Chapitre 26

Analyse asymptotique

Partie C : Problèmes d'analyse asymptotique

On a déjà vu dans la partie B que les développements limités permettent de calculer des équivalents (et donc des limites) de suites et de fonctions. Voyons dans cette partie plusieurs applications des développements limités et des exemples de problèmes d'analyse asymptotique suggérés par le programme.

I Allure locale des graphes

1) Position relative d'une courbe à un tangente

On a vu que, sous réserve d'existence, le DL à l'ordre 1 en a de f est

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + (x-a)f'(a) + \mathrm{o}\,(x-a)\,.$$

- La partie principale (c'est-à-dire ce qu'il y a avant le o) du DL à l'ordre 1 est donc l'équation de la tangente en a (enfin presque : il manque le $y=$).
- Il en découle que le polynôme de degré inférieur ou égal à 1 qui est la meilleure approximation de f, c'est-à-dire la meilleure approximation affine de f, est la fonction dont le graphe est la tangente au graphe de f en a (quand celle-ci existe, c'est-à-dire quand f est dérivable en a). Cela se voit bien sur le graphe ci-contre, où l'on a représenté le graphe de la fonction $\tan$, ainsi que sa tangente en 0 : au voisinage de 0, la tangente est une bonne approximation du graphe de f, et on vient donc de montrer que c'est la meilleure approximation affine.

En pratique, on calcule les DL successifs de f en a en augmentant l'ordre à chaque fois (sous réserve d'existence), et on s'arrête dès qu'on a un coefficient non nul.

Connaitre un développement limité avec au moins un terme non nul au delà de l'ordre 2 permet de donner la position relative de la courbe de f et de sa tangente en a. En effet, supposons qu'il existe $k \geqslant 2$ et $c_k \neq 0$ tels que

$$f(x) \underset{a}{=} c_0 + c_1(x-a) + c_k(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^k\right)$$

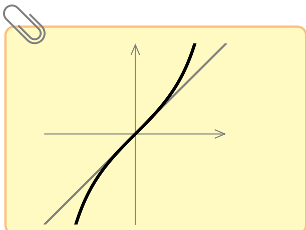
En particulier

$$f(x) - c_0 - c_1(x-a) \underset{a}{=} c_k(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^k\right) \underset{a}{\sim} c_k(x-a)^k.$$

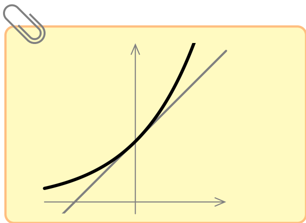
Or, deux quantités équivalentes en a sont de même signe au voisinage de 0, donc $f(x)-c_0-c_1(x-a)$ est du signe de $c_k(x-a)^k$ pour tout x au voisinage de a. Plusieurs cas de figure peuvent se produire :

- Si k est impair, alors $x \longmapsto c_k(x-a)^k$ change de signe en a, le graphe de f est successivement au-dessus puis en dessous de sa tangente, ou le contraire, selon le signe de c_k.

  Par exemple, on a vu que $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$. *Par conséquent, la tangente au graphe de la fonction* $\tan$ *en* 0 *est la droite d'équation* $y = x$, *et* $\tan(x) - x \sim x^3/3$ *: le graphe est au-dessus de la tangente au voisinage de* 0^+, *et en dessous au voisinage de* 0^-, *comme on peut le voir sur le graphe ci-dessus.*



- Si k est pair, alors $x \longmapsto c_k(x-a)^k$ est de signe constant donc, au voisinage de a, $x \longmapsto f(x) - c_0 - c_1(x-a)$ est de signe constant : si $c_k > 0$, alors $c_k(x-a)^k \geqslant 0$ donc le graphe de f est au-dessus de sa tangente en 0, et si $c_k < 0$, alors le graphe de f est en dessous de sa tangente.



Par exemple, on a vu que $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)$. Par conséquent, la tangente au graphe de la fonction $\exp$ en 0 est la droite d'équation $y = 1 + x$, et on a $\mathrm{e}^x - (1+x) \sim x^2/2$: le graphe est au-dessus de la tangente au voisinage de 0, comme on peut le voir sur le graphe ci-contre.

Ainsi, la forme du graphe de f au voisinage de a dépend du premier terme non linéaire (c'est-à-dire d'ordre supérieur ou égal à 2) de son développement limité (encore une fois, sous réserve d'existence).

Tous les résultats de ce paragraphe et du suivant sont des résultats **LOCAUX**, c'est-à-dire qu'ils ne sont valables que sur un voisinage de a (ou de $\pm\infty$ dans le paragraphe suivant). Si on veut prouver un résultat global, par exemple que $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ne peut pas raisonner comme ci-dessus, mais on peut (entre autres) :

- faire une étude de fonction (cf. chapitre 4).
- appliquer la formule de Taylor avec reste intégral ou l'inégalité de Taylor-Lagrange (cf. chapitre 25).
- utiliser de la convexité (cf. chapitre 20).

2) Condition suffisante d'extremum local

Dans le chapitre 19, on a vu une condition **nécessaire** pour qu'un point intérieur a à D soit un extremum local de f : il s'agit de $f'(a) = 0$ (on dit que a est un point critique). En suivant le même principe que dans le paragraphe précédent, on obtient une condition suffisante :

Théorème (condition suffisante d'extremum local). *Soit a un point intérieur de D tel que $f'(a) = 0$. Supposons que f soit de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de a.*

- *Si $f''(a) > 0$, alors f admet en a un minimum local.*
- *Si $f''(a) < 0$, alors f admet en a un maximum local.*

Si $f''(a) = 0$, on ne peut rien conclure immédiatement. Il faut alors faire comme dans le paragraphe précédent : pousser le DL plus loin jusqu'à ce qu'on ait un premier terme non nul au delà de l'ordre 3.

DÉMONSTRATION.

□

3) Détermination d'asymptotes en $\pm\infty$

Les développements limités fournissent aussi un outil efficace pour trouver des asymptotes de fonctions en $\pm\infty$. Le but principal est de déterminer des réels a et b tels que

$$f(x) - (ax+b) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0.$$

La droite d'équation $y = ax + b$ est alors asymptote à la courbe en $\pm\infty$. Le but secondaire est de calculer le signe de $x \longmapsto f(x) - (ax+b)$ au voisinage de $\pm\infty$ pour déterminer la position locale de $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote. Pour cela, on cherche en général $c \in \mathbb{R}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$f(x) - (ax+b) \underset{\pm\infty}{=} \frac{c}{x^k}.$$

On peut par exemple se ramener en 0 en montrant que

$$f\left(\frac{1}{y}\right) - \frac{a}{y} \underset{0^\pm}{=} b + cy^k + \mathrm{o}\left(y^k\right).$$

et utiliser des développement limités pour y arriver.

Exemple ❶ : *Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \sqrt[3]{x^3+2x^2+4x+1}$ admet une asymptote en $+\infty$, et donner les précisions relatives.*

A traiter sur une feuille séparée.

II Développement asymptotique

1) Notion de développement asymptotique

C'est une définition très floue mais on s'en contentera (le programme officiel n'en donne pas).

Un développement asymptotique d'une fonction f ou d'une suite $(u_n)_n$ est une écriture de f ou de $(u_n)_n$ sous la forme d'une somme de fonctions ou de suites (simples) dont les ordres de grandeur sont de plus en plus petits.

Exemples :

- *Les développements limités sont des développement asymptotiques en un réel dont les termes de l'écriture sont polynomiaux.*
- *On a vu dans le paragraphe précédent que*

$$\sqrt[3]{x^3+2x^2+4x+1} \underset{+\infty}{=} x + \frac{2}{3} + \frac{8}{9x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

  Il s'agit d'un développement asymptotique à la précision $\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Contrairement à un DL, un développement asymptotique n'est pas forcément au voisinage d'un réel et les fonctions apparaissant ne sont pas forcément polynomiales.

- *On a vu dans la partie A que*

$$\ln(n!) \underset{+\infty}{=} n\ln(n) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{\ln(n)}{2} - n + \ln(1+\mathrm{o}(1)).$$

  Or $\ln(1+\mathrm{o}(1)) = \mathrm{o}(1)$ donc, en rangeant les termes du plus dominant au plus négligeable,

$$\ln(n!) \underset{+\infty}{=} n\ln(n) - n\frac{\ln(n)}{2} + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \mathrm{o}(1).$$

- *Déterminons un développement asymptotique à 2 termes (sans compter le o) en 0.*

2) Exemples d'une suite et d'une fonction définies par une intégrale

Pour déterminer un équivalent d'une suite ou d'une fonction définie par une intégrale, il suffit souvent d'obtenir un encadrement (en encadrant l'intégrande et utilisant le théorème d'encadrement). Pour obtenir un développement asymptotique avec plusieurs termes, il est naturel d'utiliser une (ou plusieurs) IPP pour faire apparaître une somme.

Exemple ❷ : *Soit f une fonction continue sur $[0\,;1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$. Déterminer un développement asymptotique de I_n quand n tend vers $+\infty$ sous l'hypothèse que f est de classe $\mathscr{C}^1$ puis sous l'hypothèse que f est de classe $\mathscr{C}^2$.*

A traiter sur une feuille séparée.

Exemple ❸ : *Posons $\varphi : x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$ puisque, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $[0\,;1]$. Déterminer un développement asymptotique de φ à la précision $\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$ en $+\infty$.*

A traiter sur une feuille séparée.

3) Un exemple de suite définie par récurrence

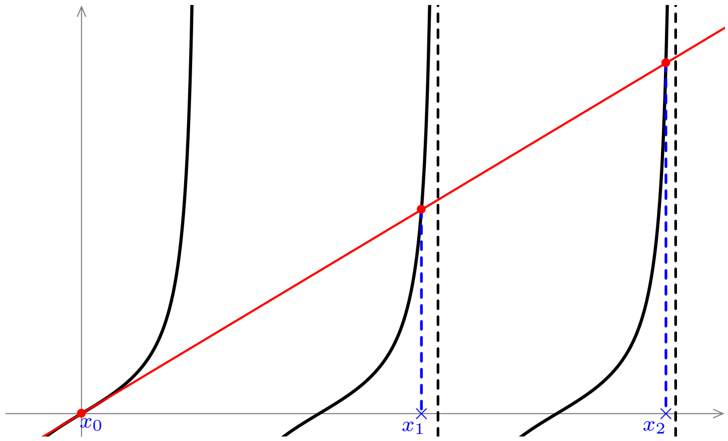
Pour trouver un développement asymptotique pour ce type de suites (et aussi pour des suites définies implicitement ou des fonctions réciproques, cf. paragraphes précédents). la méthode est la suite : on trouve un équivalent, on soustrait l'équivalent, on injecte dans l'équation, on retrouve un équivalent, que l'on soustrait puis on injecte et ainsi de suite.

Exemple ❹ : *On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$. Déterminer un développement asymptotique de u_n à la précision $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ quand n tend vers $+\infty$.*

A traiter sur une feuille séparée.

4) Un exemple de suite définie implicitement

Exemple ❺ : *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'équation $\tan(x) = x$ admet une unique solution x_n sur l'intervalle $\left]n\pi\,; \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[$.*



Déterminer ensuite un développement asymptotique de x_n à la précision $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

A traiter sur une feuille séparée.

5) Un exemple de fonction réciproque

La fonction W est appelée (branche principale de la) fonction de Lambert.

Exemple ❻ : *Montrer que la fonction $f : x \longmapsto x\mathrm{e}^x$ réalise une bijection de $[-1\,;+\infty[$ sur un intervalle J à préciser puis lister plusieurs propriétés de sa bijection réciproque que l'on note W. Déterminer ensuite un DL de W en 0 à l'ordre 4 puis un développement asymptotique de W en $+\infty$ à trois termes (en plus du o).*

A traiter sur une feuille séparée.