Chapitre 4

Fonctions

Partie B : Rappels et compléments sur les limites, la continuité et la dérivabilité

Dans cette partie, nous rappelons les résultats vus au lycée sur les limites, la continuité et la dérivabilité. Nous les complétons par quelques résultats supplémentaires. Mais nous ne montrerons (presque) rien : l'objectif est d'avoir des outils permettant de faire des études de fonctions. Nous reviendrons en profondeur (et en démontrant tout) sur toutes ces notions dans les chapitres 21, 22 et 23.

On considère deux ensembles E et F qui sont des unions d'intervalles non vides et non réduits à un point. On se donne $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$.

I Limites d'une fonction

Soit a un point de E ou une extrémité (éventuellement infinie) d'un des intervalles constituant E.

1) Notion de limite

Voici des définitions de la notion de limites que l'on peut trouver dans des cours de Terminale :

- **Limite finie en a.** On dit que f admet un réel ℓ pour limite en a si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x « suffisamment proche » de a.
- **Limite infinie en a.** On dit que f tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) en a si tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ (respectivement $]-\infty\,;A[$), avec $A \in \mathbb{R}$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x « suffisamment proche » de x_0.
- **Limite à gauche/droite.** Si $a \in \mathbb{R}$ et f, restreinte à l'intervalle $I \cap\,]-\infty\,;a[$ (respectivement $I \cap]a\,;+\infty[$), admet une limite en a, on dit que f admet une limite à gauche (respectivement à droite) en a ou encore une limite en a^- (respectivement a^+).

Ces définitions ne sont pas parfaitement rigoureuses (qu'est ce que « suffisamment proche » veut dire ?) mais totalement satisfaisantes pour l'usage que nous allons en faire dans ce chapitre.

Proposition (unicité de la limite). *Si f admet une limite ℓ (finie ou infinie) en a, alors celle-ci est unique. On l'appelle la limite de f en a et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{a} f = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.*

En remplace a par a^+ ou a^- dans ces notations si c'est une limite à droite ou à gauche respectivement.

La variable x dans les notations $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ est muette (et donc on peut la remplacer et on ne l'introduit pas).

⚠ Une fonction peut tout à fait ne pas admettre de limite en a. Ainsi, avant de manipuler toute limite, il faut impérativement que l'on ait prouvé qu'elle existe.

2) Opérations sur les fonctions admettant une limite

Définition (limites 0^+ et 0^-). *On note $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0^+$ (respectivement 0^-) pour signifier que f tend vers 0 en a tout en étant strictement positive (respectivement négative) lorsque x est « suffisamment proche » de a.*

On parle de forme indéterminée (et on note F.I. dans les tableaux) quand on ne peut pas déterminer la limite d'une opération sur les fonctions de manière générale. Il s'agit des limites de la forme :

« $\infty - \infty$ »

« $0 \times \infty$ »

« $\dfrac{0}{0}$ »

« $\dfrac{\infty}{\infty}$ »

On en reparle plus bas.

Tous ces résultats sont vrais si on remplace a par a^+ ou par a^-.

Théorème (opérations algébriques sur les limites).

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$

$\lim\limits_{x\to a} g(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to a}(\lambda f(x))$:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda>0$	$\lambda\ell$	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda=0$	0	0	0
$\lambda<0$	$\lambda\ell$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to a}|f(x)|$:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\lvert f(x)\rvert$	$\lvert\ell\rvert$	$+\infty$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{g(x)}$:

$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\ell'\neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{g(x)}$	$\dfrac{1}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))$:

$\lim\limits_{x\to a} g(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell=0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell'>0$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell'<0$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell'=0$	0	0	0	F.I.	F.I.
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$:

$\lim\limits_{x\to a} g(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell=0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell'>0$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell'<0$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$-\infty$	$+\infty$
0^+	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$
0^-	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0^+	0^-	0	F.I.	F.I.
$-\infty$	0^-	0^+	0	F.I.	F.I.

Il est préférable d'employer la notation $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ (surtout quand on est débutant) puisqu'elle empêche de faire certaines erreurs de manipulations.

Par exemple on peut écrire sans problème une phrase du type

$$\text{« } f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \text{ et } g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell' \text{ donc } f(x)+g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell+\ell' \text{ »}$$

... sauf si $\ell = \pm\infty$ et $\ell' = -\ell$. Mais alors on se rend bien compte que c'est une erreur. En revanche, en écrivant

$$\text{« } \lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) \text{ »}$$

Si $f(x) = x$ et $g(x) = -x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors cela revient à écrire l'horreur : $0 = \infty - \infty$! !

on ne se rend pas compte du tout qu'il y a une erreur dans ce cas précis. Mais c'est pire que ça : même si tout va bien, cette rédaction est illicite si on n'a pas au préalable justifié que ces trois limites existent. Ce n'est pas le cas de l'autre notation car on dit que les deux limites existent donc la troisième aussi.

Comment lever une forme indéterminée ? Et bien cette question va nous occuper une bonne partie de l'année.

- Lorsqu'il s'agit d'un quotient ou d'un produit faisant apparaître des puissances, des logarithmes ou des exponentielles, on peut utiliser des croissances comparées (cf. partie C).
- On peut utiliser l'outil de la dérivation lorsque l'on reconnaît un taux d'accroissements (cf. paragraphe III). Citons les trois plus usuels :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

- Lorsque c'est une somme (du type $\infty - \infty$ donc), l'argument central est de factoriser par le « terme le plus gros » (on s'aide pour cela de croissances comparées ou de comparaison, cf. paragraphe suivant).
- Un outil souvent efficace quand on est en présence d'une somme ou différence avec des racines carrées est la quantité conjuguée (on en verra un exemple dans le paragraphe I.4).

Moyen mnémotechnique : on peut « remplacer » x par $u(t)$ puisque $u(t)$ est proche de a quand t est proche de b.

Théorème (limite d'une composée). *Soit $u : F \longrightarrow E$. Soit b un point de F ou une extrémité (éventuellement infinie) d'un des intervalles constituant F. Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.*

Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ et $u(t) \xrightarrow[t\to b]{} a$, alors $f(u(t)) \xrightarrow[t\to b]{} \ell$.

3) Théorème d'encadrement, de majoration, de minoration

Ce théorème est aussi connu sous le nom « théorème des gendarmes » mais son nom officiel est théorème d'encadrement.

Théorème (d'encadrement). *Soient $h : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Supposons que*

- *Pour tout $x \in E$, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$.*
- *$g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ et $h(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.*

Alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

⚠ si $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$, on ne peut rien dire sur la limite éventuelle de f en a.

Théorème (de majoration/minoration). *Soit $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in E$, $f(x) \leqslant g(x)$.*

- *Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$, alors $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$.*
- *Si $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$.*

4) Asymptotes

On peut également être amené à étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote. Pour cela on étudie le signe de $f(x)-ax-b$ pour « x au voisinage de $\pm\infty$ ». Si le signe est positif alors la courbe est au-dessus, sinon elle est en-dessous. On verra des outils adaptés dans le chapitre 26.

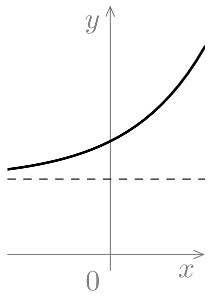
Définition (asymptotes).

- *Soit a une extrémité réelle de E. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$, on dit que la droite d'équation $x=a$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ en a. On dit aussi que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées en a.*
- *Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Si E n'est pas majorée (respectivement minorée) et si*

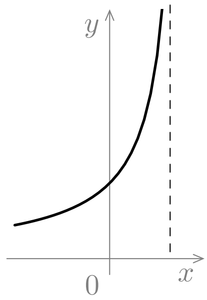
$$f(x)-(\alpha x+\beta) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad \left(\text{respectivement} \quad f(x)-(\alpha x+\beta) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0\right),$$

on dit que la droite d'équation $y=\alpha x+\beta$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

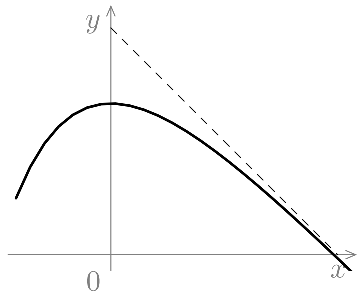
  - ⋆ *Si $a\neq 0$, on parle d'asymptote oblique.*
  - ⋆ *Si $a=0$, on parle d'asymptote horizontale. On dit aussi que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote parallèle à l'axe des abscisses en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).*



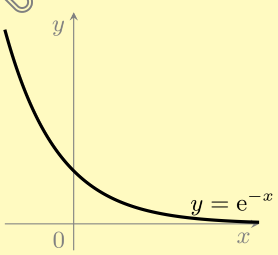
asymptote horizontale

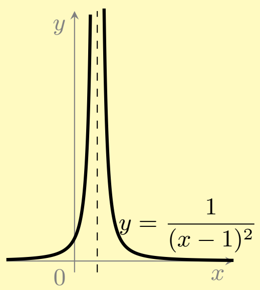


asymptote verticale



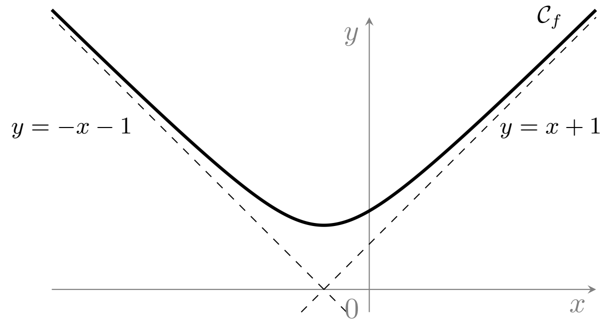
asymptote oblique





Exemples :

Il est classique de penser à la quantité conjuguée lorsque l'on veut calculer la limite d'une différence impliquant une racine carrée et une forme indéterminée.



Tout le paragraphe ci-contre s'adapte en $-\infty$ en remplaçant simplement $x \to +\infty$ par $x \to -\infty$.

Remarque : Dans le chapitre 26, nous verrons des méthodes très efficaces pour trouver des équations d'éventuelles asymptotes. En attendant on peut regarder la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

- Si $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pm\infty$, alors on dit que le graphe de f présente un branche parabolique en direction de l'axe des ordonnées.

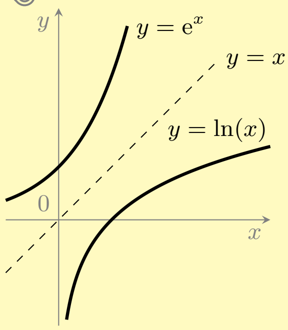
  C'est le cas de la fonction $\exp$*, par croissances comparées (cf. partie C).*

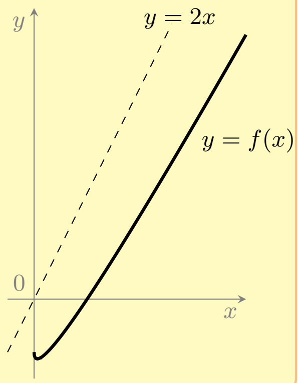
- Si $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \alpha \in \mathbb{R}$, alors on regarde ensuite la limite de $f(x) - \alpha x$ quand x tend vers $\pm\infty$.
  - ⋆ Si c'est un réel β, alors le graphe de f présente en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = \alpha x + \beta$.
  - ⋆ Si $f(x) - \alpha x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pm\infty$, on dit que le graphe de f présente une branche parabolique en direction de la droite d'équation $y = \alpha x$.

    C'est le cas si f est la fonction $x \longmapsto 2x - 1 - \sqrt{x}$ avec $\alpha = 2$.

    Dans le cas où $\alpha = 0$, on dit aussi que le graphe de f présente un branche parabolique en direction de l'axe des abscisses.

    C'est le cas de la fonction $\ln$*, par croissances comparées (cf. partie C).*





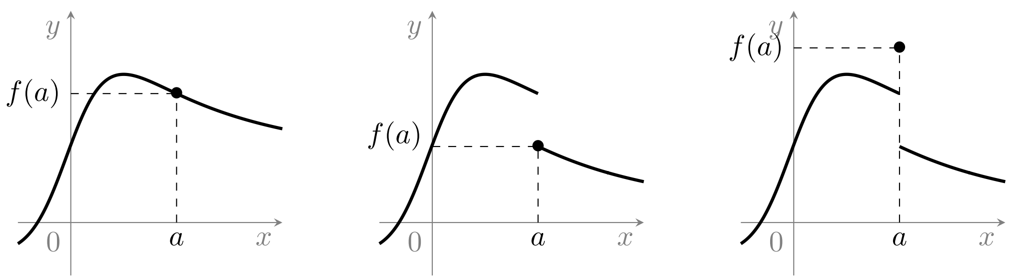
II Continuité

Soit a un réel de E.

1) Notion de continuité

Définition (continuité en un point). *On dit que la fonction f est continue en a si* $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$.

Graphiquement, une fonction est continue en un point si on peut tracer la courbe sans lever le crayon au voisinage de ce point. Toutefois cette approche a ses limites puisqu'on a l'impression qu'une fonction ne peut être que continue que sur au moins un intervalle non réduit à un point alors qu'on verra (dans le chapitre 21) qu'une fonction peut être continue en un seul point.



fonction continue en a — fonction discontinue en a — fonction discontinue en a

Définition (continuité sur un domaine). *On dit que f est continue sur E si elle est continue en tout point de E.*

Définition. *On note $\mathscr{C}(E,\mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}^0(E,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur E.*

2) Opérations sur les fonctions continues

a) Opérations algébriques

> ⚠ Ces théorèmes donnent des conditions **suffisantes** de continuité mais non nécessaires : si f et g sont continues, ils disent que $f+g$, fg et f/g sont continues mais ils ne disent pas ce qui se passe si f ou g n'est pas continue. Dit autrement, il se peut tout à fait que $f+g$ ou fg ou f/g soient continues alors que f ou g ne l'est pas (par exemple, si f n'est pas continue, alors $f-f=0$ l'est).

Théorème. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f et g sont continues en a, alors $|f|$, $f+g$, λf et fg sont continues en a.*
Si, de plus, $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues en a.

Théorème. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f et g sont continues sur E alors $|f|$, $f+g$, λf et fg sont continues sur E.*
Si, de plus, g ne s'annule pas sur E, alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur E.

b) Composition

> ⚠ Idem si u ou f ne sont pas continue, on ne peut pas conclure que $f\circ u$ ne l'est pas.

Théorème. *Soit $u : F \longrightarrow E$. Soit $b \in F$. Si u est continue en b et si f est continue en $u(b)$, alors $f\circ u$ est continue en b.*

Théorème. *Soit $u : F \longrightarrow E$. Si u est continue sur F et si f est continue sur E, alors $f\circ u$ est continue sur F.*

Remarque : Dire que f est continue en a signifie que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$. Il faut donc penser à cet argument lorsque l'on applique le théorème de la limite d'une composée.

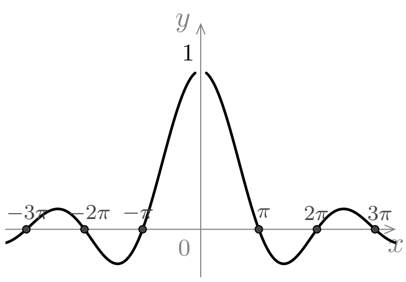
c) Prolongement par continuité

> ⚠ Si f est déjà définie en a, hors de question de la prolonger. Hors de question aussi de prolonger f en $\pm\infty$ si elle admet une limite finie en $\pm\infty$: cela n'a aucun sens.

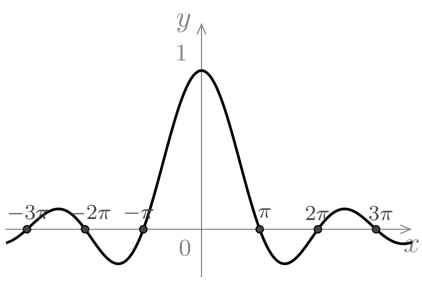
Proposition. *Soit a une extrémité finie d'un des intervalles constituant E telle que f n'est pas définie en a. Si f admet une limite finie ℓ en a alors la fonction f prolongée en a en posant $f(a)=\ell$ est continue en a. On dit que f est prolongée par continuité en a.*

Exemple : *La fonction* sinc, *appelée sinus cardinal, est définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$



avant



après

3) Le théorème des valeurs intermédiaires

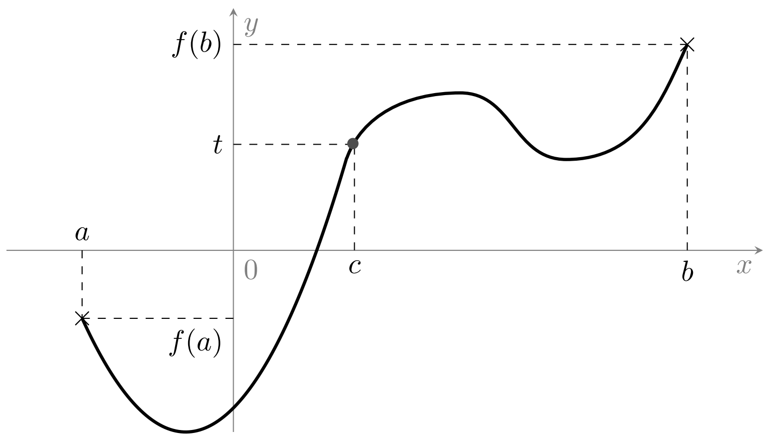
C'est le théorème le plus important sur la continuité :

On prend souvent la convention que $[f(a)\,;f(b)]$ désigne $[f(b)\,;f(a)]$ lorsque $f(b) < f(a)$. Le TVI dit alors que tout élément de $[f(a)\,;f(b)]$ est l'image d'un point de $[a\,;b]$. Ainsi

$$[f(a)\,;f(b)] \subset f([a\,;b]).$$

Théorème (des valeurs intermédiaires – TVI). *Soient a et b des réels tels $a < b$. Supposons que f est continue sur $[a\,;b]$. Tout réel t compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet au moins un antécédent dans $[a\,;b]$:*

$$\exists c \in [a\,;b]\,, \qquad f(c) = t.$$



Exemple :

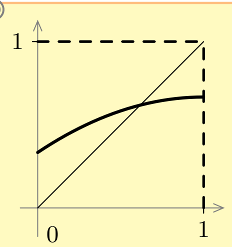
Le TVI ne dit pas ce qui se passe pour les réels qui ne sont pas compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Par exemple $\cos$ est continue sur $\left[0\,;\frac{5\pi}{3}\right]$, $\cos(0) = 1$, $\cos(\frac{5\pi}{3}) = \frac{1}{2}$. On a $0 \notin \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ alors que $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Remarques :

- Le TVI est donc un théorème d'existence : il garantit que l'équation $f(x) = t$ admet une solution dès que t est une valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$.
- Le TVI dit que $[f(a)\,;f(b)] \subset f([a\,;b])$ mais il n'y a pas égalité en général sauf hypothèse additionnelle de stricte monotonie (cf. paragraphe suivant). Nous verrons dans la chapitre 21 que le TVI entraîne que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle (c'est faux en général) mais pas forcément du même type (borné ou non, ouvert ou non). Nous ne soulèverons pas cette difficulté pour le moment mais attention à ne rien affirmer sans preuve à ce sujet !
- Le TVI se généralise aisément à des intervalles ouverts ou semi-ouverts dont les bornes a et b sont éventuellement infinies. Dans ce cas, on ne raisonne pas avec $f(a)$ et $f(b)$ mais avec les limites (éventuellement infinies) de la fonction f en a et b.
- Comme on le voit sur le graphe ci-dessus, le TVI ne garantit pas l'unicité de l'antécédent de chaque valeur intermédiaire. Toutefois, on a déjà vu dans la partie A que, si f est strictement monotone, alors tout réel admet au plus un antécédent par f. Ainsi :

Corollaire (du TVI). *Sous les hypothèses du TVI et en supposant de plus que f est strictement monotone, le réel c est unique.*

Le TVI et son corollaire sont les outils principaux pour démontrer qu'une fonction f admet un point fixe. Rappelons que, dans ce cas, il faut avoir le réflexe d'introduire la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$ et de montrer qu'elle admet des valeurs d'annulations (qui sont alors les points fixes).



Ce point fixe n'est pas unique a priori, à moins de savoir, par exemple, que g est strictement monotone sur $[0\,;1]$.

Exemple : *Soit f une fonction continue sur $[0\,;1]$ telle que $[0\,;1]$ est stable par f. Montrons que f possède un point fixe.*

4) Le théorème de la bijection

Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point.

Théorème (de la bijection). *Si f est continue et strictement monotone sur I, alors f est une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$. De plus f^{-1} est continue sur $f(I)$.*

On a déjà montré dans la partie A que f^{-1} est strictement monotone et de même sens de variation que f.

Mais comment trouver $f(I)$? En utilisant le résultat suivant :

Proposition. *Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. Le tableau suivant donne $f(I)$ lorsque f est continue et strictement croissante sur l'intervalle I :*

I	$[a\,;b]$	$]a\,;b]$	$[a\,;b[$	$]a\,;b[$
$f(I)$	$[f(a)\,;f(b)]$	$\left]\lim\limits_a f\,;f(b)\right]$	$\left[f(a)\,;\lim\limits_b f\right[$	$\left]\lim\limits_a f\,;\lim\limits_b f\right[$

Dans le cas où f est strictement décroissante :

I	$[a\,;b]$	$]a\,;b]$	$[a\,;b[$	$]a\,;b[$
$f(I)$	$[f(b)\,;f(a)]$	$\left[f(b)\,;\lim\limits_a f\right[$	$\left]\lim\limits_b f\,;f(a)\right]$	$\left]\lim\limits_b f\,;\lim\limits_a f\right[$

En particulier l'intervalle $f(I)$ est du même type (ouvert, fermé ou semi-ouvert) que l'intervalle I.

En pratique, plutôt que de s'embarrasser de 8 cas, si on donne les hypothèses de continuité et de stricte monotonie, on peut se contenter de « lire » $f(I)$ sur un tableau de variations (cf. paragraphe III.4 et partie D).

Remarque : Avec les notations des deux résultats précédents, si $J = f(I)$, alors $I = f^{-1}(J)$. En appliquant la proposition suivante avec la bijection f^{-1}, qui est continue et strictement monotone (de même monotonie que f) sur J, on obtient les limites de f^{-1} aux extrémités de J.

Par exemple, si $I =]a\,;b]$ et f est strictement décroissante, alors $J = \left[f(b)\,;\lim\limits_a f\right[$. Si on note $\alpha = \lim\limits_a f$ et $\beta = f(b)$ (et donc $J = [\beta\,;\alpha[$), alors

$$I = f^{-1}(J) = \left]\lim_\alpha f^{-1}\,;f^{-1}(\beta)\right].$$

On en déduit que $\lim\limits_\alpha f^{-1} = a$.

Exemple :

On verra d'autres exemples dans la partie C.

III Dérivabilité

Soit a un réel de E. Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point inclus dans E.

1) Notion de dérivabilité

En d'autres termes, le nombre dérivé est, quand elle existe, la limite du taux d'accroissement.

Définition. *On dit que f est dérivable en a lorsque la fonction*

$$\tau_a : \left\{ \begin{array}{ccc} E\backslash\{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \right.$$

(appelée taux d'accroissement en a) admet une limite ***finie*** *en a. Cette limite est alors appelée le nombre dérivé de f en a et est notée $f'(a)$.*

En résumé, « f est dérivable sur E » = « f' est définie sur E ». On note ainsi $D_{f'}$ le sous-ensemble de E sur lequel f est dérivable.

Définition. *On dit que f est dérivable sur E si f est dérivable en tout point de E. On appelle alors dérivée de f la fonction notée f' définie par :*

$$f' : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & f'(a) \end{array} \right.$$

L'ensemble des fonctions dérivables sur E est noté $\mathscr{D}(E,\mathbb{R})$ ou $\mathscr{D}^1(E,\mathbb{R})$.

Exemples :

Bien sûr, tout cela sera montré dans la partie C et le chapitre 22. Faisons le pour $n=2$: via une identité remarquable, on a

$$\begin{aligned} \tau_a(x) &= \frac{x^2-a^2}{x-a} \\ &= x+a \xrightarrow[x\to a]{} 2a. \end{aligned}$$

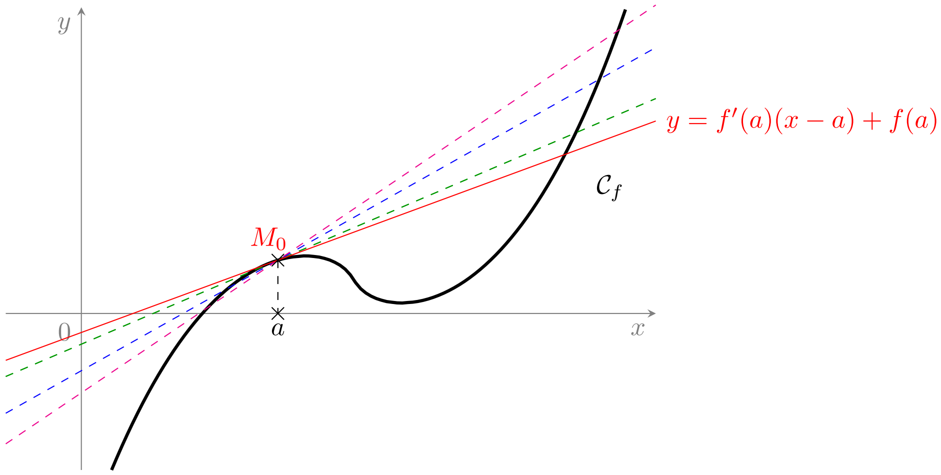
Ainsi f_2 est dérivable en a et $f_2'(a) = 2a$.

Remarques :

- La dérivée d'une fonction constante est nulle.
  ⚠ Ce constat est source d'une erreur très grave : dire que $f(a)=c$ (avec c un réel) donc $f'(a)=0$ (en pensant que la fonction constante égale à c a une dérivée nulle). C'est totalement faux puisque cela reviendrait à considérer f sur $\{a\}$ seulement. Or, pour dériver une fonction en un point, il faut pouvoir former son taux d'accroissement et donc elle doit être définie sur un intervalle contenant a et non réduit à un point.
- ⚠ On écrit $f'(x)$ mais jamais $(f(x))'$. Une autre notation autorisée est $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$

  Par exemple, on ne peut pas écrire $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$!! Mais on peut introduire $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ et écrire $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. On peut aussi juste dire que la dérivée de $x \longmapsto \sqrt{x}$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Autre solution : écrire $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

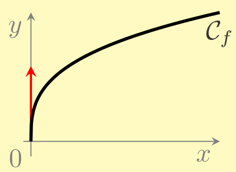
Interprétation géométrique. On note A le point de coordonnées $(a, f(a))$ (c'est-à-dire le point d'abscisse a sur la courbe de f). Pour tout $x \in E \backslash \{a\}$, notons M le point de coordonnées $(x, f(x))$. Ainsi $\tau_a(x)$ est le coefficient directeur de la droite (AM). Si f est dérivable en a alors, quand x tend vers a, « M tend vers A » et la droite (AM) « tend vers une droite limite » (passant toujours par A) de coefficient directeur $f'(a)$.



Cette droite est appelée tangente à $\mathscr{C}_f$ en A ou au point d'abscisse a (ou en a par abus de langage). En d'autres termes :

Définition. *Si f est dérivable en a, on appelle tangente à la courbe de f en a la droite passant par $A(a, f(a))$ de coefficient directeur $f'(a)$, c'est-à-dire la droite d'équation $y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$.*

Si $\tau_a(x) \xrightarrow[x \to a]{} \pm\infty$, alors la droite (AM) « tend » aussi vers une une position limite, qu'on appelle aussi tangente à $\mathscr{C}_f$ en a, mais cette fois la droite est alors verticale.



Définition. *Si $\tau_a(x) \xrightarrow[x \to a]{} \pm\infty$, la droite d'équation $x = a$ est appelée tangente verticale à $\mathscr{C}_f$ en $A(a, f(a))$.*

Géométriquement, f est dérivable en a si et seulement si $\mathscr{C}_f$ admet en a une tangente **non verticale**.

Proposition. *Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.*

⚠ La réciproque est fausse : la fonction racine carrée est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

2) Opérations sur les fonctions dérivables

Dans la pratique, on ne calcule presque jamais de taux d'accroissements (à part en certains points quand les théorèmes ci-dessous ne nous ont pas permis de conclure). A la place, on connaît les dérivées des fonctions usuelles et on calcule les dérivées de fonctions construites à l'aide des fonctions usuelles grâce à des formules de calculs.

⚠ Mais disons le une bonne fois pour toute : on dit que la fonction est dérivable **AVANT** de la dériver. Ce n'est en aucun cas un calcul de dérivée qui permet d'affirmer que la fonction est dérivable.

> *Par exemple écrire $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ donne l'impression que $\ln$ est dérivable en x strictement négatif (puisque l'inverse d'un réel strictement négatif est bien défini). Pourtant $\ln$ n'est pas dérivable en un tel point pour la simple et bonne raison qu'elle n'est même pas définie en ce point !!!*

a) Opérations sur les fonctions dérivables en un point

Théorème (opérations algébriques). *Supposons que f et g soient dérivables en a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors*

- *$f+g$ est dérivable en a et*
- *λf est dérivable en a et*
- *fg est dérivable en a et*

Si de plus $g(a) \neq 0$, alors

- *$\dfrac{1}{g}$ est dérivable en a et*
- *$\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et*

Ces théorèmes donnent des conditions suffisantes de dérivabilité mais pas nécessaires : si f et g sont dérivables en a, ils disent que $f+g$, fg et f/g sont dérivables en a mais ils ne disent pas ce qui se passe si f ou g n'est pas dérivable en a. Dit autrement, il se peut tout à fait que $f+g$ ou fg ou f/g soient dérivables en a alors que f ou g ne l'est pas (par exemple, si f n'est pas dérivables en a, alors $f-f=0$ l'est)

Théorème (composition). *Soit $u : F \longrightarrow E$. Soit $b \in F$. Si u est dérivable en b et f est dérivable en $f(b)$, alors $f \circ u$ est dérivable en b et*

Théorème (dérivée d'une réciproque). *Supposons que f soit une bijection de I sur $J = f(I)$. Soit $b \in I$. Si f est dérivable en a et si f'* ***ne s'annule pas*** *en a, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et*

Moyen mnémotechnique :

Ce n'est pas une preuve !

b) Opérations sur les fonctions dérivables sur E

Théorème (opérations algébriques). *Supposons que f et g soient dérivables sur E. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors*

- *$f+g$ est dérivable sur E et $(f+g)' = f' + g'$.*
- *λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$.*
- *fg est dérivable sur E et $(fg)' = f'g + fg'$.*

Si de plus g ne s'annule pas sur E, alors

- *$\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur E et $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$.*
- *$\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur E et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.*

Remarque : Ces résultats se généralisent facilement à un nombre quelconque (fini) de fonctions dérivables (par récurrence) :

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions dérivables sur E alors $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$ l'est aussi et

  On dit que la dérivation est linéaire.

On généralise facilement à produit fini : la dérivée d'un produit de n fonctions est la somme des n produits où à chaque fois on en dérive une seule.

- Si h est une fonction dérivable sur E alors fgh l'est et

Théorème (composition). *Soit $u : F \longrightarrow E$. Si u est dérivable sur F et f est dérivable sur E, alors $f \circ u$ est dérivable sur F et $(f \circ u)' = u' \times f' \circ u$.*

Remarque : En particulier, si u est dérivable sur F,

- si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $x \longmapsto f(\lambda x)$ est dérivable sur $\frac{1}{\lambda}F$ et sa dérivée est

  ⚠ En particulier la dérivée de $x \longmapsto f(-x)$ est . On en déduit que, si f est paire (respectivement impaire), alors f est impaire (respectivement paire).
- si $n \in \mathbb{N}^*$, u^n est dérivable sur F et
- si u ne s'annule pas sur F, $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable sur F et
- si u est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, $\sqrt{u}$ est dérivable sur F et
- si u est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, $\ln \circ u$ est dérivable sur F et
- e^u est dérivable sur F et

Moyen mnémotechnique :

Exemples :

- *Posons* $g : x \longmapsto \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$.

Le jour des concours, calculer une dérivée doit être un jeu d'enfant et sur-rédiger n'est absolument pas nécessaire pour avoir tous les points.

- *Notons* $\varphi : x \longmapsto \ln(\mathrm{e}^x + 1)$.
- *Posons* $f : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x}}{2 - \ln(1+x^3)}$.

Comme dit plus haut en remarque dans la marge, les théorèmes d'opérations ne disent pas ce qui se passe lorsque les fonctions ne sont pas dérivables. On peut seulement dire

$$\mathbb{R}_+^* \backslash \{\alpha\} \subset D_{f'}.$$

Pour examiner la dérivabilité en 0, il faudrait revenir à la définition avec le taux d'accroissement. Passons pour le moment (cf. chapitre 22).

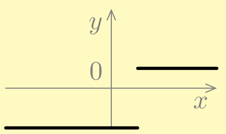
On retient : f^{-1} est dérivable sauf en les images des valeurs d'annulation de f'.

Théorème (dérivée d'une réciproque). *Supposons que f soit une bijection de I sur $J = f(I)$. Si f est dérivable sur I et si f'* ***ne s'annule pas*** *sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et $f^{-1} = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.*

Exemple :

3) Variations de fonctions dérivables

Tous les résultats de ce paragraphe sont faux si on ne se trouve pas sur un **intervalle**. Par exemple, voici le graphe d'une fonction non constante dont la dérivée est nulle :



Théorème (caractérisation des fonctions constantes). *La fonction f est constante sur l'**intervalle** I si et seulement si f est dérivable sur I et f' est nulle sur I.*

Théorème (caractérisation des fonctions dérivables monotones). *Supposons que f soit dérivable sur l'**intervalle** I.*

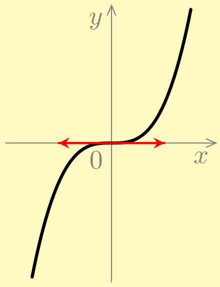
- *f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I.*
- *f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur I.*

Théorème (caractérisation des fonctions dérivables strictement monotones). *Supposons que f soit dérivable sur l'**intervalle** I.*

- *f est strictement croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I et non identiquement nulle sur aucun segment inclus dans I.*
- *f est strictement décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur I et non identiquement nulle sur aucun segment inclus dans I.*

Corollaire. *Si f est dérivable sur l'**intervalle** I et si f' est strictement positive (respectivement négative) sur I, alors f est strictement croissante (respectivement décroissante) sur I.*

L'exemple classique est celui de la fonction $x \mapsto x^3$ qui est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Pourtant sa dérivée, $x \mapsto 3x^2$, s'annule en 0 ! ! !



Mais, dans la pratique, il n'est pas rare que la dérivée s'annule tout de même en un point (ou quelques points) donc retenons surtout :

Corollaire. *Si f est dérivable sur l'**intervalle** I et si f' est strictement positive (respectivement négative) sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante (respectivement décroissante) sur I.*

Une erreur répandue consiste à étudier les valeurs d'annulation d'une dérivée pour en déduire les variations. C'est le signe (au sens strict) qu'il faut déterminer !

Exemples :

- *Considérons $f : x \longmapsto \sqrt[4]{x}\mathrm{e}^{-x}$.*

- *On a vu plus haut que la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{(1+x)^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $g' : x \longmapsto \dfrac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}$.*

Lisez bien : on a écrit « est du signe » et non pas « dépend du signe ». Ce n'est pas la même chose : « dépend » est très imprécis contrairement à « est ».

4) Dérivées successives

Définition. *Si f est dérivable sur E et si f' est dérivable sur E, alors on dit que f est deux fois dérivable sur E et la dérivée de f' est appelé la dérivée seconde de E. On la note $f^{(2)}$ ou f''.*

Si f est deux fois dérivable sur E et si f'' est dérivable sur E, alors on dit que f est trois fois dérivable sur E et la dérivée de f'' est appelé la dérivée troisième de E. On la note $f^{(3)}$ ou f'''.

Plus généralement, on définit les dérivées successives par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$, on dit que f est n fois dérivable sur E si

- *f est $n-1$ dérivable sur E,*
- *$f^{(n-1)}$, la dérivée $(n-1)^{\text{ième}}$ de f, est dérivable sur I.*

La fonction $(f^{(n-1)})'$ est appelée dérivée $n^{\text{ième}}$ de f et notée $f^{(n)}$.

Si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est dérivable n fois, on dit que f est dérivable une infinité de fois.

Remarques :

- On note généralement f' et f'' au lieu de $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$. Mais on n'utilise jamais f''', f'''', etc. surtout pour des raisons pratiques.
- Par convention, on pose $f^{(0)} = f$.

Les deux dernières propriétés ci-contre peuvent être utiles quand on raisonne par récurrence.

- Si $n \in \mathbb{N}^*$ et si f est dérivable n fois sur E alors f' est dérivable $n-1$ fois sur E et $f^{(n)} = (f')^{(n-1)}$.
- Si $n \in \mathbb{N}^*$ et si f' est dérivable n fois sur E alors f est dérivable $n+1$ fois sur E et $(f')^{(n)} = f^{(n+1)}$.

Exemples :

Par analogie, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^0$ si elle est continue.

Définition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur E si f est dérivable n fois sur E et si $f^{(n)}$ est continue sur E.*

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

- *Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur E alors, pour tout $p \leqslant n$, f est de classe $\mathscr{C}^p$ sur E.*
- *Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur E alors, pour tout $p \leqslant n$, $f^{(p)}$ est de classe $\mathscr{C}^{n-p}$ sur E et $f^{(n)} = (f^{(p)})^{(n-p)}$.*
- *Si f' est de classe $\mathscr{C}^n$ sur E, alors f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur E.*

On a « f est dérivable n fois sur E » = « $f^{(n)}$ est définie sur E » et « f est $\mathscr{C}^n$ sur E » = « $f^{(n)}$ est continue sur E ».

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si f est dérivable n fois sur E, alors f est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ sur E.*

Une fonction $\mathscr{C}^n$ est évidemment dérivable n fois par définition. La réciproque est fausse, comme on le verra dans le chapitre 22.

Définition. *On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si f est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Par conséquent, un moyen simple de prouver qu'une fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ est de prouver par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est $\mathscr{C}^n$.

Proposition. *La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si et seulement si f est dérivable une infinité de fois.*

Théorème. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tous les théorèmes du paragraphe III.2.b sont encore vrais si :*

- *on remplace tous les « dérivable » par « n fois dérivable ».*
- *on remplace tous les « dérivable » par « de classe $\mathscr{C}^n$ ».*
- *on remplace tous les « dérivable » par « de classe $\mathscr{C}^\infty$ ».*

Dans ce cas, $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$ et $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$ mais toutes les autres formules de dérivation ne sont valables que pour les dérivées premières

Nous en verrons une pour le produit dans le chapitre 22, appelée formule de Leibniz.

Exemple : *Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Montrons que $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.*

La notation $\mathscr{D}^n(E,\mathbb{R})$ n'est pas officiellement au programme.

Définition.

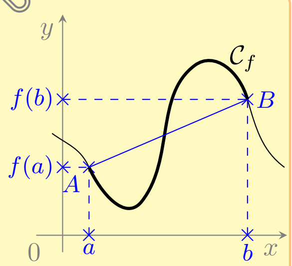
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{D}^n(E,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur E.*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, on note $\mathscr{C}^n(E,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur E.*

5) Fonctions convexes, fonctions concaves

Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point.

a) Définitions

Définition. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On appelle corde (ou sécante) de $\mathcal{C}_f$ tout segment joignant deux points de la courbes. On appelle arc associé à cette corde, la portion de la courbe délimitée par ces deux points.*



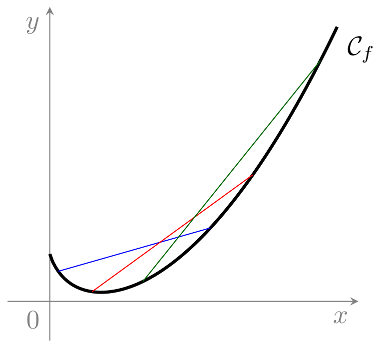
Soyons plus précis : on se donne a et b dans I avec $a < b$. Notons $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.

- La droite (AB) a pour équation
$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$
- Le segment $[AB]$ est donc une corde de $\mathcal{C}_f$. Il s'agit de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont
$$\left(x, \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\right), \qquad x \in [a\,;b]\,.$$
- L'arc associé à cette corde est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$ lorsque x parcourt $[a\,;b]$.

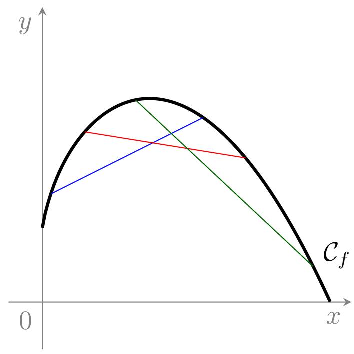
Dans le chapitre 23, on donnera une autre définition d'une fonction convexe/concave (qui est équivalente bien sûr) qui est plus facile à manipuler pour les démonstrations.

Définition. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.*

- *On dit que f est convexe sur I si toute corde de $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de son arc associé.*
- *On dit que f est concave sur I si toute corde de $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de son arc associé.*



fonction convexe



fonction concave

Une fonction convexe est une fonction « qui sourit » et une fonction concave est une fonction « qui fait la tête ».

La proposition suivant est immédiate :

Proposition. *Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est concave si et seulement si la fonction $-f$ est convexe.*

b) Convexité et dérivabilité

Par exemple, la fonction valeur absolue est convexe mais n'est pas dérivable en 0.

Une fonction convexe ou concave n'est pas forcément dérivable. Mais, lorsque c'est le cas, il existe un critère très pratique pour prouver qu'une fonction est convexe ou concave :

Théorème (caractérisation des fonctions convexes/concaves dérivables). *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I.*

- *f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.*
- *f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.*

Et on a donc :

Théorème (caractérisation des fonctions convexes/concaves deux fois dérivables). *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I.*

- *f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I.*
- *f est concave sur I si et seulement si f'' est négative sur I.*

Exemples :

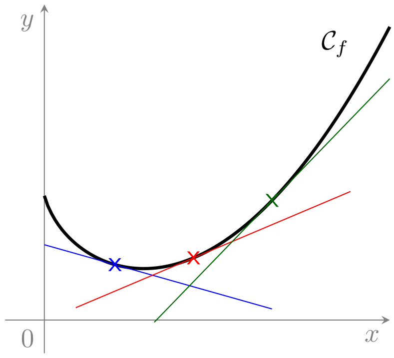
Théorème (tangentes d'une fonction convexe/concave). *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I.*

- *f est convexe sur I si et seulement si son graphe est au-dessus de ses tangentes, c'est-à-dire :*

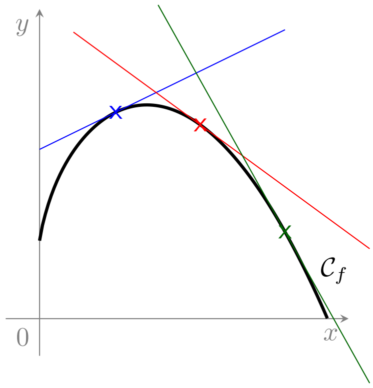
$$\forall a \in I, \qquad \forall x \in I, \qquad f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a).$$

Il faut donc penser aux fonctions convexes et concaves lorsqu'on demande de prouver une inégalité entre une fonction et une fonction affine.
⚠ Si la fonction à laquelle on compare n'est pas affine, cela n'a rien à voir avec le convexité a priori et on fait une étude de fonctions (de même s'il n'y a pas de fonction convexe ou concave dans l'inégalité bien sûr).

- *f est concave sur I si et seulement si son graphe est en-dessous de ses tangentes, c'est-à-dire :*
$$\forall a \in I, \qquad \forall x \in I, \qquad f(x) \leqslant f'(a)(x-a)+f(a).$$



fonction convexe



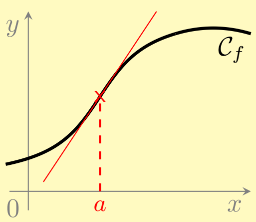
fonction concave

Exemples :

c) Points d'inflexions

Soit a un point de I qui n'est pas une extrémité de I.

Autrement dit $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion en a si, au voisinage de a, f passe de convexe à concave ou de concave à convexe en a. Si f est dérivable sur I alors, graphiquement, cela se traduit par le fait que $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente en le point $(a, f(a))$.



Définition (point d'inflexion). *On dit que $(a, f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f (ou que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion en a) si il existe $\delta > 0$ tel que f est convexe sur l'intervalle $[a-\delta, a]$ et concave sur l'intervalle $[a, a+\delta]$, ou le contraire.*

La dérivabilité offre aussi un critère pour montrer qu'il y a un point d'inflexion :

Théorème (caractérisation des points d'inflexion). *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I. La fonction f admet un point d'inflexion en a si et seulement si f'' s'annule en a en changeant de signe.*

Exemples :