Chapitre 13

Propriété de la borne supérieure

Dans le chapitre 3, nous avons déjà étudié de nombreuses propriétés des réels. Toutefois nous n'avons pas été au bout de notre histoire au sujet de la relation d'ordre $\leqslant$. Plus précisément, nous avons vu les notions de majorants, minorants ainsi que de maximum et minimum. Nous avons bien senti qu'elles étaient insuffisantes dans certains cas : par exemple, certaines parties de $\mathbb{R}$ n'ont pas de maximum tout en présentant un plus petit majorant, ce qui en fait un élément remarquable que nous nous devons de caractériser.

Tout simplement : cette propriété va être à l'origine de tous les gros théorèmes d'analyse de l'année.

L'objectif de ce chapitre est d'explorer les notions de bornes supérieures et inférieures et de présenter une propriété de $\mathbb{R}$ appelée propriété de la borne supérieure et qui joue un rôle fondamental en analyse. Nous en verrons déjà quelques applications dans ce chapitre mais cette propriété entrera en scène particulièrement dès le prochain consacré aux suites.

I Bornes supérieures et bornes inférieures

1) Définitions et exemples

À ce stade, rien ne dit qu'une partie de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure ou une borne inférieure.

Définition. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

- *Si A est majorée et si l'ensemble des majorants de A admet un minimum, alors celui-ci est appelé borne supérieure de A et noté $\sup(A)$.*
- *Si A est minorée et si l'ensemble des minorants de A admet un maximum, alors celui-ci est appelé borne inférieure de A et noté $\inf(A)$.*

Exemples :

Pour déterminer la borne supérieure ou inférieure d'un intervalle, on se contente de la donner sans justification dans la pratique (cf. proposition ci-dessous).

- *La partie $A =]-\infty\,;7[$ est majorée mais nous avons vu dans le chapitre 3 qu'elle n'admet pas de maximum.*

Cette justification peut sembler bien compliquée pour quelque chose qui semble si intuitif. Nous verrons dans le chapitre 14 le théorème de la limite monotone qui nous permettra de justifier que 0 est la borne inférieure bien plus simplement.

- *Notons $E = \left\{\dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$. On a vu dans le chapitre 3 que E admet 1 pour maximum, qu'elle est minorée mais qu'elle n'admet pas de minimum.*

En d'autres termes : un maximum est une borne supérieure, mais la réciproque est fausse !

Proposition. *Si une partie A admet un maximum (respectivement un minimum) a, alors a est la borne supérieure (respectivement inférieure) de A.*

DÉMONSTRATION. Supposons que A admette un maximum a (le cas d'un minimum est analogue). Si $x \in [a\,;+\infty[$, comme a est un majorant et $a \leqslant x$, x est encore un majorant de A. Réciproquement, si x est un majorant de A, puisque $a \in A$, on a $a \leqslant x$, c'est-à-dire $x \in [a\,;+\infty[$. Par double inclusion, nous en déduisons que l'ensemble des majorants est $[a\,;+\infty[$. Cet ensemble admet a pour minimum si bien que A admet bien a pour borne supérieure. □

Complétons le tableau entamé dans le chapitre 3 pour les intervalles :

Proposition.

A	$\inf A$	$\min A$	$\sup A$	$\max A$
$[a\,;b]$	a	a	b	b
$[a\,;b[$	a	a	b	X
$]a\,;b]$	a	X	b	b
$]a\,;b[$	a	X	b	X
$[a\,;+\infty[$	a	a	X	X
$]a\,;+\infty[$	a	X	X	X
$]-\infty\,;b]$	X	X	b	b
$]-\infty\,;b[$	X	X	b	X
$]-\infty\,;+\infty[$	X	X	X	X

$\rightsquigarrow$ DÉMONSTRATION LAISSÉE EN EXERCICE.

Il suffit d'adapter la preuve de l'exemple $[7\,;+\infty[$ ci-dessus.

2) Propriété de la borne supérieure/inférieure

Le théorème suivant est admis (il découle de la construction de $\mathbb{R}$ qui est hors-programme) et peut être considéré comme un axiome.

Théorème (propriété de la borne supérieure/inférieure).

- *Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.*
- *Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure.*

⚠ Il s'agit d'un résultat d'existence mais cette propriété ne nous dit pas qui est la borne supérieure/inférieure. Cela nous permettra d'avancer dans la recherche de celle-ci tout en sachant qu'elle existe : c'est un début ! Nous allons voir des méthodes dans le paragraphe I.4 puis dans les chapitres 14 et 18.

Nous l'avons montré avec le TVI dans le chapitre 4... mais attendez, comment se montre le TVI ? Et bien, nous verrons dans le chapitre 18 que c'est exactement ainsi que l'on peut montrer le TVI !

Exemple : *Soit $p \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Montrons autrement le fait que tout réel positif admet une racine $p^{\text{ième}}$. On oublie donc que l'on connaît son existence.*

Reste à montrer que $(\sqrt[p]{y})^p = y$, ce que l'on fera dans le chapitre 14 avec la caractérisation séquentielle de la borne supérieure.

Remarque : La propriété de la borne supérieure est donc fausse dans $\mathbb{Q}$. En effet, si cette propriété était vraie, alors, en reprenant la preuve de l'exemple ci-dessous, l'ensemble $\mathbb{Q} \cap A_2$ admettrait une borne supérieure dans $\mathbb{Q}$, ce qui prouverait que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, ce que l'on sait être faux (cf. chapitre 12).

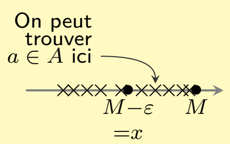
3) Caractérisation des bornes supérieures et inférieures

Supposons que l'on sache qu'une partie A non vide admette un majorant M (c'est-à-dire : $\forall a \in A,\ a \leqslant M$). Il s'agit de la borne supérieure de A si et seulement si elle est le plus petit des majorants si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si x est un majorant de A, alors $x \geqslant M$. En prenant la contraposée de cette implication il vient que :

On en déduit :

Théorème (caractérisation de la borne supérieure). *Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Soit $M \in \mathbb{R}$. On a :*

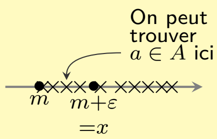
$$M = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A,\, a \leqslant M \\ \forall x < M,\, \exists a \in A,\, a > x \end{cases} \iff \begin{cases} \forall a \in A,\, a \leqslant M \\ \forall \varepsilon > 0,\, \exists a \in A,\, a > M - \varepsilon \end{cases}$$



De façon analogue, on a :

Théorème (caractérisation de la borne inférieure). *Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Soit $m \in \mathbb{R}$. On a :*

$$m = \inf(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A,\, a \geqslant m \\ \forall x > m,\, \exists a \in A,\, a < x \end{cases} \iff \begin{cases} \forall a \in A,\, a \geqslant m \\ \forall \varepsilon > 0,\, \exists a \in A,\, a < m + \varepsilon \end{cases}$$



Nous verrons des caractérisations séquentielles (c'est-à-dire avec des suites) dans le chapitre 14.

4) Méthodes pour déterminer la borne supérieure/inférieure

Pour montrer qu'un réel M est la borne supérieure d'une partie A de $\mathbb{R}$ non vide et majorée :

- On peut montrer que M est un majorant de A et que tout autre majorant est supérieur à M (ce qui fait de M le plus petit d'entre eux).
- On peut montrer que M est un maximum de A (c'est-à-dire un majorant qui appartient à A).
- On peut utiliser le théorème de caractérisation du paragraphe I.3 : on montre que M est un majorant et que, dès que l'on s'écarte légèrement de M par la gauche, c'est-à-dire dès que l'on prend $x < M$ (ou $\varepsilon > 0$), alors x (ou $M - \varepsilon$) n'est pas un majorant : on parvient à trouver $a \in A$ tel que $x < a \leqslant M$ (ou $M - \varepsilon < a \leqslant M$).

Problème : M peut être la borne supérieure sans être un maximum.

- On peut utiliser la caractérisation séquentielle de la borne supérieure : on montre que M est un majorant et qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers M (on en reparlera dans le chapitre 14).
- Lorsque $A = f(I)$ avec I un intervalle et $f : I \longmapsto \mathbb{R}$, on peut utiliser le théorème de la limite monotone (on en reparlera dans le chapitre 18).
- Lorsque $A = \{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut utiliser le théorème de la limite monotone (on en reparlera dans le chapitre 14).

C'est d'ailleurs quelque chose que nous avons déjà remarqué, sans le dire, en faisant des tableaux de variations.

Ces méthodes s'adaptent bien sûr au cas d'une borne inférieure.

5) Existence de la partie entière d'un réel

Grâce à la propriété de la borne supérieure, nous pouvons montrer l'existence de la partie entière d'un réel dont la preuve a été laissée en suspens dans le chapitre 3. Commençons par montrer la propriété d'Archimède (qui peut nous sembler évidente...) :

Proposition (propriété d'Archimède). *Pour tout réel x, il existe un entier naturel n tel que $x < n$.*

Cette propriété n'est pas explicitement au programme. Nous l'énonçons dans le simple but de montrer l'existence de la partie entière d'un réel ensuite.

Démonstration.

$\square$

Proposition/Définition (partie entière d'un réel). *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n + 1$. L'entier n est appelée la partie entière de x et notée $\lfloor x \rfloor$.*

Démonstration.

$\square$

Remarque : Dans la même genre, on peut montrer que toute partie A non vide de $\mathbb{Z}$ qui est majorée (dans $\mathbb{R}$) possède un maximum : une telle partie possède une borne supérieure $M \in \mathbb{R}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $M \notin A$. Comme $M - 1 < M$, par théorème de caractérisation, il existe $a \in A$ tel que $M - 1 < a$. Et pour la même raison, il existe $b \in A$ tel que $a < b$. On a donc $a < b \leqslant M$ et $M < a + 1$ donc $0 < b - a < M - a < 1$. Ainsi l'entier $b - a$ est compris strictement entre 0 et 1 : c'est absurde. Ainsi $M \in A$: A admet un maximum.
On montre de même que tout partie non vide minorée de $\mathbb{Z}$ admet une borne inférieure. Les résultats analogue dans $\mathbb{N}$ en découlent.

C'est une propriété énoncée comme une axiome de $\mathbb{Z}$ dans le chapitre 3 à condition que le majorant soit un entier. La preuve ci-contre fonctionne que le majorant soit entier ou non.

II Caractérisation des intervalles

On rappelle que les intervalles sont les parties de $\mathbb{R}$ qui sont de la forme suivante (avec a et b des réels) :

$[a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x \leqslant b\}$ (intervalle fermé borné ou segment),
$]a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leqslant b\}$ si $a < b$ (intervalle semi-ouvert borné),
$[a\,;b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x < b\}$ si $a < b$ (intervalle semi-ouvert borné),
$]a\,;b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$ si $a < b$ (intervalle ouvert borné),
$]-\infty\,;a] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leqslant a\}$ (intervalle fermé non borné),
$]-\infty\,;a[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < a\}$ (intervalle ouvert non borné),
$[a\,;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geqslant a\}$ (intervalle fermé non borné),
$]a\,;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > a\}$ (intervalle ouvert non borné),
$]-\infty\,;+\infty[= \mathbb{R}$ (intervalle ouvert et fermé non borné).

On y ajoute aussi l'intervalle vide.

Voici un moyen très pratique de montrer qu'un ensemble est un intervalle, même sans connaître ses extrémités (c'est-à-dire a, b ou $\pm\infty$) :

Les intervalles sont donc toutes les parties de $\mathbb{R}$ qui n'ont pas de « trou ». Dès qu'elles contiennent deux points, elle contient toutes les valeurs intermédiaires (y compris si l'intervalle est vide puisque, pour tous réels x et y, la proposition

« $x \in \varnothing$ et $y \in \varnothing$ et $x \leqslant y$ »

est fausse donc entraîne la proposition « $[x\,;y] \subset I$ »).

Théorème (caractérisation des intervalles). *Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, pour tous réels x de y de I tels que $x \leqslant y$, le segment $[x\,;y]$ est inclus dans I.*

Démonstration. Déjà un intervalle vérifie cette propriété, quel que soit sa forme parmi celles listées ci-dessus. En effet, traitons le cas où $I = [a\,;b[$, avec a et b des réels tels que $a < b$ (les autres cas sont analogues et laissés en exercice). On se donne $(x, y) \in I^2$ tels que $x \leqslant y$. Pour tout $t \in [x\,;y]$, on a alors $a \leqslant x \leqslant t \leqslant y < b$ donc $t \in [a\,;b[$. Ainsi $[x\,;y] \subset I$. Réciproquement, donnons-nous une partie I de $\mathbb{R}$ non vide et vérifiant cette propriété.

- *Premier cas : I est majoré mais non minorée.*

- *Deuxième cas : I est minorée mais non majorée.* On note a la borne inférieure de I et on montre de même que $I =]a\,;+\infty[$ (si $a \notin I$) ou $I = [a\,;+\infty[$ (si $a \in I$).
- *Troisième cas : I est minorée et majorée.* On note a la borne inférieure de I, b la borne supérieure de I et on montre de même que $I =]a\,;b[$ (si $a \notin I$ et $b \notin I$) ou $I =]a\,;b]$ (si $a \notin I$ et $b \in I$) ou $I = [a\,;b[$ (si $a \in I$ et $b \notin I$) ou $I = [a\,;b]$ (si $a \in I$ et $b \in I$).
- *Quatrième cas : I n'est ni majorée, ni minorée.* On montre de même que $I = \mathbb{R}$.

Dans tous les cas I est bien un intervalle. □

III Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$

De nombreux résultats vus ci-dessus seraient simplifiés dans leur énoncé si $+\infty$ et $-\infty$ étaient des réels. Définitivement ce ne sont pas des réels mais on peut tout de même les « ajouter à $\mathbb{R}$ » :

Cela consiste en fait à se donner deux éléments distincts non réels, de les appeler $+\infty$ et $-\infty$ et de créer un ensemble qui contient $\mathbb{R}$ et ces deux éléments en s'arrangeant pour prolonger l'ordre, la somme, etc.

Définition (droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$). *On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$ et on appelle cet ensemble la droite (numérique) achevée.*

C'est un prolongement partiel : nous ne donnons pas de sens aux opérations :

$$(+\infty) + (-\infty)$$
$$(+\infty) - (+\infty)$$
$$(-\infty) - (-\infty)$$
$$0 \times (\pm\infty)$$
$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Définition (opérations sur $\overline{\mathbb{R}}$). *On prolonge les opérations algébriques de $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant :*

- *Pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}} \backslash \{-\infty\}$, $x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$.*
- *Pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}} \backslash \{+\infty\}$, $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$.*
- *Pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}} \backslash \{0\}$,*
  - ⋆ *si $x > 0$, $x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = +\infty$ et $x \times (-\infty) = (-\infty) \times x = -\infty$.*
  - ⋆ *si $x < 0$, $x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = -\infty$ et $x \times (-\infty) = (-\infty) \times x = +\infty$.*
- $\dfrac{1}{+\infty} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$.

Définition (ordre sur $\overline{\mathbb{R}}$). *On étend à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation d'ordre $\leqslant$ en posant :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad -\infty < x < +\infty.$$

Remarques :

- La notion d'intervalle se prolonge dans $\overline{\mathbb{R}}$. Il y en a de quatre types :
  - ⋆ les intervalles $[a\,;b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \,|\, a \leqslant x \leqslant b\}$ avec $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$.
  - ⋆ les intervalles $]a\,;b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \,|\, a < x \leqslant b\}$ avec $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$.
  - ⋆ les intervalles $[a\,;b[= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \,|\, a \leqslant x < b\}$ avec $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$.
  - ⋆ les intervalles $]a\,;b[= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \,|\, a < x < b\}$ avec $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$.

... avec la convention que $]a\,;b]$, $[a\,;b[$ et $]a\,;b[$ sont vides si $a = b$.

- Comme sur $\mathbb{R}$, on peut définir les notions de minorant, majorant, maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure sur $\overline{\mathbb{R}}$. On peut montrer (je vous laisse le faire en exercice) que ces notions prolongent bien celles sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire que, par exemple, si une partie de $\mathbb{R}$ a une borne supérieure sur $\mathbb{R}$, alors elle est une borne supérieure sur $\overline{\mathbb{R}}$). On peut aussi montrer (mais c'est hors-programme) que la propriété de la borne supérieure s'énonce ainsi dans $\overline{\mathbb{R}}$:

  Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

  En particulier :
  - ⋆ l'intervalle $\mathbb{R}_+$ admet $+\infty$ pour borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ (l'intervalle $[0\,;+\infty]$ admet même $+\infty$ pour maximum).
  - ⋆ l'ensemble $\varnothing$ admet $-\infty$ pour borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$. En effet, tout élément de $\overline{\mathbb{R}}$ est un majorant de $\varnothing$ donc $-\infty$ est bien le plus petit des majorants de $\varnothing$.

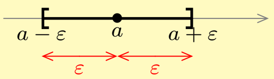
  En effet, pour tous $(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, la proposition « $x \in \varnothing$ » est fausse donc l'implication « $x \in \varnothing \Rightarrow x \leqslant y$ » est vraie.

  Par ailleurs, le théorème de caractérisation des intervalles reste vrai pour les intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$.

IV Introduction à la topologie de $\mathbb{R}$

La topologie d'un ensemble (muni d'une norme, c'est-à-dire d'une fonction permettant de calculer des distances) a pour but de formaliser les concepts de voisinage, d'infiniment petit et d'infiniment grand afin d'étudier rigoureusement les notions de limite et de continuité. Un chapitre entier sera consacré à la topologie en deuxième année. L'objectif de cette partie est de présenter modestement quelques éléments de la topologie de $\mathbb{R}$ qui seront utiles pour formaliser quelques concepts des chapitres 14 et 18.

1) Voisinages

> Le plus simple lorsque l'on cherche un voisinage est de le prendre déjà sous la forme d'un intervalle du type $[a-\varepsilon\,;a+\varepsilon]$ si $a \in \mathbb{R}$:
>
> 
>
>
> du type $[A\,;+\infty[$ si $a=+\infty$ ou du type $]-\infty\,;A]$ si $a=-\infty$.

Définition. *Soit V une partie de $\mathbb{R}$.*

- *Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que V est un voisinage de a s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[a-\varepsilon\,;a+\varepsilon] \subset V$.*
- *On dit que V est un voisinage de $+\infty$ s'il existe $A > 0$ tel que $[A\,;+\infty[\subset V$.*
- *On dit que V est un voisinage de $-\infty$ s'il existe $A < 0$ tel que $]-\infty\,;A] \subset V$.*

Remarques :

- Ce qui importe réellement dans un voisinage de $a \in \mathbb{R}$ est que l'on puisse trouver $\varepsilon > 0$ aussi petit que l'on veut. Ce qui importe réellement dans un voisinage de $+\infty$ est que l'on puisse trouver A aussi grand que l'on veut. Ce qui importe réellement dans un voisinage de $-\infty$ est que l'on puisse trouver A aussi grand que l'on veut dans les négatifs.
- On trouve parfois d'autres convention dans la définition d'un voisinage. Par exemple :
  - ⋆ que les intervalles soient ouverts (c'est-à-dire avoir $[a-\varepsilon\,;a+\varepsilon] \subset V$, $]A\,;+\infty[\subset V$ et $]A\,;+\infty[\subset V$ respectivement).

> Mais ε soit impérativement être strictement positif lui !

  - ⋆ que $A \geqslant 0$ ou $A \in \mathbb{R}$ au lieu de $A > 0$ dans le cas d'un voisinage de $+\infty$, que $A \leqslant 0$ ou $A \in \mathbb{R}$ au lieu de $A < 0$ dans le cas d'un voisinage de $-\infty$.

  Ces modifications fournissent des définitions totalement équivalentes donc on n'hésitera pas à passer de l'une à l'autre sans aucun scrupule. Pour s'en convaincre, montrons le sur quelques exemples :

  - ⋆
  - ⋆ Si il existe $A > 0$ tel que $[A\,;+\infty[\subset V$, alors $A \geqslant 0$. Si il existe $A \geqslant 0$ tel que $]A\,;+\infty[\subset V$, alors $[A'\,;+\infty[\subset V$ en posant $A' = A+1$.
- Pour un voisinage V de $a \in \mathbb{R}$, dans la définition, on a pris un intervalle centré en a par commodité. Mais on aurait pu prendre n'importe quel intervalle inclus dans V contenant strictement a (c'est-à-dire dont a n'est pas une borne). En effet : supposons qu'il existe deux réels s et t tels que $s < a < t$ et $[s\,;t] \subset V$.

> Là encore on peut le prendre ouvert ou fermé, cela ne change rien.

Proposition.

- *Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si V et W sont deux voisinages de a, alors $V \cap W$ est encore un voisinage de a.*
- *Soient a et b deux points distincts de $\overline{\mathbb{R}}$. Il existe un voisinage de V_a de a et un voisinage V_b de b tels que $V_a \cap V_b = \varnothing$.*

Démonstration.

L'idée est de diminuer ε et donc l'intervalle $[a-\varepsilon\,;a+\varepsilon]$ pour qu'il « rentre » dans V et dans W à la fois.

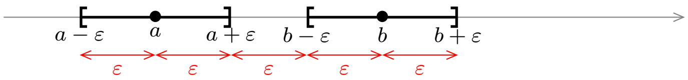
- $\star$ Supposons que $a \in \mathbb{R}$.

L'idée est d'augmenter A et donc diminuer l'intervalle $[A\,;+\infty[$ pour qu'il « rentre » dans V et dans W à la fois.

  $\star$ Supposons que $a = +\infty$ (raisonnement analogue pour $a = -\infty$). Il existe $A > 0$ et $A' > 0$ tels que $[A\,;+\infty[\subset V$ et $[A'\,;+\infty[\subset W$. Posons $A'' = \max\{A; A'\}$ de sorte que $A'' \geqslant A$ et $\varepsilon'' \geqslant A'$ et donc $[A''\,;+\infty[\subset [A\,;+\infty[\subset V$ et $[A''\,;+\infty[\subset [A'\,;+\infty[\subset W$. On en déduit que $[A''\,;+\infty[\subset V \cap W$.

Ce résultat sera utile pour montrer que la limite d'une suite (dans le chapitre 14) ou d'une fonction (dans le chapitre 4) est unique.

- $\star$ Supposons que $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.



  $\star$ Supposons que $a \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$. Alors $V_a = [a-1\,;a+1]$ et $V_b = [a+2\,;+\infty[$ sont des voisinages disjoints de a et b respectivement.

  $\star$ Supposons que $a = -\infty$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors $V_a =]-\infty\,;b-2]$ et $V_b = [b-1\,;b+1]$ sont des voisinages disjoints de a et b respectivement.

  $\star$ Supposons que $a = -\infty$ et $b + \infty$. Alors $V_a =]-\infty\,;-1]$ et $V_b = [1\,;+\infty[$ sont des voisinages disjoints de a et b respectivement. $\square$

Définition. *Soit f une fonction définie sur une partie non vide D de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f vérifie une certaine propriété au voisinage de a lorsqu'il existe un voisinage de a tel que $f\big|_{D\cap V}$ vérifie cette propriété.*

Exemples :

- *f est strictement positive au voisinage de a si il existe un voisinage V de a tel que, pour tout $x \in D \cap V$, $f(x) > 0$.*
- *f est majorée au voisinage de a si il existe $M > 0$ et un voisinage V de a tel que, pour tout $x \in D \cap V$, $f(x) \leqslant M$.*

2) Ouvert, fermé, point intérieur, point adhérent (HP)

Donnons quelques définitions de concept dont on parlera à l'oral pendant les cours mais qui ont un sens rigoureux et qui seront formalisés en deuxième année dans un cadre plus général. Nous ne montrerons rien dans ce paragraphe.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

On le comprend bien avec un intervalle où l'on obtient l'intérieur en privant l'intervalle de ses bornes.

- On dit que $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est un point intérieur à A si A est un voisinage de a. L'ensemble des points intérieurs à A est noté $\overset{o}{A}$ et appelé intérieur de A. Intuitivement, c'est l'ensemble des points de A qui ne sont pas au « bords ».

- On dit que $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est adhérent à A si, pour tout voisinage V_a de a, $V_a \cap A \neq \varnothing$. L'ensemble des points adhérents à A est noté $\overline{A}$ (à ne pas confondre avec le complémentaire de A) ou $\mathrm{adh}(A)$ et appelé adhérence de A. Intuitivement, c'est l'ensemble des points de A avec les « bords » en plus. En particulier :
  - ⋆ Si $a \in \mathbb{R}$, a est adhérent à A si et seulement si a n'est pas dans l'intérieur du complémentaire de A.
  - ⋆ Si $a = +\infty$ (respectivement $-\infty$), alors a est adhérent à A si et seulement si A n'est pas majoré (respectivement minoré).

  On en parlera surtout dans le chapitre 18 puisque les points adhérents seront tous les points en lesquels on pourra calculer la limite (sous réserve d'existence) d'une fonction définie sur A. Lorsque A est une union d'intervalles non vides et non réduits à un points, il s'agit de tous les points de A, des bornes (finies ou infinies) de ces intervalles, de $+\infty$ si A n'est pas majorée et de $-\infty$ si A n'est pas minorée.
- On dit que A est un ouvert s'il est un voisinage de tous ses points, ce qui est équivalent à dire qu'il est égal à son intérieur. C'est le cas des intervalles ouverts.
- On dit que A est un fermé si son complémentaire est un ouvert, ce qui est équivalent à dire qu'il est égal à son adhérence.

On le comprend bien avec un intervalle où l'on obtient l'adhérence en incluant les bornes.

Ci-dessus, on a parlé de « bord » d'une partie de $\mathbb{R}$. Précisément il s'agit de l'adhérence privée de l'intérieur. Autant on arrive bien à visualiser avec un intervalle (ce sont les deux bornes) mais c'est beaucoup plus obscur pour une partie quelconque. Par exemple quel est le bord de $\mathbb{Q}$? Dans le paragraphe suivant, nous allons montrer que l'adhérence de $\mathbb{Q}$ est égale à $\mathbb{R}$. Celle de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ aussi donc l'intérieur de $\mathbb{Q}$ est $\varnothing$. Cela veut dire que le bord de $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{R}$ tout entier.

3) Partie dense dans $\mathbb{R}$

Définition. *Soit D une partie de $\mathbb{R}$. On dit que D est dense dans $\mathbb{R}$ si D rencontre tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire pour tout intervalle ouvert I non vide, $I \cap D \neq \varnothing$).*

Théorème. *Soit D une partie de $\mathbb{R}$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*
1. *D est dense dans $\mathbb{R}$.*
2. *Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$, il existe $z \in D$ tel que $x < z < y$.*
3. *Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$, il existe une infinité d'éléments de D appartenant à $]x\,;y[$.*

On peut aussi montrer que D est dense si et seulement si D rencontre tout voisinage de tout réel. Avec la notion d'adhérence vue dans le paragraphe précédent, une partie est dense si et seulement si tout réel est adhérent à celle-ci.

Rappelons qu'une partie finie de $\mathbb{R}$ admet un maximim (cf. chapitre 3).

Démonstration.
1 ⇒ 2. Supposons que D est dense dans $\mathbb{R}$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$. L'intervalle $]x\,;y[$ rencontre D par définition : il existe $z \in D \cap]x\,;y[$ donc $x < z < y$.

2 ⇒ 1. Supposons que l'assertion 2 soit vraie. Soit I un intervalle ouvert non vide. Il admet donc deux éléments x et y (sinon I est un singleton donc est fermé) tels que $x < y$. Il existe donc $z \in D$ tel que $x < z < y$ par hypothèse. Comme $[x\,;y] \subset I$ (puisque I est un intervalle), on a $z \in I$ donc $I \cap D \neq \varnothing$. Ainsi D est dense dans $\mathbb{R}$.

2 ⇒ 3. Supposons que l'assertion 2 soit vraie. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $D \cap]x\,;y[$ ne contient qu'un nombre fini d'éléments. Notons alors M le plus grand d'entre eux. Il vérifie $x < M < y$. Donc le point 2 assure qu'il existe $z \in D$ tel que $M < z < y$. Par conséquent $z \in D \cap]x\,;y[$ mais comme $z > M$, cela contredit le fait que M soit le plus grand élément de $D \cap]x\,;y[$. Il y en a donc une infinité.
3 ⇒ 2. Immédiat . □

Théorème. *$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

En particulier, entre deux irrationnels distincts (aussi proches que l'on veut), on peut toujours trouver un rationnel.

Démonstration.

$\square$

Comment a-t-on pensé à ce choix de q dans la démonstration ? L'idée est de partir de 0 et de lui ajouter ou soustraire $\frac{1}{q}$ jusqu'à ce qu'on tombe entre x et y. Il est donc naturel que la longueur de l'intervalle $]x\,;y[$ soit supérieure à $\frac{1}{q}$.

Remarques :

- Si x et y sont deux rationnels tels que $x < y$, alors $r = \dfrac{x+y}{2}$ convient immédiatement en tant que rationnel compris strictement entre x et y.
- Dans le chapitre 14, nous verrons une autre démonstration de la densité de $\mathbb{Q}$ utilisant des suites.
- Dans le chapitre 14, nous montrerons aussi que l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux (les rationnels de la forme $\frac{k}{10^n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$) est dense dans $\mathbb{R}$.

Théorème. $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration.

$\square$