de $(E,\mathscr{B}')$ dans $(F,\mathscr{C}')$, alors la matrice est $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}',\mathscr{B}'}(f)$.
- Mais on peut aussi d'abord aller chez $(E,\mathscr{B}')$ (matrice de passage $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$) puis aller chez $(F,\mathscr{C})$ (matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f)$) et enfin aller chez $(F,\mathscr{C}')$ (matrice de passage $P_{\mathscr{C}',\mathscr{C}}$).

Et on n'oublie pas qu'on fait le produit de droite à gauche quand on compose.

Corollaire. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ des bases de E. Alors*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = (P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}.$$

Démonstration. On applique le théorème précédent avec $(\mathscr{B},\mathscr{B},\mathscr{B}',\mathscr{B}')$ au lieu de $(\mathscr{B},\mathscr{B}',\mathscr{C},\mathscr{C}')$ et on utilise le fait que $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = (P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1}$. □

Si on note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$, on obtient

$$B = P^{-1}AP,$$

formule que l'on a rencontrée à plusieurs reprises dans les exercices du chapitre 23. La matrice P n'était rien d'autre qu'une matrice de passage !

Exemple : *Dans le paragraphe I.6, nous avons étudié l'exemple d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, en notant $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. En résolvant un système, on a montré que, si $\varepsilon_1 = (2,1,0)$, $\varepsilon_2 = (2,0,1)$, $\varepsilon_3 = (1,1,-1)$ alors, dans la base $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$, la matrice de f est diagonale. Vérifions cela avec la formule du corollaire.

- *La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est*

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- *On trouve avec l'algorithme du pivot de Gauss que*

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

- *On obtient*

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) &= (P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1}\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\\
&= P^{-1}AP\\
&= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2\\ 1 & -2 & -2\\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2\\ 1 & -1 & -2\\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

2) Matrices équivalentes

Dans ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel de dimension p et F un espace vectoriel de dimension n.

Définition. *Soit A et B dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que A est équivalente à B si il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ tels que $A = PBQ$.*

Proposition. *La relation « être équivalente à » est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*

Et donc on dit aussi, le cas échéant, que B est équivalente à A ou encore que A et B sont équivalentes.

Démonstration.

- Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a $A = \mathrm{I}_n A \mathrm{I}_p$ donc A est équivalente à A : cette relation est réflexive.
- Soient A et B dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que A est équivalente à B. Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $A = PBQ$. Alors $B = P^{-1}AQ^{-1}$ et, puisque P^{-1} et Q^{-1} sont inversible, B est équivalente à A : cette relation est symétrique.
- Soient A, B et C dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que A est équivalente à B et B équivalente à C. Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $S \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $A = PBQ$ et $B = RCS$. Dès lors $A = P(RCS)Q = (PR)C(SQ)$. Comme PR et SQ sont inversible, A est équivalente à C : cette relation est transitive. □

Dans les paragraphes précédents, on a rencontré deux cas de figures de matrices équivalentes :

Théorème. *Si on obtient une matrice A à partir d'une matrice B en faisant une succession d'opérations élémentaires, alors A et B sont équivalentes.*

Ces opérations peuvent se faire sur les lignes, ou sur les colonnes ou sur les deux.

Démonstration. Effectuer des opérations élémentaires sur les colonnes sur la matrice B revient à la multiplier à droite par une matrice inversible. Effectuer des opérations élémentaires sur les lignes sur la matrice B revient à la multiplier à gauche par une matrice inversible. Puisqu'un produit de matrice inversible est inversible, cela revient donc à multiplier B par une matrice inversible P à gauche et une matrice inversible Q à droite : $A = PBQ$ donc A et B sont équivalentes. □

Théorème. *Si deux matrices A et B représentent une même application linéaire (dans des bases éventuellement différentes), alors elles sont équivalentes.*

Démonstration. Si $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{C}',\mathscr{B}'}(f)$ et $B = \operatorname{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f)$ avec f une certaine application linéaire d'un espace E dans un espace F et $\mathscr{B},\mathscr{B}',\mathscr{C},\mathscr{C}'$ certaines bases, alors la formule de changement de base assure que $A = PBQ$ où $P = P_{\mathscr{C}',\mathscr{C}}$ et $Q = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$. Elles sont bien inversibles car ce sont des matrices de passage. □

Remarques :

- La réciproque de ce dernier théorème est vraie : supposons que A et B sont deux matrices équivalentes de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Il existe donc P et Q inversibles telles que $A = PBQ$. On a vu plus haut que toute matrice inversible est une matrice de passage : il existe $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ des bases de E et $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ des bases de F telles que $P = P_{\mathscr{C}',\mathscr{C}}$ et $Q = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$. Il existe ensuite f une applications linéaire de E dans F telle que $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f)$. La formule de changement de base entraîne que $A = PBQ = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}',\mathscr{B}'}(f)$. Autrement dit A et B représentent une même application linéaire.
- On a vu dans le paragraphe III.3 que le rang d'une matrice est invariant par multiplication à gauche comme à droite par une matrice inversible. On en déduit que deux matrices équivalentes ont le même rang. La réciproque est-elle vraie ? Explorons cela dans la suite de ce paragraphe.

Définition. *Soit $r \in [\![0\,;\min(n,p)]\!]$. On note J_r la matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls sauf les r premiers coefficients diagonaux qui valent 1 :*

$$J_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\0\\ \vdots \\ \vdots\end{matrix}}\right\} r \\ \vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix}} \end{array} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

La matrice J_r n'est pas forcément carrée. De plus on la note de la même façon quelle que soit sa taille car il n'y a pas d'ambiguïté en général (comme les matrices élémentaires).

Proposition. *Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Notons $r = \mathrm{rg}(f)$. Alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{B}'$ de F telles que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f) = J_r$.*

J_r est de rang r car échelonnée avec r lignes non nulles. C'est l'archétype de la matrice de rang r.

Démonstration.

□

Corollaire. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r est équivalente à J_r.*

DÉMONSTRATION. Soit f une application linéaire représentée par A dans deux bases $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{C}'$ de E et F respectivement. Puisque f est de rang r, la proposition précédente assure qu'il existe des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ de E et F respectivement telles que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f) = J_r$. En notant $P = P_{\mathscr{C}',\mathscr{C}}$ et $Q = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}',\mathscr{B}'}(f) = P_{\mathscr{C}',\mathscr{C}}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f)P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = PJ_rQ$, ce qui permet de conclure. □

On en déduit une caractérisation simple des matrices équivalentes :

Théorème. *Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.*

DÉMONSTRATION. On a déjà dit en remarque ci-dessus que deux matrices équivalentes ont le même rang. Réciproquement donnons-nous deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qui ont le même rang r. Elles sont alors toutes les deux équivalentes à J_r d'après le corollaire précédent. Par transitivité, on conclut que A et B sont équivalentes. □

Autrement dit les classes d'équivalence de la relation « être équivalentes » sont entièrement déterminées par le rang.

Corollaire. *Une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r.*

C'est le moment de démontrer un résultat laissé en suspens dans le paragraphe III.3 :

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top)$.*

DÉMONSTRATION.

□

Il ne faut pas croire non plus que toutes les propriétés sont gardées par équivalence. Par exemple :

- Deux matrices équivalentes n'ont pas forcément la même trace (voir le prochain paragraphe).
- Une matrice équivalente à une matrice nilpotente n'est pas forcément nilpotente (en effet $J_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est équivalente à une matrice nilpotente de rang 1 (on a vu dans le paragraphe II.1.b qu'il en existait) sans être nilpotente.

3) Matrices semblables

Dans ce paragraphe, on suppose que E est de dimension n.

a) Définition et premières conditions nécessaires

Définition. *Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est semblable à B s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$.*

On parle aussi de relation de simulitude. Comme c'est une relation d'équivalence, on dit aussi, le cas échéant, que B est semblable à A ou encore que A et B sont semblables...

Proposition. *La relation « être semblable à » est une relation d'équivalence.*

DÉMONSTRATION. Analogue à celle pour les matrices équivalentes. □

Théorème. *Si deux matrices A et B représentent un même endomorphisme (dans des bases éventuellement différentes), alors elles sont semblables.*

DÉMONSTRATION. Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ avec f un certain endomorphisme de E et avec $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ certaines bases de E, alors la formule de changement de base assure que $A = P^{-1}BP$ où $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$. □

Remarque : La réciproque de ce dernier théorème est vraie : supposons que A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe donc P inversible $A = P^{-1}BP$. On a vu plus haut que toute matrice inversible est une matrice de passage : il existe $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ des bases de E telles que $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$. Il existe ensuite f un endomorphisme de E tel que $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$. Par formule de changement de base, $A = P^{-1}BP = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$. Autrement dit A et B représentent un même endomorphisme.

Exemple : *On a vu dans le paragraphe IV.1.c et dans le paragraphe I.6 que les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sont semblables.

⚠ Il est facile de confondre les notions de matrices équivalentes et matrices semblables. S'il est évident que deux matrices matrices semblables sont équivalentes, nous allons voir que la réciproque est (très) fausse. En attendant des (contre-)exemples, on peut déjà remarquer de premières différences :

- Contrairement aux matrices équivalentes, il n'y a qu'une matrice P.
- Cela n'a aucun sens de parler de matrices semblables pour des matrices qui ne sont pas carrées (alors que cela a du sens pour des matrices équivalentes).

Nous en verrons d'autres dans la suite. Contrairement aux matrices équivalentes, il n'existe en fait aucune caractérisation simple pour savoir si deux matrices sont semblables. On ne dispose que de nombreuses conditions nécessaires. La première étant que deux matrices semblables sont équivalentes et donc :

Proposition. *Deux matrices semblables ont même rang.*

⚠ **LA RÉCIPROQUE EST FAUSSE !!!**

Que dire des matrices semblables à $\lambda \mathrm{I}_n$ lorsque $\lambda \in \mathbb{K}^*$?

Corollaire. *Si deux matrices n'ont pas le même rang, alors elles ne sont pas semblables.*

Nous avons déjà rencontré des matrices semblables (sans prononcer ce nom) dans les exercices du chapitre 23. Notamment, lorsque $A = P^{-1}BP$, par récurrence immédiate,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad A^k = P^{-1}B^kP.$$

On en déduit :

Proposition. *Soient A et B deux matrices semblables. Alors, pour tout $k \in N$, A^k et B^k sont semblables.*

DÉMONSTRATION. Par définition, il existe P inversible telle que $A = P^{-1}BP$. Par une récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = P^{-1}B^kP$ ce qui est le résultat voulu. □

⚠ ... Par contre la base est la même au départ et à l'arrivée pour A et la même au départ et à l'arrivée pour B. Si on décide de mettre des bases différentes au départ à l'arrivée, on se retrouve avec des matrices équivalentes. Or nous allons voir que des matrices équivalentes n'ont aucune raison d'être semblables !

Dans le paragraphe IV.1.c par le biais de la relation $B = P^{-1}AP$ et, dans le paragraphe I.6 en montrant qu'elles représentent le même endomorphisme.

Savoir si deux matrices sont semblables ou non est en général un problème difficile : cf. paragraphe IV.3.c. L'an prochain, le chapitre de diagonalisation donnera des méthodes pour répondre à ce problème grâce à la recherche des éléments propres d'une matrice.

Récurrence à savoir absolument rédiger !

Remarques :

- ⚠ On peut avoir A^2 et B^2 semblables sans que A et B ne le soient.

  Par exemple $A = \mathrm{I}_n$ et $B = -\mathrm{I}_n$ ne sont pas semblables (cf. contre exemple ci-dessus : $\lambda\mathrm{I}_n$ n'est semblable qu'à elle même pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$). alors que A^2 et B^2 oui (elles sont égales).

- Par contraposée, s'il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que A^{k_0} et B^{k_0} ne sont pas semblables, alors A et B ne sont pas semblables.

  Par exemple, soient N_1 et N_2 deux matrices nilpotentes d'indices de nilpotence respectifs p_1 et p_2. Si $p_1 \neq p_2$ alors N_1 et N_2 ne sont pas semblables puisque, en notant $q = \min\{p_1; p_2\}$, N_1^q et N_2^q ne le sont pas (l'une des nulle et l'autre non donc elle n'ont pas le même rang).

⚠ Si $p_1 = p_2$, on ne peut pas conclure non plus que N_1 et N_2 sont semblables en général (cf. paragraphe IV.3.c).

b) Utilisation de la trace

Rappelons (cf. chapitre 23) que, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ (même si A et B ne commutent pas). On en déduit que la trace est un invariant de similitude (qui est plus simple à calculer que le rang) :

Proposition. *Deux matrices semblables ont la même trace.*

Démonstration.

$\square$

⚠ LA RÉCIPROQUE EST FAUSSE ! ! !

Par exemple, la matrice

$$E_{1,1} - E_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

est de trace nulle mais n'est pas semblable à la matrice nulle puisqu'elle est de rang 2 et la matrice nulle est de rang 0

Corollaire. *Si deux matrices n'ont pas la même trace, alors elles ne sont pas semblables.*

Remarque : Puisque deux matrices semblables ont la même trace, et afin de pousser encore plus loin l'analogie entre les matrices et les applications linéaires, on peut aussi définir la trace d'un endomorphisme de la façon suivante :

Définition. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On appelle trace de f, notée $\mathrm{tr}(f)$, la trace de toute matrice associée à f.*

Exemples :

- $\mathrm{tr}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{tr}(\mathrm{I}_n) = n$.
- *Notons D l'endomorphisme de dérivation dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$. On a $\mathrm{tr}(D) = 0$ puisqu'on a vu plus haut que sa matrice canoniquement associée est*

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} D(1) & D(X) & D(X^2) & \cdots & \cdots & D(X^n) \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{n-1} \\ X^n \end{array} \end{array}$$

Des résultats concernant la trace des matrices, on déduit immédiatement :

Proposition.
- *L'application* tr *est une forme linéaire non nulle sur* $\mathscr{L}(E)$.
- *Pour tous* $u \in \mathscr{L}(E,F)$ *et* $v \in \mathscr{L}(F,E)$, $\mathrm{tr}(v \circ u) = \mathrm{tr}(u \circ v)$.

Proposition. *La trace d'un projecteur est égale à son rang.*

Démonstration. Soit p un projecteur de E. On a vu dans le paragraphe I.6 qu'il existe une base de E dans la quelle la matrice de p est diagonale avec une diagonale composée d'abord de 1 puis de 0. Elle est donc échelonnée et le nombre de lignes non nulles est égal au nombre de 1 et donc à la somme des 1. Autrement dit son rang est égal à sa trace. □

c) Exemples

Voyons quelques exemples « simples » de preuves que de deux matrices sont semblables ou non.

« simples » car nous ne disposons d'aucun outil simple pour répondre à ce problème pour le moment à part chercher un endomorphisme représenté par ces deux matrices (dans des bases différentes). Les exemples plus compliqués passent par des arguments de « réduction » d'endomorphismes (cf. programme de deuxième année).

Exemples :

- *Les matrices*
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ne sont pas semblables car elles n'ont pas le même rang.
- *Les matrices*
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ne sont pas semblables car elles n'ont pas la même trace... alors qu'elles ont le même rang.
- *Les matrices*
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ne sont pas semblables car $A^2 \neq 0$ *et* $B^2 = 0$ *donc* A^2 *et* B^2 *ne sont pas semblables (puisqu'elles n'ont pas le même rang)... alors que qu'elles ont la même trace et la même rang.*

On voit sur ces quatre premiers exemples de matrices très simples que c'est un problème difficile !

- *Les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ont même rang (4), même trace (0) et même indice de nilpotence (3). Mais un calcul simple donne :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui ne sont pas semblables car elles n'ont pas le même rang, donc A et B ne sont pas semblables.

- *Montrons que les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont semblables.

- *Montrer que les matrices (carrées de taille n)*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

sont semblables.

V Retour sur les systèmes linéaires

Dans le chapitre 23, nous avons exploré les liens entre systèmes linéaires et matrices. On se donne

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Rappelons que le système linéaire

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{array} \right.$$

de n équations à p inconnues est équivalent à l'équation matricielle $AX = B$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ (ou $\mathbb{K}^p$ par identification usuelle). Revisitons et complétons les résultats du chapitre 23 avec ceux du présent chapitre. Commençons par les systèmes homogènes :

Proposition. *L'ensemble des solutions du système homogène $AX = 0_{n,1}$ est le noyau de A.*

On a déjà vu dans le paragraphe I.4.a que les lignes d'une matrice forment un système d'équations de son noyau.

Démonstration. Il n'y a rien à montrer : c'est la définition du noyau de A. □

Définition (rang d'un système). *On appelle rang d'un système linéaire le rang de la matrice A associée.*

Encore une définition du rang !

Proposition. *L'ensemble des solutions du système homogène $AX = 0$ est un espace vectoriel de dimension égale à $p - \mathrm{rg}(A)$, c'est-à-dire le nombre d'équations moins le rang du système.*

Démonstration. On vient de prouver que cet ensemble était égal à $\mathrm{Ker}(A)$: il suffit ensuite d'appliquer le théorème du rang. □

Passons au cas général :

Proposition. *Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si $B \in \mathrm{Im}(A)$. Le cas échéant, considérons X_0 une solution particulière (c'est-à-dire vérifiant $AX_0 = B$). Alors l'ensemble des solutions de $AX = B$ est*

$$\{X_0 + X \mid X \in \mathrm{Ker}(A)\}.$$

On a vu dans le chapitre 30 que l'ensemble des solutions du système est un sous-espace affine.

Démonstration. Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A. On sait (cf. chapitre 23) que le système est compatible si et seulement si $B \in \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n)$ et on a vu (cf. paragraphe I.4.b) que $\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n) = \mathrm{Im}(A)$. La deuxième partie de la proposition a déjà été montrée dans le paragraphe IV.2 du chapitre 23. □

Les vecteurs colonnes engendrent l'image, et les vecteurs lignes donnent un système d'équation du noyau.

Remarque : Cela permet de redémontrer un résultat vu dans le chapitre 8 : un système linéaire ne peut admette que 0, 1 ou bien une infinité de solutions (lorsque $\mathbb{K}$ est infini, ce qui est le cas si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). En effet, si $AX = B$ désigne ce système,

- ou bien le système est incompatible (c'est-à-dire $B \notin \mathrm{Im}(A)$) et il n'y a pas de solutions.
- ou bien le système est compatible et $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$, auquel cas l'ensemble des solutions est $\{X_0\}$ (avec X_0 une solution particulière... et donc la seule).
- ou bien le système est compatible et $\mathrm{Ker}(A) \neq \{0\}$. Alors $\mathrm{Ker}(A)$ contient un vecteur non nul X_0' et, en notant X_0 une solution particulière de $AX = B$, $X_0 + \lambda X_0'$ est encore solution de $AX = B$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

On a vu dans le chapitre 23 un critère d'inversibilité d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: A est inversible si et seulement si, pour tout second membre $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système linéaire $AX = Y$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, admet une unique solution. En fait on peut faire mieux :

Rappelons que, lorsque A est inversible, le système $AX = B$ est dit de Cramer et il admet une unique solution $X = A^{-1}B$.

Théorème. *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si le système linéaire $AX = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, admet une unique solution.*

Démonstration. Le sens direct a déjà été montré dans le chapitre 23. Réciproquement, supposons que $AX = B$ admet une unique solution X_0. L'ensemble des solutions est donc $\{X_0\}$ mais il est aussi $\{X_0 + X \mid X \in \mathrm{Ker}(A)\}$ si bien que $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ et donc A est inversible. □

Autrement dit A est inversible si, pour **un** second membre B quelconque, le système linéaire $AX = B$ admet une unique solution (alors que dans le chapitre 23, il fallait que ce soit vrai pour tout second membre).

Remarques :

- Ce théorème dit que le fait qu'un système possède ou non une unique solution ne dépend que de A et non pas du second membre.
- On connaissait déjà ce résultat pour un second membre nul : c'est le critère du noyau.

VI Bilans sur le rang et sur l'inversibilité

Dans ce long chapitre, nous avons passé notre temps à croiser tous les résultats et les explorer sous divers angles... sans compter tous les résultats du chapitre 31. Faisons un bilan :

1) Bilan sur le rang

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{rg}(A)$ est égal :

- au rang de toute application linéaire représentée par A.
- au rang de toute famille de vecteurs représentée par A.
- au rang de la famille de $\mathbb{K}^n$ formée par les p colonnes de A.
- au rang de la famille de $\mathbb{K}^p$ formée par les n lignes de A.
- au nombre maximal de vecteurs libres parmi ses vecteurs colonnes.
- au nombre maximal de vecteurs libres parmi ses vecteurs lignes.
- à la taille de la plus grande matrice (carrée) inversible que l'on peut extraire de A.
- à $\dim(\mathrm{Im}(A))$.
- à $p - \dim(\mathrm{Ker}(A))$ (théorème du rang).

Le rang de A vérifie les propriétés suivantes :

- $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top)$.
- $\mathrm{rg}(A) \leqslant \min(n, p)$.
- $\mathrm{rg}(A) = 0$ si et seulement si $A = 0$.
- $\mathrm{rg}(A) = 1$ si et seulement si $A \neq 0$ et toutes les lignes de A sont proportionnelles si et seulement si $A \neq 0$ et toutes les colonnes de A sont proportionnelles.
- On ne modifie pas le rang d'une matrice en la multipliant par une matrice inversible (à gauche, comme à droite)

- Les opérations élémentaires (sur les lignes et les colonnes) laissent le rang invariant.
- On ne modifie pas le rang en supprimant une colonne qui est combinaison linéaire des autres colonnes.
- On ne modifie pas le rang en supprimant une ligne qui est combinaison linéaire des autres lignes.
- Le rang caractérise complètement les classes d'équivalences de la relation « être équivalente » sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Le rang d'une matrice échelonnée est le nombre de lignes non nulles.
- Deux matrices semblables ont le même rang (mais la réciproque est fausse).
- Le rang d'un projecteur est égal à sa trace.

Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est une application quelconque représentée par A, alors :

- $\mathrm{rg}(A) = n\,(= \dim(F))$ si et seulement si f est surjective.
- $\mathrm{rg}(A) = p\,(= \dim(E))$ si et seulement si f est injective.

Enfin, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si $f \in \mathscr{L}(E)$ est une application linéaire représentée par A :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A) = n \quad &\iff \quad f \text{ est injective,}\\
&\iff \quad f \text{ est surjective,}\\
&\iff \quad f \text{ est bijective,}\\
&\iff \quad A \text{ est inversible,}\\
&\iff \quad \text{Les vecteurs colonnes de } A \text{ sont libres,}\\
&\iff \quad \text{Les vecteurs lignes de } A \text{ sont libres,}\\
&\iff \quad \text{Les vecteurs colonnes de } A \text{ forment une famille génératrice de } \mathbb{K}^n,\\
&\iff \quad \text{Les vecteurs lignes de } A \text{ forment une famille génératrice de } \mathbb{K}^n,\\
&\iff \quad \text{Les vecteurs colonnes de } A \text{ forment une base de } \mathbb{K}^n,\\
&\iff \quad \text{Les vecteurs lignes de } A \text{ forment une base de } \mathbb{K}^n.
\end{aligned}$$

Nous rajouterons, dans le chapitre 37 : si et seulement si $\det(A) \neq 0$ si et seulement si $\det(f) \neq 0$.

2) Bilan sur l'inversibilité d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\begin{aligned}
A \text{ est inversible} \quad &\iff \quad A \text{ est la matrice d'un automorphisme.}\\
&\iff \quad A \text{ est la matrice d'un endomorphisme injectif.}\\
&\iff \quad A \text{ est la matrice d'un endomorphisme surjectif.}\\
&\iff \quad A \text{ est la matrice d'un isomorphisme.}\\
&\iff \quad A \text{ est la matrice d'une application linéaire injective}\\
&\qquad\quad \text{entre deux espaces de même dimension finie.}\\
&\iff \quad A \text{ est la matrice d'une application linéaire surjective}\\
&\qquad\quad \text{entre deux espaces de même dimension finie.}\\
&\iff \quad \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ AX = 0 \ \Rightarrow\ X = 0\\
&\iff \quad \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ Y = AX\\
&\iff \quad \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ BA = \mathrm{I}_n\\
&\iff \quad \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AB = \mathrm{I}_n\\
&\iff \quad \text{Tout système linéaire dont } A \text{ est la matrice}\\
&\qquad\quad \text{associée admet une unique solution.}\\
&\iff \quad A^\top \text{ est inversible}\\
&\iff \quad \mathrm{rg}(A) = n\\
&\iff \quad A \text{ est une matrice de passage d'une base à une autre.}
\end{aligned}$$

Ainsi A est inversible si et seulement si, appliquant la méthode du pivot de Gauss sur A, on se ramène à une matrice triangulaire supérieur à coefficients diagonaux non nuls.

$\iff$ les vecteurs lignes de A forment une famille libre.

$\iff$ les vecteurs lignes de A forment une famille génératrice.

$\iff$ les vecteurs lignes de A forment une base.

$\iff$ les vecteurs colonnes de A forment une famille libre.

$\iff$ les vecteurs colonnes de A forment une famille génératrice.

$\iff$ les vecteurs colonnes de A forment une base.

Nous rajouterons, dans le chapitre 37 : si et seulement si $\det(A) \neq 0$ si et seulement si $\det(f) \neq 0$.

Ajoutons aussi :

- Si A est triangulaire, A est inversible si et seulement si coefficients diagonaux sont tous non nuls.
- Si A est annulé par un polynôme dont le coefficient constant est non nul, alors A est inversible.

La réciproque est vraie et laissée en exercice