### Chapitre 10

# Calcul intégral

Nous ne définirons pas rigoureusement la notion d'intégrales et certains résultats (comme le théorème fondamental de l'analyse, la relation de Chasles et la linéarité de l'intégrale) seront admis. Nous verrons tout cela proprement dans le chapitre 24.

L'objectif de ce chapitre est de calculer des intégrales et de déterminer des primitives de fonctions. C'est un chapitre avant tout technique.

Dans ce chapitre, $I$ désigne un intervalle non vide et non réduit à un point.

## I Primitives

### 1) Notion de primitive

**Définition.** *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$. On appelle primitive de $f$ sur $I$ toute fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{C}$ dérivable sur $I$ et telle que $F' = f$.*

On parle d'une primitive sur $I$ et non pas de la primitive sur $I$. Plus bas, nous allons montrer que si une fonction admet une primitive, elle en admet une infinité.

***Exemples :***

- *La fonction $x \longmapsto 15x^4 - 2x + 3 + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ admet* $\qquad$ *pour primitive sur $\mathbb{R}_+^*$.*
- *La fonction $\tan$ admet* $\qquad$ *pour primitive sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.*
- *La fonction $x \longmapsto \dfrac{3}{1-x}$ admet* $\qquad$ *pour primitive sur $]-\infty\,;1[$ et* $\qquad$ *pour primitive sur $]1\,;+\infty[$.*
- *$x \longmapsto \dfrac{1}{1+4x^2}$ admet* $\qquad$ *pour primitive sur $\mathbb{R}$.*
- *$x \longmapsto x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}$ admet* $\qquad$ *pour primitive sur $\mathbb{R}$.*

Il faut toujours préciser sur quel intervalle $F$ est une primitive de $f$. Par exemple, il est faux de dire que $\ln$ est une primitive de la fonction inverse (ce n'est vrai que sur $I = \mathbb{R}_+^*$).

**Remarques :**

- Une primitive $F$ d'une fonction $f$ sur $I$ est nécessairement continue puisqu'elle est dérivable par définition.
- En général une fonction quelconque n'admet pas de primitive.

  *Par exemple la fonction partie entière n'admet de primitive sur l'intervalle $[0\,;2[$. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que ce soit le cas. Une primitive $F$ sur $[0\,;2[$ est donc dérivable sur $[0\,;2[$ et, pour tout $x \in [0\,;2[$, $F'(x) = \lfloor x \rfloor$. En particulier $F'$ est nulle sur $[0\,;1[$ donc $F$ est constante sur $[0\,;1[$. Comme $F$ est continue en $1$, cette constante est égale à $F(1)$. On en déduit que la dérivée à gauche de $F$ en $0$ est nulle. C'est absurde puisque $F'(1) = 1$.*

En fait le problème n'est pas tant la discontinuité mais plutôt le fait que la fonction partie entière ne vérifie pas la propriété des valeurs intermédiaires. Pour admettre une primitive, une fonction doit être une dérivée. Or le théorème de Darboux (cf. exercice du TDn° 22) assure qu'une dérivée vérifie forcément la propriété des valeurs intermédiaires.

On admet le théorème suivant qui découle du théorème fondamental de l'analyse (que l'on verra dans le paragraphe II.2.a mais que l'on montrera dans le chapitre 24) :

**Théorème.** *Si $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue sur $I$, alors $f$ admet une primitive sur $I$.*

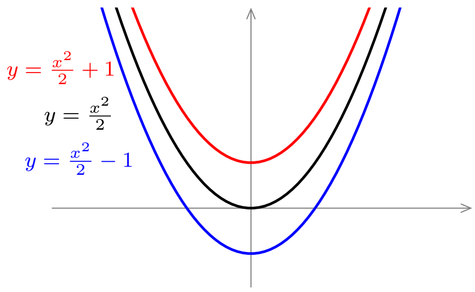
**Remarque :** C'est une condition suffisante mais pas nécessaire. En effet, on verra dans le chapitre 22 qu'il existe des fonctions dérivables qui ne sont pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Si $f$ désigne une telle fonction, alors $f'$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ mais admet $f$ pour primitive.

**Proposition.** *Si $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ admet une primitive sur $I$, alors elle en admet une infinité. De plus toutes les primitives de $f$ sur $I$ sont égales à une constante additive près, c'est-à-dire, $G$ est une primitive de $f$ sur $I$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que*

$$\forall x \in I, \qquad G(x) = F(x) + \lambda.$$

Démonstration. Si il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $G = F + \lambda$, alors $G$ est dérivable sur $I$ et $G' = F' = f$. Ainsi $G$ est une primitive de $F$ sur $I$. Réciproquement, soit $G$ une primitive de $f$ sur $I$. La fonction $F - G$ est alors dérivable sur $I$ et $(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$. Par conséquent $F - G$ est une fonction constante. □

**Remarque :** Géométriquement, quand on étudie les primitives à valeurs réelles, cela signifie que les graphes des différentes primitives d'une fonction sont obtenus les uns par rapport aux autres par translation verticale. Ci-dessous le graphe de trois primitives de la fonction $x \longmapsto x$ :




**Corollaire.** *Soit $f$ une fonction admettant une primitive sur $I$. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{C}$. Il existe une unique primitive $F$ de $f$ sur $I$ prenant la valeur $y_0$ en $x_0$.*

On dit alors que $F$ est la primitive de $f$ sur $I$ prenant la valeur $y_0$ en $x_0$. Géométriquement, cela signifie que par un point du plan (d'abscisse appartenant à $I$ mais d'ordonnée quelconque) passe le graphe d'une et d'une seule primitive de $f$.

Démonstration. Si $G$ est une primitive de $f$ sur $I$, $F : x \longmapsto G(x) + y_0 - G(x_0)$ est une primitive de $F$ qui prend la valeur $y_0$ en $x_0$. D'où l'existence. Si $\widetilde{F}$ est une autre primitive de $f$ prenant la valeur $y_0$ en $x_0$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\widetilde{F} = F + \lambda$. En évaluant en $x_0$, on obtient que $y_0 = y_0 + \lambda$ donc $\lambda = 0$ et donc $\widetilde{F} = F$. D'où l'unicité. □

## 2) Primitives usuelles

**Proposition (primitives des fonctions usuelles).**

| *fonction $f$* | *une primitive $F$ de $f$ sur un intervalle de $D_f$* |
|---|---|
| $x \longmapsto \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ | $x \longmapsto \lambda x$ |
| $x \longmapsto x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ | $x \longmapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ |
| $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ | $x \longmapsto \ln(\lvert x \rvert)$ |
| $\ln$ | $x \longmapsto x\ln(x) - x$ |
| $\exp$ | $\exp$ |
| $\cos$ | $\sin$ |
| $\sin$ | $-\cos$ |

| | |
|---|---|
| $\tan$ | $x \longmapsto -\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$ |
| $1+\tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$ | $\tan$ |
| $\mathrm{ch}$ | $\mathrm{sh}$ |
| $\mathrm{sh}$ | $\mathrm{ch}$ |
| $\mathrm{th}$ | $x \longmapsto \ln(\mathrm{ch}(x))$ |
| $1-\mathrm{th}^2 = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2}$ | $\mathrm{th}$ |
| $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ | $\mathrm{Arctan}$ |
| $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\mathrm{Arcsin}$ |

Pour une primitive de $x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1\,;1[$, on peut prendre $-\mathrm{Arcsin}$ ou $\mathrm{Arccos}$.

***Exemples :***

- *$x \longmapsto x^\pi$ admet* $\qquad$ *pour primitive sur* $\qquad$
- *$x \longmapsto \dfrac{1}{x^{2025}}$ admet* $\qquad$ *pour primitive sur* $\qquad$
- *$x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ admet admet* $\qquad$ *pour primitive sur* $\qquad$
- *$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt[6]{x}}$ admet* $\qquad$ *pour primitive sur* $\qquad$

## 3) Linéarité

Il découle immédiatement de la linéarité de la dérivation que :

**Proposition (linéarité).** *Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des complexes. Si $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions de $I$ dans $\mathbb{C}$ admettant des primitives respectives $F_1, \dots, F_n$ sur $I$, alors $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k F_k$ est une primitive de $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$ sur $I$.*

***Exemples :***

- *$x \longmapsto \dfrac{3}{1+x^2} - \dfrac{2}{x+4}$ admet* $\qquad$ *pour primitive sur $]-4\,;+\infty[$.*
- *Si $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n$ sont des complexes, alors la fonction polynomiale $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ admet la fonction polynomiale* $\qquad$ *pour primitive sur $\mathbb{R}$.*

**Remarques :**

- Il découle de la linéarité que, si $f_1$ et $f_2$ sont des fonctions de $I$ dans $\mathbb{R}$ admettant des primitives $F_1$ et $F_2$ respectivement sur $I$, alors $f_1 + \mathrm{i} f_2$ admet $F_1 + \mathrm{i} F_2$ pour primitive sur $I$. Autrement dit, si $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue, primitiver $f$ revient à primitiver $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Réciproquement, supposons que $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ admet une primitive $F$ sur $I$. Alors $F$ est dérivable sur $I$ donc $\mathrm{Re}(F)$ et $\mathrm{Im}(F)$ aussi et on a

$$\mathrm{Re}(F)' = \mathrm{Re}(F') = \mathrm{Re}(f) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(F)' = \mathrm{Im}(F') = \mathrm{Im}(f).$$

Autrement que $\mathrm{Re}(F)$ et $\mathrm{Im}(F)$ sont des primitives de $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ respectivement.

Il ne faut pas non plus toujours linéariser tête baissée. Les fonctions du type $\sin\cos^n$ ou $\cos\sin^n$ sont les dérivées de $-\frac{\cos^{n+1}}{n+1}$ et $\frac{\sin^{n+1}}{n+1}$ respectivement.

- Dans le paragraphe suivant, nous allons étudier les primitives de fonctions se présentant comme un produit. C'est beaucoup plus difficile comme on le verra. Ainsi, quand on est capable de réécrire une fonction comme une somme de fonctions dont on connaît une primitive, il est préférable de le faire. C'est notamment le cas des fonctions du type $\cos^p \sin^q$ (avec $p$ et $q$ des entiers naturels différents de 1) puisque ces expressions peuvent se linéariser.

*Par exemple, on a vu dans le chapitre 6 que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\cos^4(x)\sin^2(x) = \frac{1}{32}\left(2 + \cos(2x) - 2\cos(4x) - \cos(6x)\right).$$

*Ainsi, une primitive de $x \longmapsto \cos^4(x)\sin^2(x)$ est*

On reparlera de ce type de primitives dans la paragraphe V.4.b.

C'est aussi le cas des fonctions où une petite manipulation « du type $+1-1$ » permet de retomber sur une primitive usuelle.

*Par exemple :*

— *Cherchons une primitive de $\tan^2$ sur*

Y penser avant de se lancer dans les méthodes que l'on verra dans le paragraphe V.

— *Cherchons une primitive de $x \longmapsto \dfrac{x}{1+x}$ sur*

— *Cherchons une primitive de $x \longmapsto \dfrac{x^2}{1+x^2}$ sur*

## 4) Primitive d'une fonction se présentant comme un produit

Lorsqu'une fonction est un produit, un quotient ou une composée de fonctions usuelles (et qu'elle est dérivable), on arrive toujours à calculer sa dérivée à l'aide des formules usuelles. Mais calculer une primitive d'une fonction est très difficile en général.

Pour trouver une primitive d'une fonction qui se présente sous la forme d'une somme ou d'une soustraction de produits, on peut essayer de reconnaître qu'elle est la dérivée d'un produit ou d'un quotient.

***Exemple :***

- *La fonction $x \longmapsto \left(\dfrac{1}{x} + \ln(x)\right)\mathrm{e}^x$ admet*     *pour primitive sur*
- *La fonction $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{x} - \dfrac{\sin(x)}{x^2}$ admet*     *pour primitive sur*

Si elle se présente sous la forme d'un produit ou d'un quotient, on pourra faire une intégration par parties (cf. paragraphe III). Mais avant cela, on peut essayer de reconnaître qu'elle est la dérivée d'une composée. C'est un principe si important que nous en faisons une proposition :

**Proposition.** *Soit $u$ une fonction dérivable sur $I$ et à valeurs réelles. Soit $g$ une fonction admettant une primitive $G$ sur un intervalle $J$ contenant $u(I)$. Alors la fonction $f = u' \times g \circ u$ admet $G \circ u$ pour primitive sur $I$.*

Démonstration. La fonction $G \circ u$ est dérivable sur $I$ et on a

$$(G \circ u)' = u' \times G' \circ u = u' \times g \circ u = f. \qquad \square$$

Dans la pratique, $g$ est souvent une fonction usuelle. Par exemple, sans préciser l'intervalle (il faut voir ça au cas par cas) :

En particulier une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$.

- Si $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, une primitive de $u'u^\alpha$ est $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.
- Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln(|u|)$.
- Une primitive de $u'\mathrm{e}^u$ est $\mathrm{e}^u$.
- Une primitive de $u'\cos(u)$ est $\sin(u)$.
- Une primitive de $u'\sin(u)$ est $-\cos(u)$.
- Une primitive de $\frac{u'}{1+u^2}$ est $\operatorname{Arctan}(u)$.

⚠ Il faut donc absolument « chercher le $u'$ » (quitte à multiplier/diviser par une constante non nulle) sinon cela ne fonctionne pas.

*Par exemple :*

- ⋆ $x \longmapsto -2x\mathrm{e}^{-x^2}$ *admet* $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ *pour primitive sur* $\mathbb{R}$ *(on a bien une fonction de la forme «* $u' \times \mathrm{e}^u$ *» avec* $u : x \longmapsto -x^2$*).*
- ⋆ $x \longmapsto x\mathrm{e}^{-x^2}$ *admet* $x \longmapsto -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$ *pour primitive sur* $\mathbb{R}$ *(À la constante mutlipli-cative* $-2$ *près, on a bien une fonction de la forme «* $u' \times \mathrm{e}^u$ *» avec* $u : x \longmapsto -x^2$*).*
- ⋆ *Qu'en est-il de* $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$*. On pourrait penser à* $x \longmapsto -\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$ *mais ça ne marche pas. En fait on ne sait pas calculer de primitive de* $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ *avec cette méthode puisqu'il « manque le* $u'(x)$ *» devant !*

D'ailleurs, on peut montrer (mais c'est très difficile) qu'aucune primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ ne peut s'écrire à l'aide des fonctions usuelles.

Le seul cas de figure où l'on peut « faire apparaître $u'$ » sans problèmes et celui où $u'$ est une constante, c'est-à-dire où $u$ est affine : si $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, alors

$$\boxed{\text{une primitive de } x \longmapsto g(ax+b) \text{ est } x \longmapsto \frac{G(ax+b)}{a}.}$$

***Exemples :***

- *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Cherchons une primitive de* $x \longmapsto \frac{x}{(1+x^2)^\alpha}$ *sur* $\mathbb{R}$*.*

- *Soit* $a \in \mathbb{R}$*. Cherchons une primitive de* $x \longmapsto \frac{1}{x^2+a^2}$ *sur* $\mathbb{R}$*.*

- *La fonction* $x \longmapsto \dfrac{(\ln(x))^5}{x}$ *admet* $\qquad$ *pour primitive sur* $\qquad$
- *Cherchons une primitive de* $\cos^2$ *sur* $\mathbb{R}$.

Et surtout pas $\frac{\cos^3}{3}$ ! Il manque $\cos'$ pour cela. On pense à linéariser $\cos$ (cf. paragraphes I.3 et V.4.b).

Terminons en réécrivant le théorème de dérivation des fonctions du type $\mathrm{e}^{\varphi}$ avec $\varphi$ à valeurs complexes, vu dans le chapitre 6.

**Théorème.** *Soit* $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ *dérivable sur* $I$*. Alors la fonction* $\varphi'\mathrm{e}^{\varphi}$ *admet* $\mathrm{e}^{\varphi}$ *pour primitive sur* $I$*.*

En particulier, si $a \in \mathbb{C}^*$, alors $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}$ admet $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{ax}}{a}$ pour primitive sur $\mathbb{R}$.

***Exemple :*** *Soient* $a$ *et* $b$ *des réels non nuls. Cherchons une primitive de la fonction* $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$.

Le programme impose de connaître la méthode ci-contre pour trouver des primitives de fonctions du type $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ ou $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$

Et en prenant la partie imaginaire on trouve une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$.

### 5) Primitive d'une fonction se présentant comme une composée

On utilise pour cela des changements de variable, cf. paragraphe IV.

### 6) Primitive d'une fonction rationnelle réelle

Cf. paragraphe V.

## II Intégrale d'une fonction continue

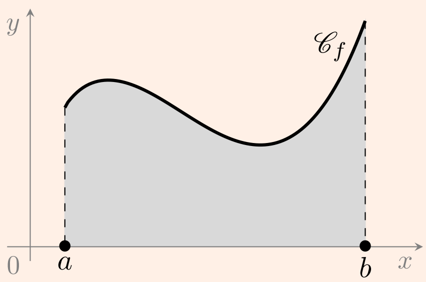
Dans ce paragraphe, $a$ et $b$ désignent des réels.

Lorsque $x$ et $y$ sont réels, on adopte la convention que $[x\,;y]$ désigne le segment $[y\,;x]$ lorsque $y < x$.

### 1) Notion d'intégrale

#### a) Intégrale d'une fonction continue positive

**Définition (intégrale d'une fonction continue positive).** *Supposons que* $a < b$*. Soit* $f$ *est une fonction continue et* <u>*positive*</u> *sur* $[a\,;b]$*. On appelle intégrale de* $f$ *sur* $[a\,;b]$ *(ou de* $a$ *à* $b$*), et on note* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$*, l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de* $f$*, l'axe des abscisses et les droites d'équations* $x = a$ *et* $x = b$ *(colorée en gris sur la figure ci-contre).*




La fonction $f$ s'appelle l'intégrande. Les réels $a$ et $b$ s'appellent les bornes (inférieure et supérieure respectivement) de l'intégrale.

La variable $t$ dans $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est muette. On peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre qui n'est pas $a$ et $b$ (et pas $f$ non plus bien sûr). Ainsi

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

ou encore $\displaystyle\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$ etc.

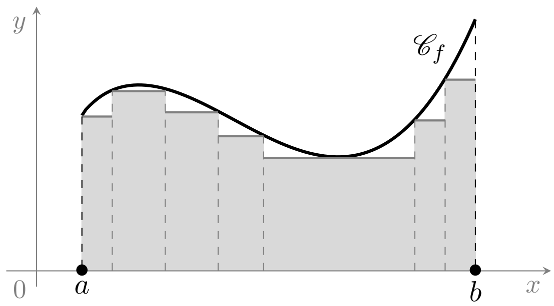
La difficulté technique est de montrer que, quelle que soit la façon dont on approche par des sommes d'aires de rectangles, la valeur limite est toujours la même (d'ailleurs c'est faux en général si la fonction n'est pas continue).

***Exemples :***

- *Si $f$ est la fonction constante égale à $c \in \mathbb{R}_+^*$ sur $[a\,;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire d'un rectangle de longueur $c$ et de largeur $b-a$. Ainsi $\displaystyle\int_a^b c\,\mathrm{d}t = c(b-a)$.*
- *Si $a=0$, $b=1$ et $f : t \longmapsto t$ sur $[0\,;1]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire d'un triangle rectangle de base $1$ et de hauteur $1$. Ainsi $\displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.*

La définition d'une intégrale en tant qu'aire de la surface sous la courbe est donc satisfaisante lorsque c'est celle d'une forme géométrique simple (comme un rectangle ou un triangle). Mais qu'en est-il si c'est l'aire sous la courbe de la fonction carré par exemple ? Ainsi, en général, cette définition en tant qu'aire n'est pas très rigoureuse mathématiquement. Et qu'est-ce que l'aire d'une surface au juste ? La construction rigoureuse de l'intégrale dite de Riemann sera faite dans le chapitre 24. Elle consiste à approcher l'aire sous la courbe de $f$ par la somme d'aires de rectangles (l'aire d'un rectangle étant facile à calculer) :

*Reprenons l'exemple de la fonction $f$ qui illustre la définition ci-dessus. On peut approcher l'aire sous la courbe de $f$ par la somme d'aires de rectangles :*




On fait tendre la largeur de la base des rectangles vers $0$ (et donc le nombre rectangles vers $+\infty$) et on définit l'intégrale de $f$ comme étant la limite de la somme de leurs aires.

### b) Intégrale d'une fonction continue à valeurs réelles

Si $f$ est une fonction définie sur $[a\,;b]$, on définit la partie positive $f^+$ et la partie négative $f^-$ de $f$ : pour tout $x \in [a\,;b]$,

$$f^+(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad f(x) < 0 \\ f(x) & \text{si} \quad f(x) \geqslant 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad f^+(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad f(x) > 0 \\ -f(x) & \text{si} \quad f(x) \leqslant 0 \end{cases}.$$

On remarque que

$$f^+ = \frac{|f|+f}{2}, \qquad f^- = \frac{|f|-f}{2}$$

donc, si $f$ est continue, $f^+$ et $f^-$ aussi.

Ce sont deux fonctions positives sur $[a\,;b]$.

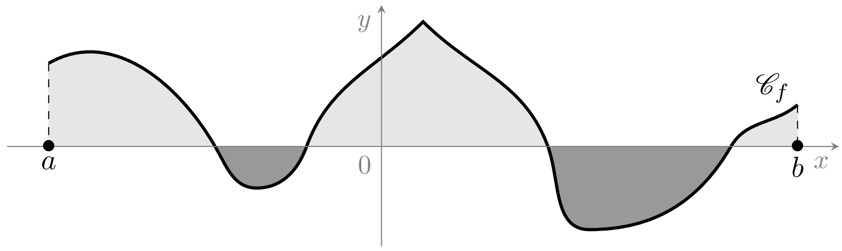
**Définition (intégrale d'une fonction continue).** *Supposons que $a<b$. Soit $f$ est une fonction continue sur $[a\,;b]$ et à valeurs réelles. L'intégrale de $f$ sur $[a\,;b]$ (ou de $a$ à $b$) est définie par :*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f^+(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f^-(t)\,\mathrm{d}t.$$

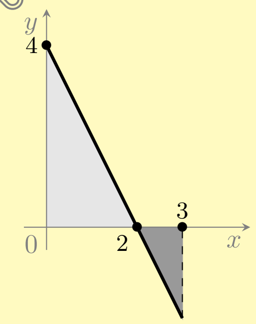
On parle d'aire algébrique, par opposition à l'aire géométrique.

Autrement dit $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de $f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ en comptant négativement les aires des surfaces en dessous de l'axe des abscisses.

*Par exemple, si $f$ est la fonction dont la courbe représentative est*




*alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est la somme des aires des surfaces colorées en gris clair à laquelle on retranche la somme des aires des surfaces colorées en gris foncé.*




***Exemple :** La fonction $f : t \in [0\,;3] \longmapsto 4-2t$ est positive sur $[0\,;2]$ et négative sur $[2\,;3]$.*

- *L'intégrale de $f$ sur $[0\,;2]$ est l'aire d'un triangle rectangle de hauteur $4$ et de largeur $2-0=2$, c'est-à-dire $\dfrac{4\times 2}{2}=4$.*
- *L'intégrale de $f$ sur $[2\,;3]$ est l'opposé de l'aire d'un triangle rectangle de hauteur $2$ et de largeur $3-2=1$, c'est-à-dire $\dfrac{2\times 1}{2}=1$.*

*Ainsi $\displaystyle\int_0^1 (4-2t)\,\mathrm{d}t = 4-1=3$.*

On étend aussi la notion d'intégrale dans le cas où la borne inférieure est plus grande que la borne supérieure :

**Définition.** *Supposons que $a>b$. Soit $f$ une fonction continue sur $[b\,;a]$ et à valeurs réelles. On pose*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Il reste à définir l'intégrale dans le cas où les deux bornes sont égales. Le choix s'impose de lui même :

- Si $a=b$, l'aire algébrique de la surface délimitée par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est nulle.
- Si $a=b$, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$ si et seulement si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

**Définition.** *Si $f$ est définie en un point $c$ et à valeurs réelles, on pose $\displaystyle\int_c^c f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.*

### c) Intégrale d'une fonction continue à valeurs complexes

Rappelons que la continuité d'une fonction à valeurs complexes est équivalente à la continuité de sa partie réelle et de sa partie imaginaire. Ces deux dernières étant à valeurs réelles, on peut définir l'intégrale de cette fonction ainsi :

On n'impose rien sur l'ordre de $a$ et $b$ ici.

**Définition.** *Soient $a$ et $b$ des réels. Soit $f$ une fonction continue sur $[b\,;a]$ et à valeurs complexes. On pose*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t.$$

## 2) Lien entre primitives et intégrales

### a) Le théorème fondamental de l'analyse

On admet le théorème suivant qui fait le lien entre intégrales et primitives :

> Et, comme $f$ est continue sur $I$, la fonction
> $$x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
> est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$.

**Théorème (fondamental de l'analyse).** *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue sur $I$. Pour tout $a \in I$, la fonction*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right. .$$

*est dérivable sur $I$ et sa dérivée est $f$. Autrement dit il s'agit de la primitive de $f$ sur $I$ qui s'annule en $a$.*

**Remarque :** Pour tous $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{C}$, la fonction $x \longmapsto y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc la primitive de $f$ qui vaut $y_0$ en $x_0$.

### b) Calcul d'intégrales avec une primitive

> Ce résultat ne dépend pas de la primitive choisie. En effet, si $\widetilde{F}$ en est une autre, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que que $\widetilde{F} = F + \lambda$ et alors
> $$\begin{aligned} &F(b) - F(a) \\ &= F(b) + \lambda - (F(a) + \lambda) \\ &= \widetilde{F}(b) - \widetilde{F}(a). \end{aligned}$$

**Théorème.** *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue sur $I$. Si $F$ est une primitive de $f$ sur $I$ alors*

$$\forall (a,b) \in I^2, \qquad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

*On note aussi* $\big[F(t)\big]_a^b = F(b) - F(a)$.

Démonstration. Puisque $F$ et la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ sont deux primitives de $f$ (d'après le théorème précédent) sur $I$, elles sont égales à une constante près : il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall x \in I, \qquad \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) + \lambda.$$

> $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ n'est pas une primitive de $f$ mais un nombre (alors qu'une primitive est une fonction). On en reparle dans le prochain paragraphe.

En évaluant en $a$, on trouve que $0 = F(a) + \lambda$ donc $\lambda = -F(a)$. En évaluant en $b$, on trouve la formule voulue. $\square$

***Exemples :***

> Dans le cas où $c > 0$ et $a < b$, on retrouve le fait que l'aire d'un rectangle de largeur $b - a$ et de longueur $c$ est égale à $c \times (b - a)$.

- $\displaystyle\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t =$
- *Pour tous* $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $\displaystyle\int_a^b c\,\mathrm{d}t =$
- $\displaystyle\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x =$
- $\displaystyle\int_{-1}^{-2} \frac{\mathrm{d}u}{u} =$
- $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x =$
- $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
- $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t =$

- *Soit $(n,k) \in \mathbb{Z}^2$. Calculons $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)t}\,\mathrm{d}t$.*

### c) Notion de primitive générique

Changer la valeur de $a$, donne juste une autre primitive donc change la primitive d'une constante additive.

A chaque fois que l'on a voulu utiliser une primitive de $f$, nous avons dû l'introduire en lui choisissant un nom, ce qui un peu fastidieux. Le théorème fondamental de l'analyse assure justement qu'on peut écrire une primitive avec une intégrale : quel que soit $a \in I$, $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de $f$. La plupart du temps, on cherche juste une primitive donc le choix de $a$ n'a pas d'importance Cela motive la notation suivante :

**Définition.** *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue sur $I$. On note $x \longmapsto \displaystyle\int^x f(t)\mathrm{d}t$ UNE primitive « générique » de $f$.*

***Exemple :*** *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\int^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x, \qquad \int^x t\cos(t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sin(x^2), \qquad \int^x \mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{ch}(x).$$

On peut faire l'analogie avec la congruence modulo un réel : ici c'est une congruence modulo l'ensemble des fonctions constantes. On en reparlera dans le chapitre 16 où nous dirons que $x \mapsto \displaystyle\int^x f(t)\mathrm{d}t$ représente la classe d'équivalence de toutes les primitives de $f$.

⚠ Il faut bien comprendre que cette notation définie UNE primitive à une constante additive près. Elle repose donc sur un abus de notation : le symbole $=$ qui y figure veut plutôt dire « égal à une constante additive près ».

*Par exemple, cette notation permet d'écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\int^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$$

*mais aussi*

$$\int^x t\,dt = \frac{x^2}{2} + 2024.$$

*Cela ne veut pas dire que $0 = 2024$ pour autant mais que $0$ et $2024$ diffèrent d'une constante additive près.*

Il s'agit certes d'un abus de notation mais ce n'est pas pour autant un manque de rigueur.

Ce n'est pas l'unique fois cette année où une égalité pourra dire quelque chose de différent (cf. la notation de Landau dans le chapitre 26).

### d) Fonction définie par une intégrale

Par exemple :

$$G : x \mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

ou

$$G : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

On dit qu'une fonction $G$ est définie par une intégrale sur un ensemble $E$ si, pour tout $x \in E$, $G(x)$ est égale à la valeur d'une intégrale qui « dépend » de $x$. Cette dépendance peut être dans l'intégrande ou dans les bornes (ou les deux !). Le cas d'une dépendance dans l'intégrande sera traité principalement en deuxième année. Nous verrons plusieurs exemples de dépendance dans les bornes dans le chapitre 24. Voyons tout de même le théorème clé puisqu'il permet aussi de mener certains quelques calculs, ce qui nous intéresse dans ce chapitre :

**Théorème.** *Soit $f$ une fonction continue sur $I$ et à valeurs complexes. Soient $u$ et $v$ des fonctions dérivables sur un intervalle $J$ non vide et non réduit à un point et à valeurs dans $I$. La fonction*

$$G : x \in J \longmapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

*est alors dérivable sur $J$ et*

$$\forall x \in J, \qquad G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$$

Démonstration. Comme $f$ est continue sur $I$, elle admet une primitive $F$ sur $I$. Pour tout $x \in J$, le théorème de calcul d'intégrale via une primitive (avec $a = u(x) \in I$ et $b = v(x) \in I$) entraîne que $G(x) = F(u(x)) - F(u(x))$. Comme $u$ et $v$ sont dérivables sur $J$ et à valeurs dans $I$ et comme $F$ est dérivable sur $I$ (car c'est une primitive), $G$ est dérivable sur $J$. On applique alors le théorème de dérivation d'une composition en utilisant le fait que $F' = f$. □

***Exemple :*** *Calculons* $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

## 3) Quelques propriétés des intégrales

On pourrait être tentés de les montrer via le théorème fondamental de l'analyse mais on verra que ce dernier est en fait conséquence de ces propriétés.

Les propriétés des intégrales sont admises et seront montrées dans le chapitre 24.

On se donne $f$ et $g$ deux fonctions à valeurs complexes et continues sur $I$.

### a) La relation de Chasles

On n'a pas forcément $a \leqslant c \leqslant b$.

**Proposition (relation de Chasles).** *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue sur $I$. Pour tout $(a, b, c) \in I^2$ ,*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La relation de Chasles est notamment utile lorsque la fonction que l'on intègre possède des expression différentes sur le domaine d'intégration. C'est le cas dans cet exemple puisque l'expression de $|t-1|$ change selon le signe de $t-1$.

***Exemple :*** *Calculons* $\displaystyle\int_{-2}^{3} |t-1|\,dt$.

Une erreur très grave (mais hélas courante) aurait été de dire que, si $t \geqslant 1$, alors

$$\int_{-2}^{3} |t-1|\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{3} (t-1)\,\mathrm{d}t$$

et, si $t < 1$, alors

$$\int_{-2}^{3} |t-1|\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{3} (1-t)\,\mathrm{d}t$$

La variable $t$ est muette et n'a rien à faire en dehors de l'intégrale.

Par récurrence, nous en déduisons :

**Proposition (relation de Chasles généralisée).** *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue sur $I$. Soit $n$ est un entier supérieur ou égal à $3$. Si $(a_1, \dots, a_n) \in I^n$, alors*

$$\int_{a_1}^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

***Exemple :*** *Si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $f$ est continue sur $[0\,;n]$, alors*

$$\int_{0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

### b) Linéarité de l'intégrale

Il est totalement faux que $\int_a^b f(t) \times g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

**Proposition (linéarité).** *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continues sur $I$. Soit $(a,b) \in I^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Nous avons*

$$\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par récurrence, nous en déduisons :

Pour intervertir l'intégrale et la somme, il est impératif que la somme soit finie (sinon d'autres hypothèses sur la fonction $f$ sont requises et cela sera vu en deuxième année). On ne peut pas non plus intervertir deux intégrales.

**Proposition (linéarité).** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions continues sur $I$ et à valeurs complexes. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des complexes. Nous avons*

$$\forall (a,b) \in I^2, \qquad \int_a^b \left( \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(t) \right) \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t.$$

***Exemple :*** *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

*Nous reverrons cet exemple (et le terminerons) dans les chapitres 24 et 27.*

## III Intégration par parties

La formule d'intégration par parties est particulièrement efficace pour calculer une primitive ou une intégrale d'un produit de deux fonctions.

**Théorème (formule d'intégration par parties – IPP).** *Soient $u$ et $v$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$ et à valeurs complexes. Soient $(a,b) \in I^2$. Alors*

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Il faut penser à une IPP quand on veut calculer une primitive ou une intégrale d'un produit donc l'une des deux fonctions est plus simple quand on la dérive (ce qui est le cas notamment de $\ln$ ou de $\operatorname{Arctan}$). Mais souvent dans une IPP le choix s'impose : on primive la fonction que l'on sait primitiver et on dérive l'autre. Dans le premier exemple ci-contre, on sait primitiver facilement les deux. Si on fait l'IPP dans l'autre sens, on obtient

$$\int_0^1 t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \frac{e}{2} - \int_0^1 \frac{t^2\mathrm{e}^t}{2}\,\mathrm{d}t$$

et on se ramène donc à une intégrale plus compliquée que celle initiale. En général on dérive les polynômes pour se ramener à une constante, en faisant éventuellement plusieurs IPP.

Démonstration.

$\square$

**Remarques :**

- Avec les notations du théorème, on a évidemment
$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$
Peu importe leur nom : on dérive l'une, on intègre l'autre, on met un signe $-$ et on met les deux primitives dans le crochet.
- Si on veut calculer une primitive générique, alors ce résultat devient, pour tout $x \in I$,
$$\int^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = u(x)v(x) - \int^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

***Exemples :***

- *Calculons* $\displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.
- *Calculons* $\displaystyle\int_0^1 t^2\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.
- *Cherchons une primitive de* $\operatorname{Arctan}$ *sur* $\mathbb{R}$ *(elle est bien continue sur* $\mathbb{R}$*).*

Dans cet exemple, on utilise une astuce classique : si $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$, alors une IPP avec $u : t \mapsto t$ et $v = f$ donne

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_a^b 1 \times f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[tf(t)\right]_a^b - \int_a^b tf'(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

- *Calculons* $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-t}\cos(t)\,\mathrm{d}t$.

Autre méthode pour calculer cette intégrale (on l'a vu dans le paragraphe I.4) :

$$\begin{aligned}I &= \mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}}{\mathrm{i}-1}\right]_0^{\pi}\right)\\ &= \cdots\end{aligned}$$

Lorsqu'on fait deux IPP consécutives, à la deuxième on dérive (resp. intègre) toujours la fonction que l'on a dérivée (resp. intégrée) à la première... sinon on revient en arrière.

- *Un immense classique : les intégrales de Wallis. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on pose*

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$$

*(cette intégrale existe puisque* $\cos^n$ *est continue sur* $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$*).*

Quand on rencontre une intégrale qui dépend d'un paramètre en exposant, il faut tout de suite penser à une IPP pour faire descendre ou augmenter le paramètre et obtenir des relations de récurrence. C'est très très classique.

Grand classique déjà vu dans le paragraphe II.4 du chapitre 7 : le produit des impairs sur le produit des pairs. On multiplie au numérateur par tous les pairs manquants et on compense.

## IV Changement de variable

On dit que l'on effectue le changement de variable $t = \varphi(u)$.

**Théorème (formule de changement de variable).** *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue sur $I$. Soit $J$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $J$ telle que $\varphi(J) \subset I$. Pour tout $(\alpha, \beta) \in J^2$,*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Démonstration.

$\square$

**Remarques :**

- Si on veut calculer une primitive, alors ce résultat devient, pour tout $x \in J$,

$$\int^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int^{x} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

  Il y a quatre étapes dans un changement de variable :

  ⋆ Trouver le bon changement de variable ($t = \varphi(u)$ ici)

  ⋆ Remplacer l'ancienne variable d'intégration ($t$ ici) dans l'intégrale par la nouvelle ($u$ ici). Les deux variables ne doivent **jamais** cohabiter dans une même intégrale !

  ⋆ Remplacer l'élément différentiel (le $\mathrm{d}t$).

  ⋆ Remplacer les bornes.

On écrit, par abus de notation (car ce n'est pas très rigoureux) que

$$\mathrm{d}t = \varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

- La formule de changement de variable peut s'utiliser dans les deux sens :
  - ⋆ Ou bien on reconnaît directement une intégrale d'une fonction écrite sous la forme $u \longmapsto f(\varphi(u))\varphi'(u)$ et on l'applique de droite à gauche. Dans ce cas la nouvelle variable ($t$ ici) s'exprime en fonction de l'ancienne ($u$ ici) et les bornes deviennent les images des bornes par $\varphi$.
  - ⋆ Ou bien on est en présence d'une intégrale écrite sous la forme $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et on l'applique de gauche à droite. On exprime alors l'ancienne variable ($t$ ici) en fonction de la nouvelle ($u$ ici) et les bornes deviennent des **antécédents** des bornes par $\varphi$, c'est-à-dire que l'on cherche **un** antécédent $\alpha$ de $a$ par $\varphi$, **un** antécédent $\beta$ de $b$ par $\varphi$ et on a $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t$.

    Dans le cas où $\varphi$ est bijective de $J$ dans $I$, on a
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

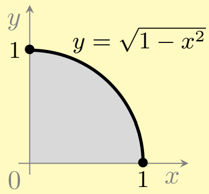
L'erreur classique est de considérer les images de $a$ et $b$ par $\varphi$ au lien d'antécédents. Pour ne pas se tromper, on écrit « si $t$ va de $\alpha$ à $\beta$, alors $t = \varphi(u)$ va de $\varphi(\alpha) = a$ à $\varphi(\beta) = b$ ».

Contrairement à une légende répandue, il n'est pas nécessaire que la fonction $\varphi$ soit bijective mais :
- Cela devra être le cas l'an prochain pour les changements de variables dans les intégrales généralisées.
- La bijectivité de $\varphi$ est plus pratique pour la recherche d'antécédents lorsque l'on veut calculer des primitives.

***Exemples :***

- *Calculons* $\displaystyle\int_{-1}^{4} \frac{x}{\sqrt{3x+4}}\,\mathrm{d}x$ *avec le changement de variable affine* $t = 3x+4$

C'est l'aire d'un quart de disque de rayon 1.




- *Calculons* $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ *avec le changement de variable* $x = \sin(t)$.

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en faisant le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - u$ dans l'intégrale de Wallis (cf. paragraphe précédent), on obtient :*

- *Cherchons une primitive de* $x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ *sur* $\mathbb{R}$.

- *Cherchons une primitive de $x \longmapsto \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$ sur $\mathbb{R}_+$.*

Comme on vient de le voir, il arrive qu'il soit plus naturel d'exprimer la nouvelle variable en fonction de la nouvelle (par exemple $t = \varphi(x)$ au lieu du contraire). Cela peut être une source d'erreur.

Lorsqu'on fait un changement de variable, on n'écrit **jamais** d'intégrale présentant les deux variable à la fois.

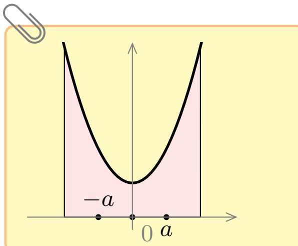
*Par exemple considérons l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. On pourrait être tenté d'effectuer le changement de variable $u = t^2$. On a « $\mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t$ ». On n'écrit surtout pas $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \mathrm{e}^{-u}\,\frac{\mathrm{d}u}{2t}$ mais plutôt $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-u}\,\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}$. Problème : la fonction que l'on intègre n'est pas continue sur $[0\,;1]$. C'est normal puisque le « vrai » changement de variable est $t = \sqrt{u}$ et la fonction racine carrée n'est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;1]$. Il faudrait contourner ce problème autrement (cela sera vu en deuxième année).*

Malgré ce problème, pour les applications pratiques, le programme indique qu'il n'est pas demandé de rappeler les hypothèses de régularité lorsque l'on fait une IPP ou un changement de variable.

Dans ce cas, on commence par dire que $x = \varphi^{-1}(t)$ pour exprimer l'ancienne variable en fonction de la nouvelle... si $\varphi^{-1}$ a un sens bien sûr et est de classe $\mathscr{C}^1$.

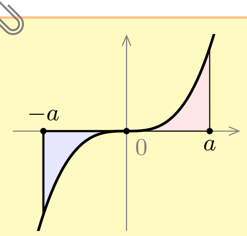
**Corollaire (intégrales et parité).** *Soient $a > 0$ et $f$ une fonction continue sur $[-a\,;a]$ et à valeurs complexes.*

- *Si $f$ est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.*
- *Si $f$ est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.*




Démonstration. La relation de Chasles entraîne que

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$




En faisant le changement de variable $x=-t$ ($t \longmapsto -t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,a]$) dans la première intégrale, nous obtenons

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{a}^{0} f(-x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(-x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{0}^{a} \big(f(-x)+f(x)\big)\,dx.$$

On conclut en remarquant que, pour tout $x \in [0\,;a]$, $f(-x)+f(x) = 2f(x)$ ou $0$ si $f$ est paire ou impaire respectivement. $\square$

# V Primitive d'une fonction rationnelle réelle

Si on peut trouver $m \in \mathbb{N}^*$ et $g$ rationnelle telle que $f : x \mapsto x^{m-1}g(x^m)$, alors il est plus simple de commencer par faire le changement de variable $t = x^m$ avant de faire un développement en éléments simples.

Soit $f$ une fonction rationnelle à valeurs réelles. Pour en déterminer une primitive, on commence par la décomposer en éléments simples (cf. chapitre 9) : elle s'écrit comme la somme d'une fonction polynomiale (on a déjà vu comment la primitiver) et d'une combinaison linéaire de fonctions du type :

$$x \longmapsto \frac{1}{(x-r)^n} \qquad \text{et} \qquad x \longmapsto \frac{\lambda x+\mu}{(ax^2+bx+c)^n},$$

avec $a \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(r,b,c,\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^5$ tels que $\Delta = b^2-4ac < 0$.

## 1) Primitive de $x \mapsto 1/(x-r)^n$

Si on a plutôt une fonction rationnelle du type

$$x \mapsto \frac{1}{(ax+b)^n},$$

avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, il suffit de factoriser par $a^n$ et de poser $r = -\frac{b}{a}$ pour se ramener au cas décrit ci-contre. Mais on peut aussi laisser cette forme sans oublier de diviser par $a$ au moment de primitiver.

Soient $r \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $n \geqslant 2$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-r)^n} = (x-r)^{-n}$ admet

$$x \longmapsto \frac{(x-r)^{-n+1}}{-n+1} = -\frac{1}{(n-1)(x-r)^{n-1}}$$

  pour primitive sur tout intervalle de $\mathbb{R}\backslash\{r\}$.
- Si $n=1$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-r)^n} = \dfrac{1}{x-r}$ admet

$$x \longmapsto \ln(|x-r|)$$

  pour primitive sur tout intervalle de $\mathbb{R}\backslash\{r\}$.

***Exemple :*** *Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On a déjà vu qu'une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+a^2}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{a}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{a}\right)$. Qu'en est-il de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-a^2}$ sur un intervalle de $\mathbb{R}\backslash\{-a;a\}$ ?*

La démarche suivante doit être reproduite systématiquement. Hors de question d'apprendre par cœur le résultat et de le balancer sans preuve.

### 2) Primitive de $x \mapsto 1/(ax^2+bx+c)$

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b,c) \in \mathbb{R}^2$.

- Si $\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0$, alors il y a une ou deux racines donc on factorise le dénominateur, on décompose en éléments simples (dans le cas de deux racines simples seulement) et on se retrouve dans le cas du paragraphe précédent.
- Supposons que $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Notons

$$g : x \longmapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}.$$

Pour déterminer une primitive de $g$, on met le trinôme sous forme canonique : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2 + 2\frac{bx}{2a} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right).$$

On peut aussi faire le changement de variable $t = \frac{x}{B} + \frac{b}{2aB}$ dans une primitive générique pour simplifier un peu.

Notons $B = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et factorisons par $B^2$ : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$ax^2+bx+c = aB^2\left(1 + \left(\frac{x}{B}+\frac{b}{2aB}\right)^2\right)$$

et donc

$$g(x) = \frac{1}{aB}\,\frac{\frac{1}{B}}{1+\left(\frac{x}{B}+\frac{b}{2aB}\right)^2}.$$

On reconnaît, à une constante près, une fonction du type $\frac{u'}{1+u^2}$.

Une primitive de $g$ sur $\mathbb{R}$ est donc $x \longmapsto \dfrac{1}{aB}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{B}+\frac{b}{2aB}\right)$.

Ce cas de figure n'est pas officiellement au programme mais tout à fait abordable et représente un bon entraînement de calculs d'intégrales.

### 3) Primitive de $x \mapsto (\lambda x+\mu)/(ax^2+bx+c)^n$

Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(b,c,\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\Delta = b^2-4ac < 0$. Notons

$$g : x \longmapsto \frac{\lambda x+\mu}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

**Étape 1.** Si $\lambda = 0$, on passe à l'étape 2 directement. Si $\lambda \neq 0$, on fait apparaître au numérateur la dérivée de la fonction dans la puissance au dénominateur : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{\lambda}{2a}\,\frac{2ax+\frac{2a\mu}{\lambda}}{(ax^2+bx+c)^n} = \underbrace{\frac{\lambda}{2a}\,\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}}_{h(x)} + A\underbrace{\frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}}_{\varphi(x)},$$

avec $A = \mu - \frac{\lambda b}{2a}$.

On reconnaît, à une constante près, une fonction du type $\frac{u'}{u^n} = u'u^{-n}$.

- Si $n = 1$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int^x h(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{2a}\ln(|ax^2+bx+c|)$$

- Si $n \geqslant 2$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int^x h(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\lambda}{2a(n-1)}\,\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}.$$

**Étape 2.** On met le trinôme au dénominateur sous forme canonique comme dans le paragraphe précédent et on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{a^nB^{2n-1}}\,\frac{\frac{1}{B}}{\left(1+\left(\frac{x}{B}+\frac{b}{2aB}\right)^2\right)^n}.$$

**Étape 3.**

- Si $n=1$, alors on a déjà vu au paragraphe précédent que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{aB}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{B}+\frac{b}{2aB}\right).$$

On a $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{B}$.

- Lorsque $n \geqslant 2$ (cas rare en pratique), alors on commence par faire le changement de variable $u = \frac{t}{B} + \frac{b}{2aB}$ dans une primitive générique : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int^x \varphi(t)\,dt = \frac{1}{a^n B^{2n-1}} \int^{\frac{x}{B}+\frac{b}{2aB}} \frac{1}{(1+u^2)^n}\,\mathrm{d}u.$$

On calcule cette dernière intégrale avec des IPP successives : pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, notons

$$F_n(x) = \int^x \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

Nous allons chercher une relation de récurrence sur la suite $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

En pratique, si $n \in \{2;3\}$, on ne recherche pas de relation de récurrence mais simplement à abaisser la puissance une ou deux fois. On raisonne alors plutôt dans l'autre sens : on remplace le $1$ du dénominateur par $1+t^2-t^2$, on utilise la linéarité de l'intégrale et, enfin, on fait une IPP. Cf. exemple plus bas.

Bon d'accord, c'est en train de devenir assez fastidieux... Peu probable qu'on vous en demande autant aux concours.

***Exemples :***

- *Cherchons une primitive de* $f : x \longmapsto \dfrac{x-4}{x^2+2x+5}$.

- *Cherchons une primitive de* $x \longmapsto \dfrac{2x}{(x^2-2x+2)^2}$ *sur* $\mathbb{R}$.

Il n'y a pas de notion de logarithme complexe au programme donc on se ramène à des calculs de primitives des fonctions parties réelles et parties imaginaires.

- *Cherchons une primitive de* $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x-\mathrm{i}}$.

## 4) Fonction polynomiales ou rationnelles en $\cos$ et $\sin$

### a) Méthode générale

On appelle fonction polynomiale de deux variables toute combinaison linéaires de fonctions du type $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^k y^\ell$ avec $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$. Un quotient de deux fonctions polynomiales de deux variables est appelé fonction rationnelle de deux variables. Soit $R$ une telle fonction. Dans ce paragraphe, on souhaite calculer une intégrale ou chercher une primitive de $f : t \longmapsto R(\cos(t), \sin(t))$.

Une méthode qui fonctionne à tous les coups est de faire le changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ (en tenant compte des discontinuités ainsi crées) puisqu'on a alors

$$\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad \text{et} \quad \sin(t) = \frac{2u}{1+u^2}.$$

Dans un tel changement de variable, $t = 2\operatorname{Arctan}(u)$ donc $\mathrm{d}t = \dfrac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$. On obtient alors une intégrale d'une fonction rationnelle et on a vu comment la calculer dans les paragraphes précédents.

***Exemple :*** *Cherchons une primitive de* $x \longmapsto \dfrac{1}{2+\cos(x)}$.

⚠ *Cette notation générique cache une difficulté : cela est valable sur un intervalle où le changement de variable est licite. En fait, on vient de montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, *une primitive de* $x \longmapsto \dfrac{1}{2+\cos(x)}$ *sur* $]-\pi + 2n\pi\,;\pi + 2n\pi[$ *est*

$$x \longmapsto \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C_n,$$

*avec* $C_n$ *une constante qui dépend de* $n$

Pourtant, dans la pratique, on peut souvent éviter ce changement qui est assez fastidieux à mener et peut créer des difficultés artificielles.

### b) Le cas des fonctions polynomiales

Déjà, par linéarité de l'intégrale, on se retrouve à devoir calculer une combinaison linéaire d'intégrales de fonctions du type $t \longmapsto \cos^m(t)\sin^n(t)$ avec $(m, n) \in \mathbb{N}^2$

- Si $m$ est impair, on isole un $\cos$ et on écrit $\cos^{m-1} = (1-\sin^2)^{\frac{m-1}{2}}$. On peut (mais on peut s'en sortir sans) ensuite effectuer le changement de variable $u = \sin(t)$.
- Si $n$ est impair, on isole un $\sin$ et on écrit $\sin^{n-1} = (1-\cos^2)^{\frac{n-1}{2}}$. On peut (mais on peut s'en sortir sans) ensuite effectuer le changement de variable $u = \cos(t)$.
- Si $m$ et $n$ sont pairs, on procède par linéarisation comme on l'a fait dans le paragraphe I.3.

Si $m$ est impair (resp. $n$ impair), on se retrouve donc avec une fonction polynomiale en $\sin$ (resp. $\cos$) multipliée par $\cos = \sin'$ (resp. $-\sin = \cos'$).

***Exemple :*** *Calculons* $\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3(t)\sin^4(t)\,\mathrm{d}t$.

### c) Les règles de Bioche (HP)

Mentionnons des règles qui étaient naguère au programme mais ont disparu alors qu'elles sont bien utiles. Vous pouvez donc ne pas les retenir par cœur même si elles ont le mérite de bien simplifier le calcul de ce type d'intégrales. Pour calculer $\int R(\cos(t), \sin(t))\,\mathrm{d}t$.

Ce n'est pas une astuce : on peut bien démontrer que ces règles fonctionnent toujours.

- Si « $R(\cos(-t), \sin(-t))\,\mathrm{d}(-t) = R(\cos(t), \sin(t))\,\mathrm{d}t$ », alors on fait le changement de variable $u = \cos(t)$.
- Si « $R(\cos(\pi - t), \sin(\pi - t))\,\mathrm{d}(\pi - t) = R(\cos(t), \sin(t))\,\mathrm{d}t$ », alors on fait le changement de variable $u = \sin(t)$.
- Si « $R(\cos(\pi + t), \sin(\pi + t))\,\mathrm{d}(\pi + t) = R(\cos(t), \sin(t))\,\mathrm{d}t$ », alors on fait le changement de variable $u = \tan(t)$.
- Sinon, on fait le changement de variable $u = \tan(\frac{t}{2})$ (cf. paragraphe V.4.a).

On ne dit pas trop fort pourquoi on fait ce changement de variable ci puisque c'est hors programme...

***Exemple :*** *Cherchons une primitive de* $x \longmapsto \dfrac{\sin^3(x)}{2 + \cos(x)}$.