Chapitre 4

Fonctions

Partie C : Premières fonctions usuelles

Dans cette partie, nous faisons un catalogue de toutes les fonctions usuelles du programme... à l'exception des fonctions trigonométriques qui seront étudiées dans le chapitre 5. Nous allons commencer à démontrer le maximum de résultats sur ces fonctions en utilisant les outils de la partie B (mais nous devrons tout de même en admettre certains).

I Fonctions algébriques usuelles

Dans ce paragraphe, nous étudions les propriétés des fonctions définies à l'aide des objets introduits dans le chapitre 3 : les fonctions puissances entières, polynomiales, rationnelles, racines, valeur absolue et partie entière.

1) Les fonctions puissances entières

Si $n = 2$, c'est la fonction carré. Si $n = 3$, c'est la fonction cube. Si $n = -1$, c'est la fonction inverse. Si $n = 0$, c'est la fonction constante ou égale à 1 et il n'y a pas grande chose à dire de plus.

Définition. *Si $n \in \mathbb{Z}$, alors $x \longmapsto x^n$ est appelée fonction puissance $n^{\text{ième}}$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}$ et sur $\mathbb{R}^*$ si $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$.*

a) Cas où $n \in \mathbb{N}^*$

Nous admettons les deux propositions suivantes (qui seront montrées dans les chapitres 21 et 22) :

Ce sont des proposition très faciles à montrer mais elles demandent tout de même d'avoir défini proprement le concept de limite.

Proposition (limite et continuité). *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \longmapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$ et on a*

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Proposition (dérivabilité). *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \longmapsto x^n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto nx^{n-1}$.*

Proposition (parité et variations). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

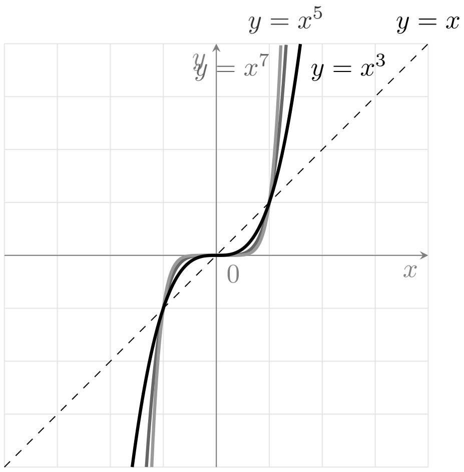
- *Si est pair, alors la fonction $x \longmapsto x^n$ est paire sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.*
- *Si est impair, alors la fonction $x \longmapsto x^n$ est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Les propriétés de parité découlent du fait que $(-1)^n = 1$ si n est pair et -1 si n est impair. Les propriétés de monotonie découlent des propriétés de passage à la puissance dans une inégalité (cf. chapitre 3). □

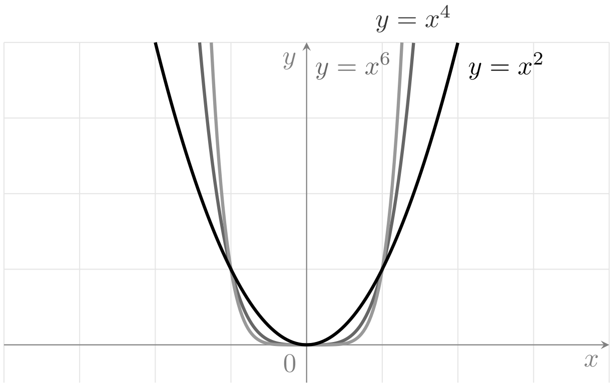
Proposition (convexité). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

- *Si est pair, alors la fonction $x \longmapsto x^n$ est convexe sur $\mathbb{R}$.*
- *Si $n \geqslant 3$ est impair, alors la fonction $x \longmapsto x^n$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$, concave sur $\mathbb{R}_-$ et admet un point d'inflexion en 0.*

Démonstration. La fonction $f_n : x \longmapsto x^n$ est deux fois dérivable et $f_n'' : x \longmapsto n(n-1)x^{n-2}$. Le signe de f_n'' permet de conclure (elle ne s'annule en 0 en changeant de signe que lorsque n est impair) $\square$



cas où $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$.



cas où $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

b) Cas où $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$

Proposition (limite et continuité). *Pour tout $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$, la fonction $x \longmapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et on a*

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^n = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^-} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$. Sur $\mathbb{R}^*$, la fonction $f_n : x \longmapsto x^n$ est l'inverse de la fonction $g_n : x \longmapsto x^{-n}$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$.

- Comme $-n \in \mathbb{N}^*$, g_n est continue sur $\mathbb{R}$ donc f_n aussi sur $\mathbb{R}^*$ par inverse.
- Comme $-n \in \mathbb{N}^*$, g_n est continue en 0 donc $g_n(x) \xrightarrow[x\to 0]{} g_n(0) = 0$. On a donc

$$\lim_{x\to\pm\infty} g_n(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} g_n(x) = 0^+ \qquad \lim_{x\to 0^-} g_n(x) = \begin{cases} 0^+ & \text{si } n \text{ pair} \\ 0^- & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Les limites de f_n découlent donc des propriétés d'inverse de limites. $\square$

Proposition (dérivabilité). *Pour tout $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$, la fonction $x \longmapsto x^n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto nx^{n-1}$.*

Démonstration. On reprend les notations de la démonstration précédente. Puisque $-n \in \mathbb{N}^*$, g_n est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. On a $g_n' : x \longmapsto (-n)x^{-n-1}$. Puisque $f_n = \dfrac{1}{g_n}$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f_n'(x) = -\frac{g_n'(x)}{(g_n(x))^2} = -\frac{(-n)x^{-n-1}}{(x^{-n})^2} = nx^{n-1}.$$

$\square$

Proposition (parité et variations). *Soit $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$.*

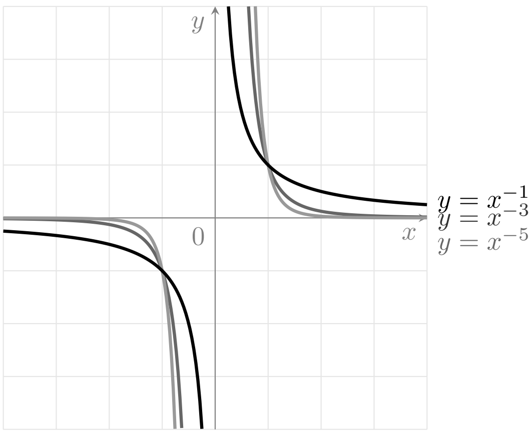
- *Si n est pair, alors la fonction $x \longmapsto x^n$ est paire sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.*
- *Si n est impair, alors la fonction $x \longmapsto x^n$ est impaire sur $\mathbb{R}^*$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$.*

Démonstration. Les propriétés de parité découlent du fait que $(-1)^n = 1$ si n est pair et -1 si n est impair. Les propriétés de monotonie découlent des propriétés de passage à la puissance dans une inégalité (cf. chapitre 3). $\square$

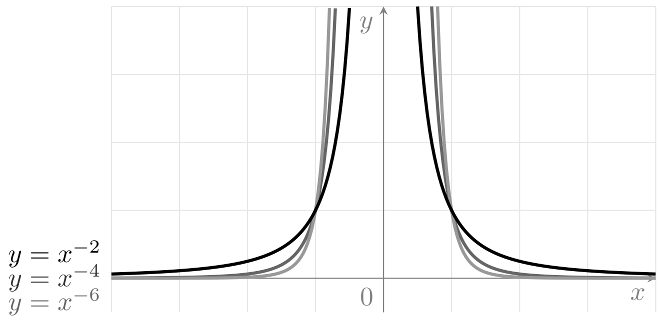
Proposition (convexité). *Soit $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$.*

- *Si n est pair, alors la fonction $x \longmapsto x^n$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.*
- *Si n est impair, alors la fonction $x \longmapsto x^n$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ et concave sur $\mathbb{R}_-^*$.*

Démonstration. La fonction $f_n : x \longmapsto x^n$ est deux fois dérivable et $f_n'' : x \longmapsto n(n-1)x^{n-2}$. Le signe de f_n'' permet de conclure. $\square$



cas où $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$.



cas où $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$.

2) Les fonctions polynomiales

a) Définition et premières propriétés algébriques

On ne dit pas dans cette définition que $a_n \neq 0$ ni même que les réels $a_0, a_1, \ldots, a_p$ ne sont pas tous nuls.

Définition. *Une fonction P est dite polynomiale sur $\mathbb{R}$ si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et des réels $a_0, a_1, \ldots, a_p$ tels*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

On dira parfois polynôme au lieu de fonction polynomiale. Ce n'est pas très grave pour le moment même si cela sera un abus de langage lorsqu'on aura vu ce qu'est réellement un polynôme dans le chapitre 18.

On admet les résultats suivantes (que l'on complètera dans le chapitre 9 et qui seront montrés et approfondis dans le chapitre 18) :

L'unicité du degré et des coefficients d'une fonction polynomiale non nulle signifie que, si P s'écrit

$x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$

et

$x \mapsto b_0 + b_1 x + \cdots + b_q x^q$

avec $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ et $a_0, \ldots, a_p, b_0, \ldots, b_q$ des réels tels que $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$, alors $p = q$ et

$\forall i \in [\![0,p]\!], a_i = b_i$

Théorème. *Si P est une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$, alors :*

- *ou bien P est la fonction nulle,*
- *ou bien il existe un unique $p \in \mathbb{N}$ (appelé degré de P) et des uniques réels $a_0, a_1, \ldots, a_p$ (appelés coefficients de P) tels que $a_p \neq 0$ et :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p.$$

Le coefficient a_p est appelé coefficient dominant de P et a_0 le coefficient constant.

Remarque :

- Les fonctions polynomiales de degré 0 sont les fonctions constantes non nulles.
- Les fonctions polynomiales de degré 1 sont les fonctions affines (cf. partie A du chapitre).

- Les fonctions polynomiales de degré 2 sont les trinômes du second degré que l'on a déjà partiellement étudié dans le chapitre 3 et que nous reverrons plus en détail dans le paragraphe I.2.c.

Exemple : *La fonction $x \longmapsto 5x^4+3x^2-7x+2$ est polynomiale de degré 4, de coefficient constant 2 et de coefficient dominant 5.*

Définition. *Soit P une fonction polynomiale. Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est une racine de P si $P(a)=0$.*

L'application polynomiale nulle admet une infinité de racines (tous les réels) et c'est donc le seul.

Théorème. *Si P est une application polynomiale de degré $p \in \mathbb{N}$, alors P admet au plus p racines.*

Théorème (factorisation dans fonction polynomiale). *Soit P une fonction polynomiale de degré $p \in \mathbb{N}^*$. Si P admet une racine a, alors il existe une unique fonction polynomiale Q de degré $p-1$ telle que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x)=(x-a)\times Q(x).$$

On cherche d'abord les racines parmi l'ensemble $[\![-3\,;3]\!]$, sachant qu'une racine nulle saute au yeux : c'est le cas si et seulement si le coefficient constant est nul. On voit aussi facilement quand 1 est racine : c'est le cas lorsque la somme des coefficients est nulle.

Dans la pratique, pour trouver l'application polynomiale Q, on l'écrit de façon générique comme une combinaison linéaire de fonctions puissances entières naturelles. On développe $(x-a)Q(x)$ et on « identifie » les coefficients un à un pour trouver Q (en commençant par les coefficients dominants et constants).

Le terme « identifie » est cependant interdit. On dira plutôt « par unicité des coefficients d'une application polynomiale ».

On répète ce procédé de factorisation pour factoriser la fonction polynomiale au maximum (c'est-à-dire l'écrire sous la forme d'un produit de fonctions polynomiales de degré 1 ou de degré 2 mais avec discriminant strictement négatif).

Un intérêt : c'est sous une forme totalement factorisée que l'on peut aisément étudier son signe et donc les variations d'une fonction polynomiale dont elle est la dérivée.

Exemple : *Considérons la fonction polynomiale $P : x \longmapsto 6x^3+5x^2-3x-2$.*

b) Limites, continuité, dérivabilité d'une fonction polynomiale

Soit P une fonction polynomiale de degré $p \in \mathbb{N}$: il existe des uniques $a_0, a_1, \dots, a_p$ tels que $a_p \neq 0$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_px^p.$$

Puisque P est une combinaison linéaire de fonctions puissances entières naturelles, on en déduit :

Proposition. *La fonction polynomiale P est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+pa_px^{p-1}.$$

Exemple :

Proposition. *La fonction polynomiale P possède les mêmes limites en $\pm\infty$ que la fonction $x \longmapsto a_p x^p$.*

DÉMONSTRATION.

$\square$

Exemple :

c) Le cas particulier des fonctions polynomiales de degré 2

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$. Notons $P : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ et notons $\Delta = b^2 - 4ac$.

Nous renvoyons au dernier paragraphe du chapitre 3 pour la recherche des éventuelles racines de P et pour la détermination de son signe selon les signes de Δ et a. Intéressons-nous ici aux variations de P. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

Ainsi les variations de P sont entièrement déterminées par le signe de a (et non par Δ).

$$P'(x) = 2ax + b \underset{<}{>} 0 \iff 2ax \underset{<}{>} -b \iff \begin{cases} x \underset{<}{>} -\frac{b}{2a} & \text{si} \quad a > 0 \\ x \underset{>}{<} -\frac{b}{2a} & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

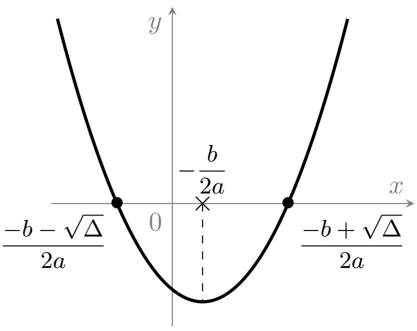
On en déduit :

Proposition.

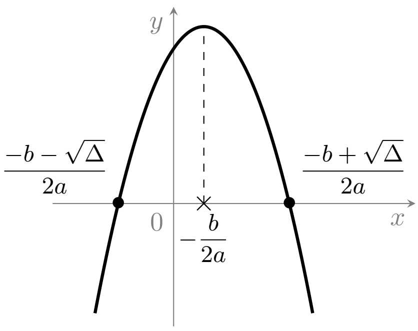
- *Si $a > 0$, alors P est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;-\frac{b}{2a}\right]$ et strictement croissante sur $\left[-\frac{b}{2a}\,;-\infty\right[$.*
- *Si $a < 0$, alors P est strictement croissante sur $\left]-\infty\,;-\frac{b}{2a}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[-\frac{b}{2a}\,;-\infty\right[$.*

La valeur en $-\dfrac{b}{2a}$ (minimale ou maximale selon que $a > 0$ ou $a < 0$ respectivement) vaut $-\dfrac{\Delta}{4a}$. Cela redémontre le résultat final du chapitre 3.

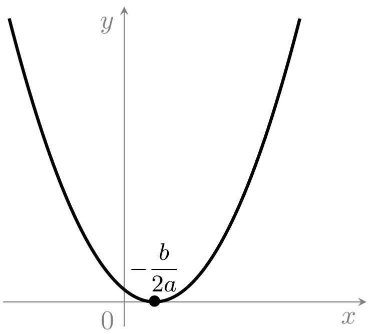
On rappelle que les limites de P en $\pm\infty$ sont celles de $x \longmapsto ax^2$. En conjuguant cela avec le signe de P, on obtient les graphes suivants :



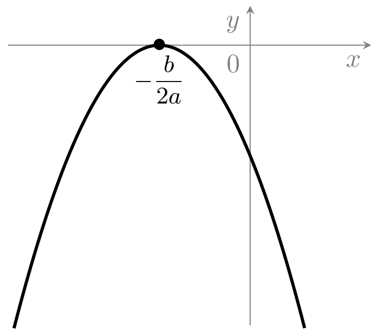
cas où $\Delta > 0$ et $a > 0$



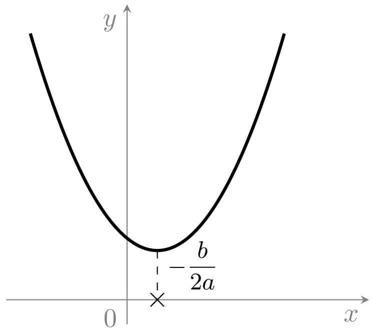
cas où $\Delta > 0$ et $a < 0$



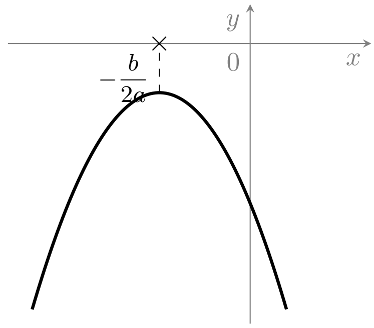
cas où $\Delta = 0$ et $a > 0$



cas où $\Delta = 0$ et $a < 0$



cas où $\Delta < 0$ et $a > 0$



cas où $\Delta < 0$ et $a < 0$

3) Les fonctions rationnelles

Définition. *Une fonction R est dite rationnelle si il existe deux fonctions polynomiales P et Q telles que Q est non identiquement nulle et $R = \frac{P}{Q}$. Son domaine de définition est $\mathbb{R}$ privé de l'ensemble des racines de Q.*

Et comme on l'a vu plus haut, l'ensemble des racines de Q est fini

Exemple : *La fonction $x \longmapsto \frac{7x^5 - 6x + 4}{2x^2 - 5x + 3}$ est rationnelle. Son domaine de définition est*

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, 2x^2 - 5x + 3 \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 2(x - \frac{3}{2})(x-1) \neq 0\right\} = \mathbb{R} \Big\backslash \left\{\frac{3}{2}; 1\right\}.$$

Puisqu'une fonction rationnelle est quotient de deux fonctions polynomiales (dont celle au dénominateur est non nulle), on en déduit :

On dérive une fonction rationnelle comme un quotient de deux fonctions polynomiales.

Proposition. *Une fonction rationnelle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine de définition.*

Proposition. *Soit P une fonction polynomiale de degré $p \in \mathbb{N}$ et de coefficient dominant a_p. Soit Q une fonction polynomiale de degré $q \in \mathbb{N}$ et de coefficient dominant b_q. Alors la fonction rationnelle $R = \frac{P}{Q}$ possède les mêmes limites en $\pm\infty$ que la fonction $x \longmapsto \frac{a_p}{b_q} x^{p-q}$.*

Démonstration. Notons $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$ avec $a_p \neq 0$. Notons $Q : x \longmapsto b_0 + b_1 x + \cdots + b_q x^q$ avec $b_q \neq 0$. Pour tout $x \in D_R$, $R(x) = \frac{a_p}{b_q} x^{p-q} \times f(x)$ avec

$$f(x) = \frac{1 + \frac{a_{p-1}}{a_p x} + \cdots + \frac{a_2}{a_p x^{p-2}} + \frac{a_1}{a_p x^{p-1}} + \frac{a_0}{a_p x^p}}{1 + \frac{b_{q-1}}{b_q x} + \cdots + \frac{b_2}{b_q x^{q-2}} + \frac{b_1}{b_q x^{q-1}} + \frac{b_0}{b_q x^q}} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \frac{1}{1} = 1.$$

□

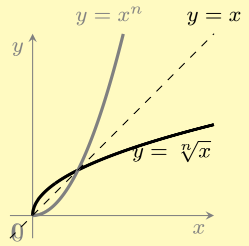
Les propriétés des fonctions rationnelles seront aussi étudiées dans le chapitre 19 mais on en reparlera un peu plus tôt, dans le chapitre 9.

4) Les fonctions racines

Définition. *Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0; 1\}$. La fonction $x \longmapsto x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ est appelée fonction racine $n^{\text{ième}}$. Elle est définie sur $\mathbb{R}_+$.*

Dans la partie B (dans des exemples), nous avons montré :

La fonction $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt[n]{x}$ est la réciproque de $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^n$. Graphiquement cela se traduit par une symétrie des deux courbes par la première bissectrice des axes (la droite d'équation $y = x$).



Proposition. *Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$, la fonction $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est :*

- *strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et nulle en 0.*
- *strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.*
- *continue sur $\mathbb{R}_+$.*
- *de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est $x \longmapsto \dfrac{\sqrt[n]{x}}{nx}$.*
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

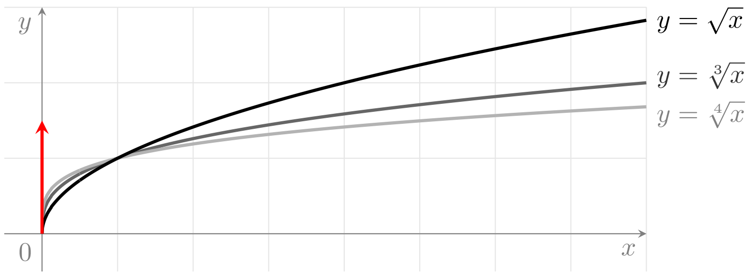
Ajoutons :

Proposition. *Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$, $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. La fonction $h_n : x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $h_n'(x) = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{nx}$ et

$$h_n''(x) = \frac{1}{n} \frac{\frac{\sqrt[n]{x}}{nx} \times x - \sqrt[n]{x} \times 1}{x^2} = \frac{(1-n)\sqrt[n]{x}}{n^2 x^2} \leqslant 0.$$

Ainsi h_n est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. □

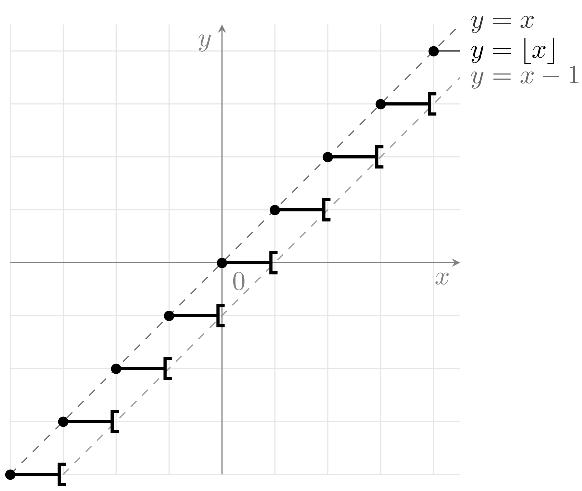


5) La fonction partie entière

Définition. *La fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est appelée fonction partie entière. Elle est définie sur $\mathbb{R}$.*

Proposition. *La fonction partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, elle est constante égale à k sur l'intervalle $[k\,;k+1[$.*

$\leadsto$ Démonstration laissée en exercice.



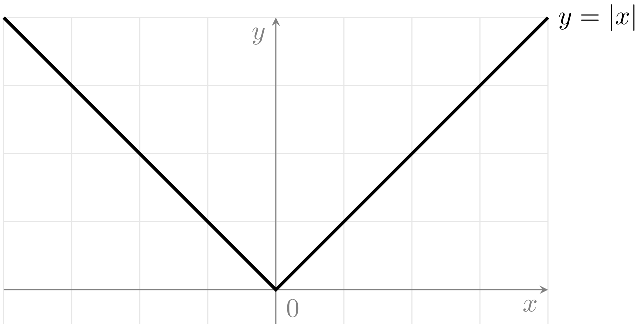
6) La fonction valeur absolue

Définition. *La fonction $x \longmapsto |x|$ est appelée fonction valeur absolue. Elle est définie sur $\mathbb{R}$.*

Proposition. *La fonction valeur absolue est :*

- *strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.*
- *paire sur $\mathbb{R}$.*
- *continue sur $\mathbb{R}$.*
- *dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. Sa dérivée est la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction constant égale à -1 sur $\mathbb{R}_-^*$.*
- $\lim\limits_{x \to +\infty} |x| = \lim\limits_{x \to -\infty} |x| = +\infty$.

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.



II La fonction exponentielle

1) Définition

Il existe de nombreuses façons de construire cette fonction.

Nous admettons provisoirement (nous le montrerons dans le chapitre 27) l'existence de la fonction exponentielle :

Théorème (existence de l'exponentielle). *Il existe une fonction à valeurs réelles, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vaut 1 en 0 et qui coïncide avec sa dérivée sur $\mathbb{R}$. Cette fonction est appelée exponentielle et on la note $\exp$. On a donc :*

- $\exp(0) = 1$.
- $\exp$ *est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$ et* $\exp' = \exp$.

e est un nombre et non pas une fonction. La fonction exponentielle se note $\exp$ ou $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ comme on le verra dans un instant.

Définition. *On note e le nombre* $\exp(1)$.

Remarque : On a $\mathrm{e} \approx 2.718$. Nous verrons ultérieurement des méthodes pour obtenir une telle approximation.

2) Premières propriétés

Proposition. $\exp$ *est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,* $\exp^{(n)} = \exp$.

Démonstration. On montre par récurrence immédiate que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp$ est n fois dérivable et $\exp^{(n)} = \exp$. $\square$

Lemme. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,* $\exp(x)\exp(-x) = 1$.

Erreur classique à éviter : dire que la dérivée de la fonction $x \mapsto \exp(-x)$ est $x \mapsto \exp'(-x)$. Ne pas oublier de « sortir le -1 devant ».

DÉMONSTRATION.

$\square$

Proposition. $\exp$ *est strictement positive et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION.

$\square$

Proposition (unicité de l'exponentielle). *La fonction* $\exp$ *est unique, c'est-à-dire, si* f *est une fonction dérivable sur* $\mathbb{R}$ *telle que* $f' = f$ *et* $f(0) = 1$, *alors* $f = \exp$.

DÉMONSTRATION.

Proposition. *La fonction* $\exp$ *est convexe sur* $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION. La fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$ est croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est donc convexe. $\square$

Cette inégalité est un immense classique à savoir redémontrer à la demande.

Corollaire. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geqslant 1 + x$.

DÉMONSTRATION.

- **Méthode 1.**

- **Méthode 2.**

$\square$

3) Des propriétés proches de celles de puissances entières

Proposition. *Soient x et y des réels. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a :*

- $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$,
- $\exp(-y) = \dfrac{1}{\exp(y)}$,
- $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$,
- $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.

DÉMONSTRATION.

-

- Si $y \in \mathbb{R}$, $\exp(y)\exp(-y) = 1$ (cf. lemme ci-dessus). Comme $\exp$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on obtient $\exp(-y) = \dfrac{1}{\exp(y)}$.

Ici on utilise le premier point avec $-y$ au lieu de y.

- Soient x et y des réels. On a $\exp(x-y) = \exp(x)\exp(-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.
- Fixons $x \in \mathbb{R}$.
  - ⋆ Procédons par récurrence. On a $\exp(0 \times x) = \exp(0) = 1 = (\exp(x))^0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\exp(nx) = (\exp(x))^n$. On a alors

Ici on utilise le premier point avec $y = nx$.

$$\exp((n+1)x) = \exp(nx)\exp(x) = (\exp(x))^n \exp(x) = (\exp(x))^{n+1}.$$

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.

  - ⋆ Si $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$, alors $-n \in \mathbb{N}$ et donc

Ici on utilise le deuxième point avec $y = -x$.

$$\exp(nx) = \exp((-n)(-x)) = (\exp(-x))^{-n} = \left(\frac{1}{\exp(-x)}\right)^n = (\exp(x))^n. \quad \square$$

Ces propriétés sont similaires à celles des puissances entières. C'est la raison d'être de la notation suivante (que nous préférerons désormais à $\exp$) :

Définition. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathrm{e}^x = \exp(x)$.*

Ce qui est cohérent avec le fait que e est défini comme $\exp(1)$.

Réécrivons la proposition précédente avec cette nouvelle notation :

Proposition. *Soient x et y des réels. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a*

$$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y, \qquad \mathrm{e}^{-y} = \frac{1}{e^y}, \qquad \mathrm{e}^{x-y} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}, \qquad \mathrm{e}^{nx} = (\mathrm{e}^x)^n.$$

⚠ Erreurs à ne jamais faire : $\mathrm{e}^{xy} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$, $\mathrm{e}^{xy} = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y$ ou pire $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y$.

Par récurrence, on obtient :

A retenir : « l'exponentielle transforme les sommes en produits », cf. chapitre 7.

Corollaire. *Si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $x_1, \ldots, x_n$ sont des réels, alors*

$$\exp(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \exp(x_1) \times \exp(x_2) \times \ldots \exp(x_n).$$

4) Limites de la fonction exponentielle

Proposition. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

Démonstration. Puisque $\exp$ est dérivable en 0, on a

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} \xrightarrow[x\to 0]{} \exp'(0) = \exp(0) = 1. \qquad \square$$

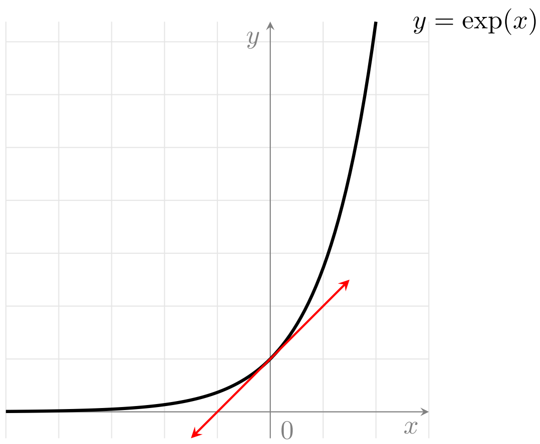
Proposition. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$ *et* $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty.$

Démonstration.

- Puisque $1 + x \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$, le théorème de comparaison entraîne que $e^x \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$.
- Puisque $-x \xrightarrow[x\to -\infty]{} +\infty$, on en déduit que $e^{-x} \xrightarrow[x\to -\infty]{} +\infty$. Par quotient, on obtient que $e^x = \dfrac{1}{e^{-x}} \xrightarrow[x\to -\infty]{} 0$. $\square$

5) Courbe représentative de la fonction exponentielle

Il découle notamment des propriétés précédente que le graphe de $\exp$ admet la droite des abscisses pour asymptotes en $+\infty$ et qu'il est au dessus de sa tangente en 0 (la droite d'équation $y = x + 1$).



6) Propriété de bijectivité

Théorème. *La fonction* $\exp$ *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. La fonction $\exp$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc le théorème de la bijection assure qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\exp(\mathbb{R}) = \left]\lim_{-\infty} \exp\,; \lim_{+\infty} \exp\right[= \mathbb{R}_+^*$. $\square$

III Les fonctions hyperboliques

1) Cosinus et sinus hyperboliques

Définition (cosinus hyperbolique). *La fonction cosinus hyperbolique est la fonction notée* ch *et définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Le nom de ces fonctions vient de leur ressemblance avec les formules d'Euler (cf. chapitre 6) pour le cosinus et le sinus. Par ailleurs il existe plusieurs formules sur ces fonctions qui ressemblent aux formules de trigonométrie (cf. chapitre 5) mais il y a beaucoup de différences. Par exemple la formule de la proposition suivante présente un $+$ au lieu d'un $-$ dans son analogue trigonométrique.

Définition (sinus hyperbolique). *La fonction sinus hyperbolique est la fonction notée* sh *et définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Proposition. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x}}{4} - \frac{\mathrm{e}^{2x} - 2 + \mathrm{e}^{-2x}}{4} = 1.\end{aligned}$$

□

Proposition. *Les fonctions* ch *et* sh *sont de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$, $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ *et* $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$.

Démonstration. Déjà ch et sh sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par combinaison linéaire des fonctions $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ qui le sont. Les calculs de dérivées sont immédiats. □

Proposition.

- ch *est paire sur* $\mathbb{R}$.
- ch *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+$, *strictement décroissante sur* $\mathbb{R}_-$.
- $\mathrm{ch}(0) = 1$ *et, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \geqslant 1$.
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$.
- ch *est convexe sur* $\mathbb{R}$.

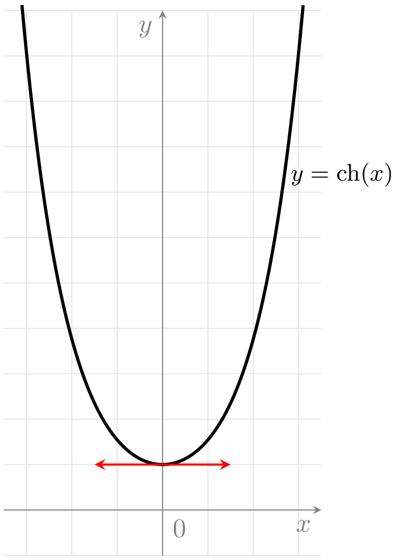
Démonstration.

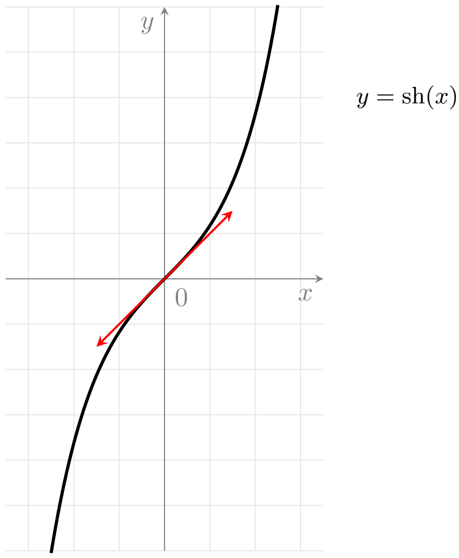
□

Proposition.

- sh *est impaire sur* $\mathbb{R}$.
- sh *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$.
- sh *est convexe sur* $\mathbb{R}_+$, *concave sur* $\mathbb{R}_-$ *et admet un point d'inflexion en* 0.

Démonstration. L'imparité de sh est immédiate. Comme $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ensuite $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$ donc $\mathrm{ch}(x) = \mathrm{e}^x \times \dfrac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et la limite en $-\infty$ découle de l'imparité. Enfin $\mathrm{sh}'' = \mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ est positive sur $\mathbb{R}_+$, négative sur $\mathbb{R}_-$ et change bien de signe en 0 si bien que sh est convexe sur $\mathbb{R}_+$, concave sur $\mathbb{R}_-$ et admet un point d'inflexion en 0. ☐





2) Tangente hyperbolique

Puisque ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on peut définir :

Le nom de cette fonction vient encore d'une analogie avec les fonctions trigonométriques puisque la fonction tangente est le quotient de sinus par cosinus.

Définition (tangente hyperbolique). *La fonction tangente hyperbolique est la fonction notée th et définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$

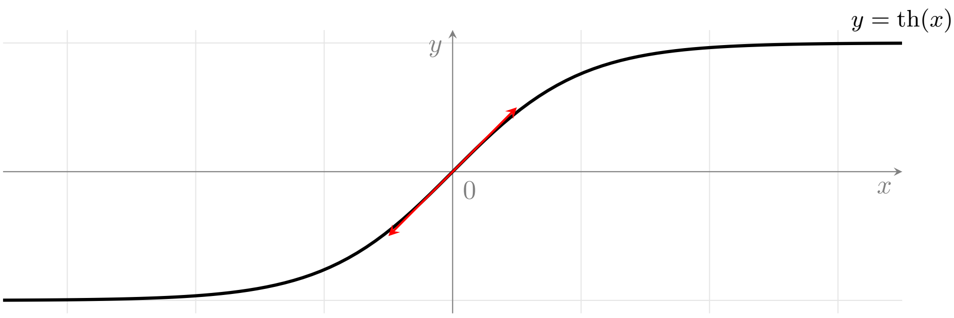
Proposition. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}.$$

Proposition.

- th *est impaire sur* $\mathbb{R}$.
- th *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$. *On a* $\mathrm{th}' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2} = 1 - \mathrm{th}^2$.
- th *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $-1 < \mathrm{th}(x) < 1$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x) = -1$.
- th *est convexe sur* $\mathbb{R}_-$, *concave sur* $\mathbb{R}_+$ *et admet un point d'inflexion en* 0.

Démonstration.



IV La fonction logarithme népérien

1) Définition et premières propriétés

Définition. *On appelle logarithme népérien et on note* $\ln$ *la réciproque de fonction* $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$.

On a $\ln(2) \approx 0.693$ et $\ln(3) \approx 1.097$. Nous verrons ultérieurement des méthodes pour obtenir de telles approximations.

On a immédiatement, par définition de la réciproque :

Proposition.

- $\ln$ *est une bijection de* $\mathbb{R}_+^*$ *sur* $\mathbb{R}$.
- $\ln(1) = 0$.
- *Pour tous* $x \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $y \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x = y$ *si et seulement si* $x = \ln(y)$.
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$
- *Pour tout* $y \in \mathbb{R}$, $\ln(\mathrm{e}^y) = y$.

2) Continuité, dérivabilité et limites de $\ln$

Il découle du théorème de la bijection que :

Proposition. *La fonction* $\ln$ *est continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$. *De plus*

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \qquad \textit{et} \qquad \lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Corollaire. *La fonction* $\ln$ *est strictement positive sur* $]1\,;+\infty[$ *et strictement négative sur* $]0\,;1[$.

Proposition. *La fonction* $\ln$ *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et, pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Démonstration.

□

Remarque : Par composition la fonction $x \longmapsto \ln(-x)$ est alors de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et sa dérivée est $x \longmapsto \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x}$. On en déduit que :

- la fonction $x \longmapsto \ln(|x|)$ est classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est $x \longmapsto \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x}$.
- si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et à valeurs non nulles, alors la fonction $x \longmapsto \ln(|u(x)|)$ est dérivable sur I, de dérivée $\dfrac{u'}{u}$.

A retenir donc (sans le redémontrer à chaque fois tellement c'est classique) : la dérivée de $\ln(|u|)$ est $\dfrac{u'}{u}$.

Corollaire. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1.$

Ou encore

$$\lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1.$$

Démonstration. Il s'agit de la limite du taux d'accroissement de $\ln$ en 1 qui existe et vaut $\ln'(1) = 1$ puisque $\ln$ est dérivable en 1. □

Proposition. *La fonction* $\ln$ *est concave sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. La fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln' : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est donc concave. □

Corollaire. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leqslant x - 1$.

Cette inégalité est un immense classique à savoir redémontrer à la demande.

Démonstration.

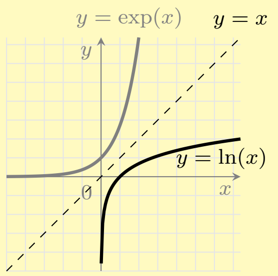
- **Méthode 1.**

- **Méthode 2.**

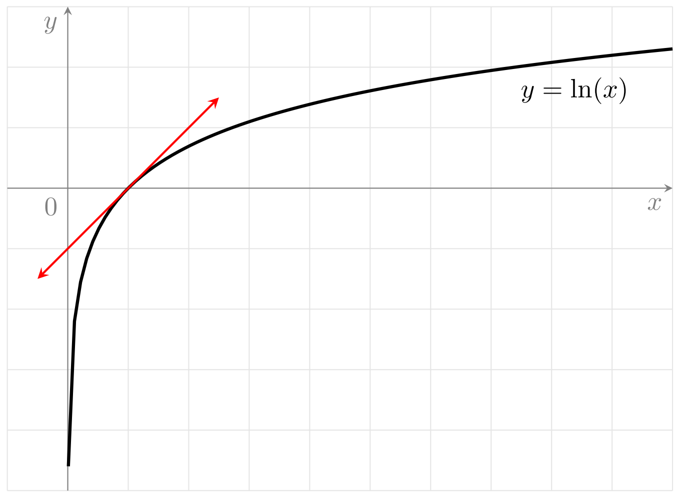
□

3) Courbe représentative du logarithme népérien

On peut aussi obtenir cette courbe à l'aide celle de la fonction exponentielle puisque la courbe d'une bijection et de sa réciproque sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$:



Il découle notamment des propriétés précédente que le graphe $\ln$ admet la droite des ordonnées pour asymptotes en 0 et qu'il est en dessous de sa tangente en 1 (la droite d'équation $y = x - 1$).



4) Le logarithme transforme les produits en sommes

Proposition. *Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a* $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$,

$$\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y), \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y), \qquad \ln(x^n) = n\ln(x).$$

Le principe de preuve : on passe tout d'un côté, on passe à l'exponentielle et on trouve 1.

Démonstration.

- On a
$$\exp\big(\ln(xy) - \ln(x) - \ln(y)\big) = \frac{\exp\big(\ln(xy)\big)}{\exp\big(\ln(x)\big)\exp\big(\ln(y)\big)} = \frac{xy}{xy} = 1,$$
donc $\ln(xy) - \ln(x) - \ln(y) = \ln(1) = 0$ et donc $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
- On a
$$\exp\left(\ln\left(\frac{1}{y}\right) + \ln(y)\right) = \exp\left(\ln\left(\frac{1}{y}\right)\right)\exp\left(\ln(y)\right) = \frac{1}{y}y = 1$$
donc $\ln\left(\frac{1}{y}\right) + \ln(y) = \ln(1) = 0$. Ainsi $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y)$.
- D'après les deux derniers points (avec $1/y$ au lieu de y) :
$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$
- On a
$$\exp(\ln(x^n) - n\ln(x)) = \frac{\exp(\ln(x^n))}{\exp(n\ln(x))} = \frac{x^n}{\exp(\ln(x))^n} = \frac{x^n}{x^n} = 1$$
donc $\ln(x^n) - n\ln(x) = \ln(1) = 0$. Ainsi $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

□

⚠ Erreurs à ne jamais faire : $\ln(xy) = \ln(x)\ln(y)$, $\ln(x+y) = \ln(x)\ln(y)$ ou pire $\ln(x+y) = \ln(x)+\ln(y)$.

Par récurrence, on obtient :

A retenir : « le logarithme transforme les produits en sommes », cf. chapitre 7.

Corollaire. *Si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $x_1, \ldots, x_n$ sont des réels **strictement positifs**, alors*

$$\ln(x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n) = \ln(x_1) + \ln(x_2) + \cdots + \ln(x_n).$$

5) Fonction logarithme en base a

La fonction $\ln$ est donc la fonction logarithme en base e.

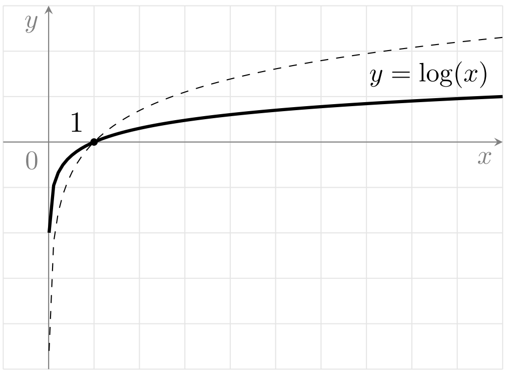
Définition. *Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$. La fonction*

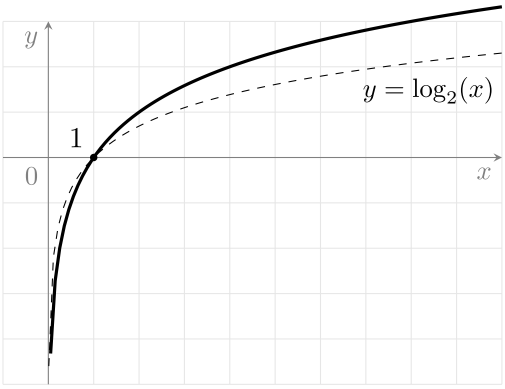
$$\log_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{array} \right.$$

est appelée logarithme en base a.

Exemples : *En physique, on utilise beaucoup le logarithme en base 10 (appelé aussi logarithme décimal) qui est donc la fonction $\log_{10} : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$. On la note souvent $\log$ au lieu de $\log_{10}$. En informatique, puisqu'on travaille souvent en binaire, on utilise souvent la fonction logarithme en base 2 qui est donc la fonction $\log_2 : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$.*

Le graphe de $\log_a$ s'obtient à partir du graphe de la fonction $\ln$ par contraction verticale de rapport $\ln(a)$. Ci-contre les graphes du logarithme décimal (à gauche), donc pour $a = 10$, et le graphe du logarithme en base 2 (à droite), donc pour $a = 2$. Le graphe de la fonction $\ln$ est à chaque fois en pointillés.





Il découle des propriétés de $\ln$ que :

Cela aurait du sens de définir le logarithme en base a pour $a \in]0\,;1[$, mais les variations, les limites, la convexité et le signe ne seraient plus les mêmes. En pratique on n'utilise quasiment que les cas $a = 2$ et $a = 10$.

Proposition. *Soit $a \in]1\,;+\infty[$. La fonction $\log_a$ est :*

- *de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(a)}$.*
- *concave sur $\mathbb{R}_+^*$.*
- *strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.*
- *strictement positive sur $]1\,;+\infty[$, strictement négative sur $]0\,;1[$.*
- *bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ et sa bijection réciproque est $x \longmapsto a^x$.*

On a $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$,

$$\log_a(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad \log_a(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty.$$

Enfin, pour tous réels x et y strictement positifs et tout entier n,

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y), \qquad \log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y),$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y), \qquad \text{et} \qquad \log_a(x^n) = n\log_a(x).$$

***Exemple :** Le nombre de chiffres d'un réel strictement positif x est $\lfloor \log(x) \rfloor + 1$. En effet :*

V Puissances à exposant réel

1) Définition et propriétés

Soit x un réel strictement positif.

Cela nous permet de généraliser la notion de puissance à un exposant réel :

On pose aussi usuellement $0^\alpha = 0$ lorsque $\alpha > 0$.

Définition. *Pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$.*

Ce n'est qu'une notation à ce stade ! C'est une autre définition des puissances (qui prolonge celle déjà vu dans le cas des puissances entières). En particulier, lorsque $x > 0$, il est totalement faux de dire que $x^\pi = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{\pi \text{ fois}}$. Cela n'a même aucun sens ! ! On a $x^\pi = \mathrm{e}^{\pi \ln(x)}$ et c'est tout !

Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, $p \in \mathbb{Z}^*$ et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$, alors $x^{\frac{p}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^p = (x^p)^{\frac{1}{n}}$, c'est-à-dire $x^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{x^p} = (\sqrt[n]{x})^p$.

Mais cette notation se justifie aussi par le fait que toutes les formules sur les puissances se généralisent :

Proposition. *Nous avons, pour tous réels $x > 0$, $y > 0$, α et β,*

$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}, \quad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta, \quad x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}, \quad \ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x), \quad (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha.$$

Démonstration. On utilise les propriétés de l'exponentielle et du logarithme népérien :

- $(x^\alpha)^\beta = (\mathrm{e}^{\alpha \ln(x)})^\beta = \mathrm{e}^{\beta \ln(\mathrm{e}^{\alpha \ln(x)})} = \mathrm{e}^{\beta\alpha \ln(x)} = x^{\alpha\beta}$.
- $x^{\alpha+\beta} = \mathrm{e}^{(\alpha+\beta)\ln(x)} = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x) + \beta \ln(x)} = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)} \mathrm{e}^{\beta \ln(x)} = x^\alpha x^\beta$.
- $x^{\alpha-\beta} = \mathrm{e}^{(\alpha-\beta)\ln(x)} = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x) - \beta \ln(x)} = \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}}{\mathrm{e}^{\beta \ln(x)}} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$.
- $\ln(x^\alpha) = \ln(\mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}) = \alpha \ln(x)$.
- $(xy)^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(xy)} = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x) + \alpha \ln(y)} = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)} \mathrm{e}^{\alpha \ln(y)} = x^\alpha y^\alpha$. □

2) Fonctions construites à partir des puissances à exposant réel

a) Les fonctions puissances généralisées

Dans ces fonctions, l'exposant α est **fixe** et c'est la base qui varie. En cas de doute, on revient toujours à la notation exponentielle.

Définition. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On appelle fonction puissance d'exposant α la fonction*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)} \end{array} \right.$$

Si $\alpha > 0$, on adopte la convention que $0^\alpha = 0$.

Mais dans tous les cas, la notation $e^{\alpha \ln(x)}$ n'est autorisée que si $x > 0$.

Remarque : La fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est donc définie sur

Proposition. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$.*

- *Si $\alpha > 0$, alors $x \longmapsto x^\alpha$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus*

$$x^\alpha \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

Si $\alpha < 0$, alors $x \longmapsto x^\alpha$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus

$$x^\alpha \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad x^\alpha \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

- *Si $\alpha \geqslant 1$, alors $x \longmapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée est $x \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$.*
Si $\alpha < 1$, alors $x \longmapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

On voit donc que la convention que $0^\alpha = 0$ lorsque $\alpha > 0$ est naturelle. En fait nous avons simplement prolongé la fonction par continuité en 0 dans ce cas.

Nous n'avons pas inclus le cas $\alpha = 0$ dans cette proposition. En même temps, il s'agit alors de la fonction constante égale à 1...

DÉMONSTRATION. Donnons-nous $\alpha \in \mathbb{R}$ et notons $p_\alpha : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x^\alpha$.

Si $n \in \mathbb{N} \backslash \{0; 1\}$, on retrouve le fait que $x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa dérivée est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{n} x^{-1+1/n} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{nx}$.

□

Proposition. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est :*

- *convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \in]-\infty\,; 0] \cup [1\,; +\infty[$.*
- *concave sur $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \in [0\,; 1]$.*

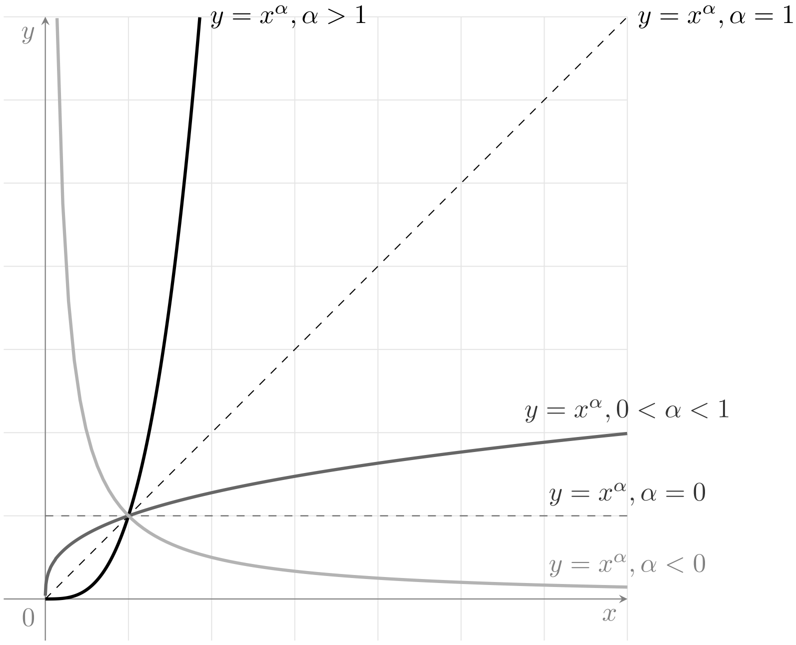
DÉMONSTRATION. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est deux dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée seconde est $x \longmapsto \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$. On conclut en remarquant que $\alpha(\alpha-1) \leqslant 0$ lorsque $\alpha \in [0\,; 1]$ et $\alpha(\alpha-1) \geqslant 0$ sinon. □

Proposition (positions relatives). *Soient α et β des réels tels que $\alpha < \beta$.*

- *Si $x \in]1\,; +\infty[$, alors $x^\alpha < x^\beta$.*
- *Si $x \in]0\,; 1[$, alors $x^\alpha > x^\beta$.*

Démonstration.

□



b) Les fonctions exponentielles de base a

L'erreur classique est de confondre $x \mapsto a^x$ avec $a \mapsto a^x$ et d'affirmer que sa dérivée est $x \mapsto xa^{x-1}$. Retenons le principe suivant : quand la puissance est variable, on revient à la notation exponentielle.

Définition. *Pour tout $a \in \left]0\,;+\infty\right[$, la fonction $x \longmapsto a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}$ est appelée fonction exponentielle de base a.*

Proposition. *Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $x \longmapsto a^x$ est :*

- *définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est $x \longmapsto \ln(a)\, a^x$.*
- *strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a \in \left]1\,;+\infty\right[$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $a \in \left]0\,;1\right[$ et constante si $a = 1$.*
- *est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ dont la réciproque est la fonction logarithme de base a.*

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

c) Fonctions du type u^v

Et on ne dira rien de plus sur ces fonctions de façon générale (cf. partie D pour un exemple d'étude). La seule chose à retenir est qu'il faut impérativement repasser à la notation exponentielle quand la base et l'exposant varient !

Soit E une union d'intervalles non vides et non réduits à un point.

Définition. *Soient u et v deux fonction définies sur E et telles que u est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On définit la fonction u^v par*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{v(x)\ln(u(x))} \end{array} \right.$$

Remarques :

- Cette notation donne naissance à de nouvelles formes indéterminées : celles du type « 1^∞ », « ∞^0 » et « 0^0 ».

Il est temps pour vous de rencontrer un immense classique : quelle est la limite de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ quand x tend vers 0^+ ?

Avec la notation exponentielle, il s'agit de formes indéterminées du type : « $\mathrm{e}^{\infty\times\ln(1)}$ », « $\mathrm{e}^{0\times\ln(\infty)}$ » et « $\mathrm{e}^{0\times\ln(0)}$ ». En fait il s'agit toutes les trois de la forme indéterminée « $0\times\infty$ ».

Intuitivement d'abord :

ERREUR GRAVE !

Recommençons :

Et on montre de même que

$$(1+2x)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \mathrm{e}^2$$

si bien que « 1^∞ » est bien une forme indéterminée.

- Puisque $\exp$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$, les variations de la fonction u^v sont les mêmes que les variations de $\varphi : x \longmapsto u(x)\ln(v(x))$. Si u et v sont dérivables sur E, alors, pour tout $x\in E$,

$$\varphi'(x) = u'(x)\ln(v(x)) + \frac{u(x)v'(x)}{v(x)}.$$

Il suffit donc d'étudier le signe de φ' pour déterminer les variations de u^v.

3) Les croissances comparées

Proposition. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$

Démonstration.

□

Les croissances comparées expriment le fait que « les exponentielles (termes du type $\mathrm{e}^{\gamma x}$, γ fixé, ou q^x, q fixé) l'emportent sur les puissances (termes du type x^α, α fixé) qui l'emportent elles-mêmes sur les puissances de logarithmes (termes du type $(\ln(x))^\beta$, β fixé) ».

Théorème (croissances comparées en $+\infty$). *Soient α, β et γ des réels strictement positifs. On a :*

$$\frac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{x^\alpha}{\mathrm{e}^{\gamma x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Démonstration.

Ne pas voir des croissances comparées là où il n'y en a pas :
• S'il n'y a pas de forme indéterminée, il n'y a pas de croissances comparées. Par exemple $\dfrac{e^{-x}}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ n'est pas « une croissance comparée ». Il s'agit juste d'un produit de deux fonctions tendant vers 0 en $+\infty$.
• Les croissances comparées ne font intervenir que des termes du type $e^{\gamma x}$, q^x, x^α ou $(\ln(x))^\beta$. Par exemple $\dfrac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ n'est pas « une croissance comparée ».

$\square$

Corollaire (croissances comparées en $+\infty$ – variante). *Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $q \in\,]0\,;1[$ et $a \in\,]1\,;+\infty[$. On a :*

$$x^\alpha q^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{x^\alpha}{a^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Démonstration. On applique le théorème précédent avec $\gamma = -\ln(q) > 0$ puis $\gamma = \ln(a) > 0$. $\square$

Exemple :

Normalement on devrait toujours parler de croissances comparées (au pluriel) puisqu'on compare deux termes donc deux croissances.

Théorème (croissances comparées en 0^+). *Soient α, β et γ des réels strictement positifs. On a :*

$$x^\alpha |\ln(x)|^\beta \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0.$$

Démonstration. Pour tout $x \in\,]0\,;1[$, si on pose $y = 1/x$, alors

$$x^\alpha |\ln(x)|^\beta = \frac{|\ln(1/y)|^\beta}{y^\alpha} = \frac{(\ln(y))^\beta}{y^\alpha}.$$

Le théorème des croissances comparées en $+\infty$ entraîne alors que $\dfrac{(\ln(y))^\beta}{y^\alpha} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$.
Puisque $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$, le théorème de composition des limites permet de conclure. $\square$

Dans l'exemple ci-contre, on peut tout de suite se dire que l'exponentielle va l'emporter... par croissances comparées. Mais attention ce n'est pas directement « une croissance comparée » du cours. On s'y ramène en faisant « le changement de variable $y = 1/\sqrt{x}$ »
La formulation « le changement de variable » est peu rigoureuse mais c'est un bon moyen mnémotechnique).

Enfin il existe beaucoup d'autres croissances comparées mais qui ne sont pas au programme. Il faudra alors systématiquement s'y ramener via un changement de variable.

Par exemple $x^3 e^{1/\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$. En effet :