Chapitre 14

Suites numériques

Partie B : Limite d'une suite réelle

> Contrairement à ce que nous avons fait dans le chapitre 4, nous allons tout démontrer (sauf les résultats de composition par une fonction qui seront, une fois de plus, reportés au chapitre 18).

Dans cette partie, nous allons définir rigoureusement la notion de limite d'une suite réelle. Ensuite nous allons en étudier de nombreuses propriétés. Nous étendrons brièvement cette notion aux suites complexes en fin de partie.

Nous verrons dans le paragraphe I.5 que les résultats sur la limite d'une suite (donc tous ceux de ce chapitre) ne dépendant pas du rang initial de la suite. Ainsi, pour simplifier, nous ne considérerons que des suites qui « démarrent à 0 » dans les résultats de cette partie du chapitre.

Dans toute cette partie, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignent des suites réelles (sauf dans le paragraphe VII).

I Notion de limite d'une suite réelle

1) Définitions

a) Limite finie

Intuitivement, une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ si ses termes s'en approchent autant qu'on veut, sans plus s'en éloigner. Autrement dit si, quelle que soit la précision voulue, notée ε, l'écart entre u_n et ℓ finit, dès que n est assez grand, par être plus petit que ε. Cela justifie la définition suivante :

> Rappelons que « $\forall n \geqslant n_0$ » est la version abrégé de
>
> « $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \ \Rightarrow$ ».

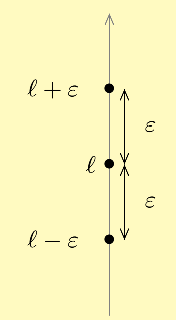
Définition. *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite (ou tend vers ℓ) si :*

On note alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

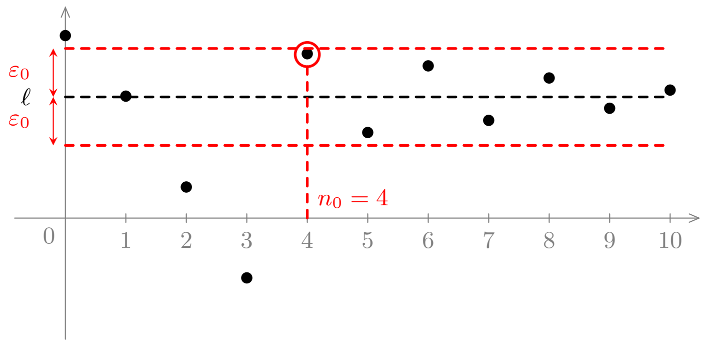
Remarques :

- Il est toujours sous-entendu dans cette définition que ε est un réel (strictement positif donc) et n un entier (supérieur à n_0 donc).
- Avant d'aller plus loin, il faut bien avoir en tête les équivalences suivantes et savoir passer de l'un à l'autre sans hésitation :

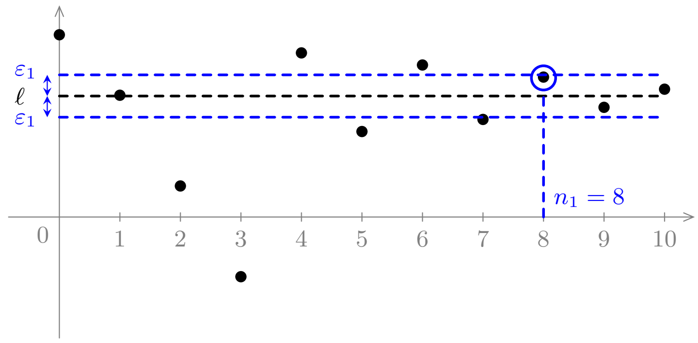
$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad u_n \in [\ell - \varepsilon\,;\ell + \varepsilon]\,.$$



- Illustrons cette définition :



Pour cette valeur de ε_0, il existe un entier n_0 (ici $n_0 = 4$) tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon_0$ c'est-à-dire à partir duquel les termes de la suites sont tous dans le « cylindre rouge ». Prenons une autre valeur de ε, notée ε_1 (ici plus petite que ε_0) :



Pour cette précision ε_1, il existe un entier n_1 (ici $n_1 = 8$) tel que, pour tout $n \geqslant n_1$, $|u_n - L| \leqslant \varepsilon_1$ c'est-à-dire à partir duquel les termes de la suites sont tous dans le « cylindre bleu ». La suite tend vers ℓ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel les termes de la suite sont tous dans le cylindre correspondant.

Le rang n_0 n'est pas forcément le rang initial au sens où ce n'est pas a priori le premier qui fonctionne. Il s'agit juste d'un rang à partir duquel on sait que tous les termes de la suite seront proche de ℓ à ε près.

Remarquons que le rang initial d'appartenance au cylindre (ici n_0 puis n_1) de la définition dépendent de ε. C'est attendu puisqu'il est défini après dans la définition quantifiée. Ici $\varepsilon_0 > \varepsilon_1$ et $n_0 < n_1$. C'est intuitif : plus on veut une précision importante (c'est-à-dire un petit ε), plus il faut attendre longtemps et donc plus le rang initial augmente.

- Comme on l'a vu dans le chapitre précédent avec les voisinages, remplacer « $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ » par « $|u_n - \ell| < \varepsilon$ » dans la définition ne change rien. L'important est que l'on puisse considérer un intervalle aussi resserré autour de ℓ que possible (et qu'à chaque fois on y trouve tous les termes de la suite à partir d'un certain rang).
- Parfois, on arrivera à la majoration $|u_n - \ell| \leqslant 2\varepsilon$. On pourra alors conclure directement que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. En effet, ε étant quelconque, en partant de $\varepsilon/2$ au lieu de ε, on arrive à $\leqslant \varepsilon$ ce qui est bien la définition ci-dessus et il est donc inutile de détailler autant (même si on le fera dans les démonstrations de ce chapitre, par élégance mathématique). Par exemple, on a les équivalences suivantes :

Essayez d'en prouver une ou deux en exo !

$$\begin{aligned}
u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad &\iff \qquad \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| \leqslant 2\varepsilon \\
&\iff \qquad \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon^2 \\
&\iff \qquad \forall \varepsilon \in [0\,;1[\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

Il n'y a rien de compliqué ! L'important encore une fois et que ε puisse être pris aussi petit que l'on veut (par exemple, ce ne serait pas le cas si on avait $\varepsilon + 1$ à la place de ε).

- La négation de « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ » est « $\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant n_0, |u_n - \ell| > \varepsilon$. En d'autres termes : il existe un intervalle centré en ℓ (dont l'amplitude est 2ε) en dehors duquel se trouvent une infinité de termes

En effet, dès qu'on trouve un terme hors de cet intervalle, il y en aura encore un hors de cet intervalle, puis encore un, etc

- ⚠ Une limite finie est un réel fixe. Elle ne peut jamais dépendre de n (l'indice de la suite). Et donc, dans la notation $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{}$ *truc*, *truc* ne peut **jamais** dépendre de n.

Proposition. *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On a :*

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \qquad \iff \qquad u_n - \ell \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \iff \qquad |u_n - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

En particulier :
- Si $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ si et seulement si $-u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ell$.

Démonstration. On constate que les définitions quantifiées de ces trois convergences sont exactement les mêmes. □

b) Limite infinie

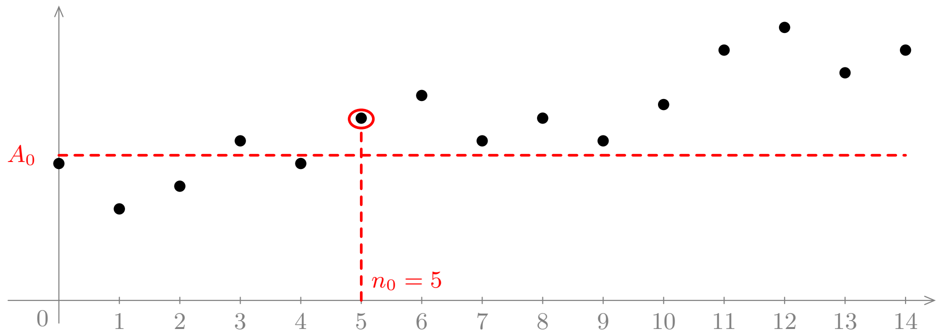
Intuitivement, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si ses termes deviennent aussi grands qu'on veut à partir d'un certain rang. Autrement dit si, quel que soit le seuil A (autant le prendre positif strictement), u_n finit par être supérieur à A dès que n est assez grand. Cela justifie la définition suivante :

Définition. *On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite (ou tend vers $+\infty$) si :*

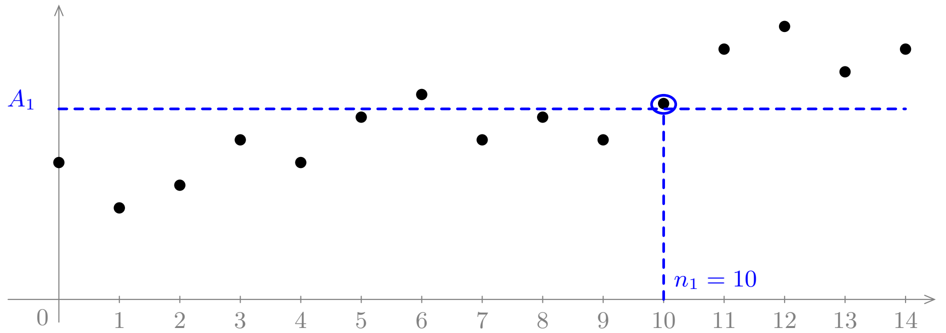
On note alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Remarques :

- Il est toujours sous-entendu dans cette définition que A est un réel (strictement positif donc) et n un entier (supérieur à n_0 donc).
- Illustrons cette définition :



Pour cette valeur de A_0, il existe un entier n_0 (ici $n_0 = 5$) tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant A_0$, c'est-à-dire à partir duquel les termes de la suites sont tous « au-dessus du seuil rouge ». Prenons une autre valeur de A, notée A_1 (ici plus grande que A_0) :



Pour cette précision A_1, il existe un entier n_1 (ici $n_1 = 10$) tel que, pour tout $n \geqslant n_1$, $u_n \geqslant A_1$, c'est-à-dire à partir duquel les termes de la suites sont tous « au-dessus du seuil bleu ». La suite tend vers $+\infty$ si, pour tout $A \geqslant 0$, il existe un rang à partir duquel les termes de la suite sont tous au-dessus de la barre correspondante.

Remarquons le rang initial de dépassement du seuil (ici n_0 puis n_1) de la définition dépendent de A. C'est attendu puisqu'il est défini après dans la définition. Ici $A_1 > A_0$ et $n_1 > n_0$. C'est intuitif plus on veut dépasser un seuil important, plus il faut attendre longtemps et donc plus le rang initial augmente.

Le rang n_0 n'est pas forcément le rang initial au sens où ce n'est pas a priori le premier qui fonctionne. Il s'agit juste d'un rang à partir duquel on sait que tous les termes de la suites dépassent le seuil A.

- Comme on l'a vu dans le chapitre précédent avec les voisinages, remplacer « $u_n \geqslant A$ » par « $u_n > A$ » dans la définition ne change rien. L'important est que l'on puisse considérer un intervalle aussi grand que possible (et qu'à chaque fois on y trouve tous les termes de la suite à partir d'un certain rang).

Essayez d'en prouver une ou deux en exo !

- Comme dans le paragraphe précédent, il y a plein de définitions équivalentes. Par exemple :

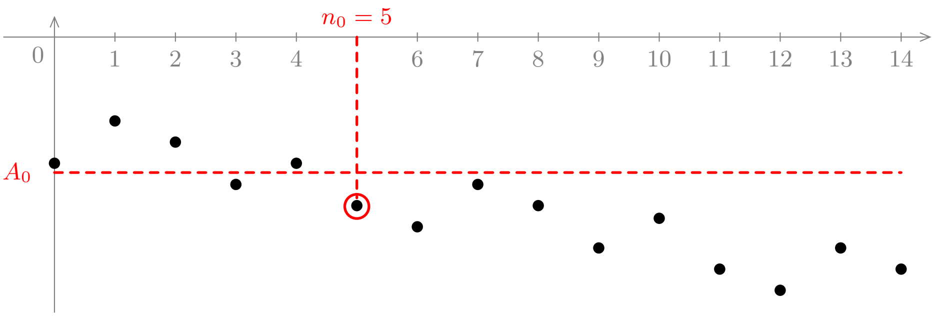
$$\begin{aligned} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \quad & \iff \quad \forall A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant A+1 \\ & \iff \quad \forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant A \\ & \iff \quad \forall A \geqslant 1,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant \sqrt{A} \end{aligned}$$

  Il n'y a rien de compliqué, l'important encore une fois et que A puisse être pris aussi grand que l'on veut.
- La négation de « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ » est « $\exists A > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant n_0, u_n \leqslant A$ ». En d'autres termes : il existe un seuil en dessous duquel se trouvent une infinité de termes.

On définit de même :

Définition. *On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $-\infty$ pour limite (ou tend vers $-\infty$) si :*

On note alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.



c) Une définition universelle

Les définitions d'une suite ayant une limite finie, $+\infty$ ou $-\infty$ se ressemblent certes mais sont différentes au premier coup d'oeil. Avec la notion de voisinage (qui n'est pas tout à fait au programme de première année), on peut toutefois les unifier en une seule définition :

Proposition/Définition. *Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite si et seulement si, pour tout voisinage V de ℓ, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in V$.*

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

2) Unicité de la limite

En d'autres termes, si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\ell = \ell'$.

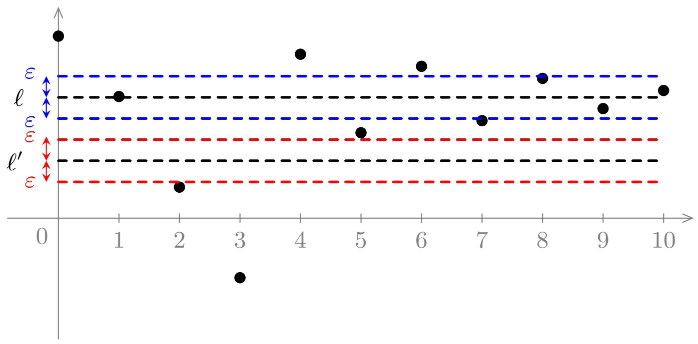
Proposition (unicité de la limite). *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors cette limite est unique. On appelle alors ℓ* ***la*** *limite de la suite et on note aussi $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admette deux limites réelles ℓ et ℓ' dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Une première démonstration dans le cas où ℓ et ℓ' sont réels.

Ceci est valable pour tout $\varepsilon > 0$. Pour trouver une contradiction, il suffit de trouver un seul ε qui ne convient pas. Mais à ce stade la preuve, on ne sait pas encore lequel.

L'idée de la preuve est très simple : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finit par être très proche de ℓ et très proche de ℓ', ce qui n'est pas possible si $\ell \neq \ell'$, car on peut alors construire des cylindres disjoints qui sont censés contenir tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, et ce n'est pas possible car ils sont disjoints (voir dessin ci-contre).



Une deuxième démonstration pour tous les cas avec la notion de voisinage.

Puisque $\ell \neq \ell'$, il existe un voisinage V_ℓ de ℓ et un voisinage $V_{\ell'}$ de ℓ' tels que $V_\ell \cap V_{\ell'} = \varnothing$ (cf. paragraphe IV.1 du chapitre 13).

- Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in V_\ell$.
- Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$, il existe $n_0' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0'$, $u_n \in V_{\ell'}$.

Posons $N = \max\{n_0; n_0'\}$. On a alors $u_N \in V_\ell \cap V_{\ell'}$, ce qui est absurde. $\square$

⚠ Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ, on note de préférence $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

On vient de dire que l'on peut noter $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et on le fera parfois. Pourtant, comme on l'a déjà mentionné dans le chapitre 4, cette notation est dangereuse car elle pousse notamment à faire des manipulations algébriques de limites sans avoir prouvé au préalable leur existence. En vrac, quelques problèmes avec cette notation :

- Écrire $(-1)^n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$ est vrai : cela veut dire que la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n \neq 0$, n'a aucun sens puisque l'usage de cette notation annonce que $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite (et qu'elle est non nulle), ce qui n'est pas le cas.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} ((-1)^n + 3^n) = \lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n + \lim\limits_{n\to+\infty} 3^n$ est fausse à plus d'un titre : déjà $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n$ n'a aucun sens puis, en écrivant $\lim\limits_{n\to+\infty} ((-1)^n + 3^n)$, cela sous-entend que l'on sait déjà que cette suite a une limite. On verra dans le paragraphe III.1.b que sa limite est $+\infty$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$, alors on a envie d'écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ell^n$, ce qui est totalement faux comme on le verra dans la paragraphe III.3 (c'est potentiellement une forme indéterminée).

Moralité : on préfèrera de loin utiliser la notation $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

On ne sera jamais tenté d'écrire cela si on n'utilise que la notation $\xrightarrow[n\to+\infty]{}$.

On n'aurait jamais écrit $u_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^n$ puisqu'on sait bien qu'il ne peut jamais rester du n à la limite ! !

3) Exemples fondamentaux

Théorème.

1. *Soit $a \in \mathbb{R}$. Une suite constante ou stationnaire à a converge vers a.*
2. *Si $\alpha > 0$, alors $\dfrac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.*
3. *Si $q \in \,]-1\,;1[$, alors $q^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.*

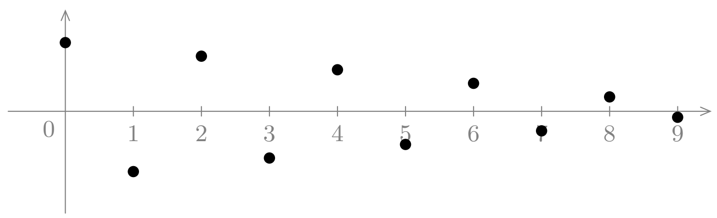
En particulier, une suite constante est constante égale à sa limite. Alternativement, on peut dire qu'une suite constante est égale à son premier terme, donc la limite est égale au premier terme.

Démonstration.

$\square$

Exemple : *On a donc $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ puisque $-\frac{1}{2} \in \,]-1\,;1[$. Cela se voit très bien sur le graphe (non à l'échelle !) ci-dessous :*

On voit en particulier qu'une suite convergente n'est pas forcément supérieure ou inférieure à sa limite, elle peut osciller autour de celle-ci.



Théorème.

1. *Si $\alpha > 0$, alors $n^\alpha \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.*
2. *Si $\beta > 0$, alors $(\ln(n))^\beta \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.*
3. *$n! \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.*
4. *Si $q > 1$, alors $q^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.*

Si $\alpha < 0$, $-\alpha > 0$ donc

$$n^\alpha = \frac{1}{n^{-\alpha}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Si $\alpha = 0$, alors

$$n^\alpha = 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1.$$

Démonstration.

□

De façon analogue, on montre que si $\alpha > 0$ et $q \in]0\,;1[$,

$$q^{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et, si $q > 1$,

$$q^{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Dans la pratique, on utilise plutôt uniquement les limites de ces deux derniers théorèmes puis le théorème de composition des limites par une fonction (cf. paragraphe III.2. Ici on compose $n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par la fonction $x \mapsto e^{x\ln(q)}$ et on conclut selon le signe de $\ln(q)$.

En général, il n'est pas aussi simple de montrer, de cette façon, qu'une suite admet une limite que dans les exemples précédents :

- Même si la suite est définie explicitement, on arrive rarement à isoler n et à donner le premier rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans le voisinage quelconque que l'on se donne. Cela n'est pas très grave puisque l'on cherche juste un n_0 qui convient et non pas forcément le plus petit. Dans la pratique, on utilise souvent ces suites de références et on fait des opérations algébriques sur ces suites ou des compositions par des fonctions (cf. paragraphe **III**) ou encore on encadre les suites par ces suites de références et on utilise le théorème d'encadrement ou un théorème de comparaison (cf. paragraphe IV.1).
- Lorsque la suite est définie par récurrence ou implicitement, c'est encore plus difficile et on utilise souvent des argument de monotonie (cf. paragraphe IV.b, IV.c et la partie C de ce chapitre).

4) Suite convergente, suite divergente

A retenir : converger = admettre une limite **finie**.

Définition. *Si une suite réelle admet une limite finie, on dit qu'elle est convergente (ou qu'elle converge). Si sa limite est $\ell \in \mathbb{R}$, on dit qu'elle converge vers ℓ.*

Si la suite n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente (ou qu'elle diverge).

Deux suites qui convergent toutes les deux ou qui divergent toutes les deux sont parfois dites de « même nature ». Quand un sujet de concours demande « déterminer la nature d'une suite », cela signifie « étudier si elle converge ou diverge ».

Parmi les suites divergentes, on retrouve les suites qui tendent vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ mais aussi les suites qui n'admettent pas de limite (ni finie, ni infinie). Et il y en a !

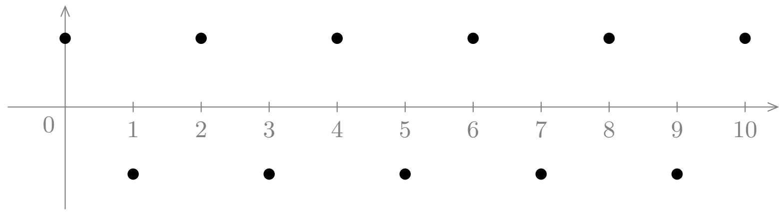
Par exemple, la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons qu'elle admette une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

- ⋆ *Si $\ell = +\infty$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $(-1)^n \geqslant 2$ (en prenant $A = 2$ dans la définition). C'est absurde.*
- ⋆ *Si $\ell = -\infty$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $(-1)^n \leqslant -2$ (en prenant $A = -2$ dans la définition). C'est absurde.*

⋆ *Si $\ell \in \mathbb{R}$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|(-1)^n - \ell| \leqslant \frac{1}{2}$ (en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$ dans la définition) donc $(-1)^n - \frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant (-1)^n + \frac{1}{2}$. En prenant $n = 2n_0 \geqslant n_0$, on a $\frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant \frac{3}{2}$. En prenant $n = 2n_0 + 1 \geqslant n_0$, on a $-\frac{3}{2} \leqslant \ell \leqslant -\frac{1}{2}$. C'est absurde.*

Par l'absurde, la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite : elle diverge. Cela se voit très bien sur le dessin ci-dessous : les termes de la suite ne s'approchent d'aucune valeur et « oscillent entre -1 et 1 ».

Lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\pm\infty$, on dit parfois que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$. On évitera toutefois de le dire pour éviter tout confusion vis à vis des définitions du programme.



Proposition. *La nature d'une suite réelle ne dépend pas de ses premiers termes. Plus précisément, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites égales sauf en un nombre fini de termes, alors :*

- *ou bien elle convergent toutes les deux et ont la même limite,*
- *ou bien elles tendent toutes les deux vers $+\infty$,*
- *ou bien elles tendent toutes les deux vers $-\infty$,*
- *ou bien aucune des deux n'admet de limite.*

Cela signifie que $u_n = v_n$ pour n assez grand (plus précisément à partir du rang $N+1$, où

$$N = \max\{k \in \mathbb{N} \,|\, u_k \neq v_k\}$$

(ce max existant car c'est celui d'un ensemble fini par hypothèse).

Démonstration. Notons $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_n = v_n$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que ℓ désigne sa limite (les trois autres cas sont analogues), alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Notons $n_0' = \max\{n_0, N\}$. Alors, pour tout $n \geqslant n_0'$, $|v_n - \ell| = |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Ainsi $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. □

Remarques :

- Il découle de cette remarque que, lorsque l'on s'intéresse à la limite d'une suite, seul compte « ce qui se passe en $+\infty$ ». On peut donc faire démarrer la suite à n'importe quel rang, cela n'aura aucun impact.
- Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Quitte à augmenter n_0 dans la définition quantifiée, pour tout $p \in \mathbb{Z}$,

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad u_{n+p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Notamment, si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $u_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

5) Utilisation de suites extraites

a) Notion de suite extraite

Lemme. *Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$. En particulier, $\varphi(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.*

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Si φ est strictement croissante de $\{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geqslant n_0\}$ dans $\mathbb{N}$, alors, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\varphi(n) \geqslant n - n_0.$$

On a encore $\varphi(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Démonstration.

□

Onextrait des indices donc extrait des termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tout en gardant l'ordre dans lequel ces termes apparaît.

Définition. *On appelle suite extraite (ou sous-suite) de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où φ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On dit que φ est une extractrice.*

Exemples : *Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Remarques :

- Si on note $u : n \longmapsto u_n$, la sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est rien d'autre que la fonction $u\circ\varphi$.
- L'extractrice φ n'est rien d'autre qu'une suite strictement croissante d'entiers naturels qui sont utilisés comme les nouveaux indices de la suite. On peut donc la noter $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ou, les indices étant muets, $(\varphi(p))_{p\in\mathbb{N}}$. Ce n'est pas une notation classique pour une suite donc, pour tout $p\in\mathbb{N}$, notons $n_p = \varphi(p)$. On a alors $(\varphi(p))_{p\in\mathbb{N}} = (n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et donc $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (u_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$.

  Par exemple, si $(n_p)_{p\in\mathbb{N}} = (1, 5, 14, 21, 23, 36, 43, 100, \dots)$, alors on a $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (u_{n_p})_{p\in\mathbb{N}} = (u_1, u_5, u_{14}, u_{21}, u_{23}, u_{36}, u_{43}, u_{100}, \dots)$

La suite $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc formée d'une infinité de termes tous distincts (car φ est alors injective) mais il n'y a pas tous les entiers (sauf si φ est l'identité).

On utilise donc souvent cette définition alternative :

Définition. *On appelle suite extraite (ou sous-suite) de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $(u_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$, où $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels strictement croissante.*

Remarque : Une suite extraite d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est encore une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En effet :

- Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors il existe une extractrice φ telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$. Si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors il existe une extractrice ψ telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_n = v_{\psi(n)}$ et donc $w_n = u_{\varphi(\psi(n))} = u_{\varphi\circ\psi(n)}$. La fonction $\varphi\circ\psi$ étant strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, c'est bien une extractrice et donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une extractrice de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Avec l'autre notation, c'est un peu plus simple de manipulation : une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la forme $(u_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ avec $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers strictement croissante, puis une suite extraite de $(u_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ a la forme $(u_{n_{p_q}})_{q\in\mathbb{N}}$ avec $(p_q)_{q\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers strictement croissante (qui fournit bien une suite d'entiers $(n_{p_q})_{q\in\mathbb{N}}$ strictement croissant).

Remarquons que si on extrait une première fois via l'extactrice φ puis une deuxième fois via l'extactrice ψ, cela revient à extraire via l'extractrice $\varphi\circ\psi$ (et non le contraire).

Exemple : *La suite $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et donc de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

b) Suites extraites et limites

Les suites extraites n'ont pas vraiment d'intérêt en soi. Elles servent surtout dans les propriétés de limites. Commençons par un résultat intuitif :

Proposition. *Soit $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ, alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend encore vers ℓ*

Démonstration.

□

Remarque : En particulier, si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, etc.

Ce corollaire est très important car il fournit un moyen simple de prouver qu'une suite diverge.

C'est plus simple à montrer ainsi que comme on l'a fait dans le paragraphe précédent.

Corollaire. *Si une suite admet une suite extraite qui diverge ou deux suites extraites qui tendent vers des limites distinctes, alors elle diverge.*

Exemples :

- *La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge car les deux suites extraites $\left((-1)^{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left((-1)^{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers des limites distinctes (1 et -1).*
- *La suite de terme général $(-2)^n$ n'a pas de limite car $(-2)^{2n} = 4^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $(-2)^{2n+1} = -2\times 4^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.*
- *La suite $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge car les deux suites extraites $\left((-1)^{2n}2n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left((-1)^{2n+1}(2n+1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers des limites distinctes ($+\infty$ et $-\infty$).*

On peut se poser la question inverse : si certaines suites extraites convergent vers la même limite, peut-on en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers cette limite ? Un cas très important qui fonctionne est le suivant :

Proposition. *Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On a :*

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \quad \text{et} \quad u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

On généralise facilement ce résultat : il suffit d'avoir un nombre fini de sous-suites dont les indices forment un recouvrement de $\mathbb{N}$. Par exemple, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ si et seulement si les trois suites $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent toutes les trois vers ℓ.

Démonstration. Le sens direct découle du théorème ci-dessus. Réciproquement, supposons que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers ℓ. Soit V un voisinage de ℓ. Alors :

- il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{2n} \in V$.
- il existe $n_0' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0'$, $u_{2n+1} \in V$.

Notons $N = \max\{2n_0; 2n_0'+1\}$. Pour tout $n \geqslant N$:

- si n est pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Comme $n \geqslant 2n_0$, $k \geqslant n_0$ et donc $u_n = u_{2k} \in V$.
- si n est impair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Comme $n \geqslant 2n_0+1$, $k \geqslant n_0$ et donc $u_n = u_{2k+1} \in V$.

Dans tous les cas, $u_n \in V$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend bien vers ℓ. □

Remarque : Dans la partie C, nous utiliserons beaucoup ce résultat. Nous aurons notamment à montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

⚠ Pour étudier les variations de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, il faut étudier le signe de $u_{2n+2} - u_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour étudier les variations de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, il faut étudier le signe de $u_{2n+3} - u_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Notion de valeur d'adhérence (HP)

Si une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge vers un réel a, alors on dit que a est une valeur d'adhérence de la suite.

Par exemple, -1 et 1 sont des valeurs d'adhérence de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Cette notion est hors-programme en première année mais le sera l'an prochain. Il sera notamment montré qu'un réel a est une valeur d'adhérence si et seulement si tout voisinage de a contient une infinité de termes de la suite. Cela signifie que a est un point d'accumulation de termes de la suite.

II Limites et relation d'ordre

1) Propriété d'ordre transmise par la limite

La réciproque est fausse ! Par exemple : la suite de terme général $(-1)^n$ diverge mais est bornée.

Proposition. *Une suite réelle convergente est bornée.*

Démonstration.

$\square$

Remarques :

Et une suite qui tend vers $-\infty$ est majorée et non minorée.

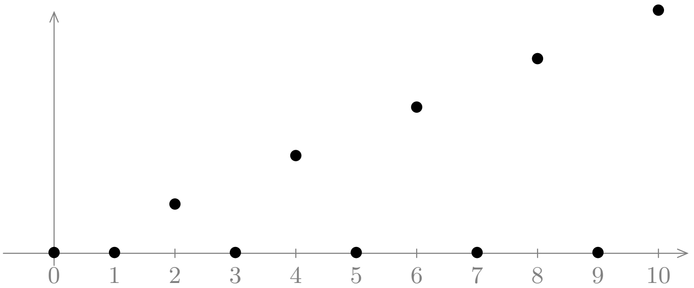
- Dans le même genre (mais ce n'est pas explicitement écrit dans le programme) :

  Une suite qui tend vers $+\infty$ est minorée et non majorée.

  Montrons-le : considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$.

- Une suite non bornée ne tend pas forcément vers $\pm\infty$ et sa valeur absolue ne tend pas forcément vers $+\infty$.

  Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = ((-1)^n + 1) \times n$.



La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée mais ne tend pas vers $+\infty$ (ni sa valeur absolue puisqu'elle est à termes positifs). En effet :

Et bien sûr elle ne tend pas vers $-\infty$ puisqu'elle est à termes positifs (donc aucun terme ne descend sous la seuil $A = -1$ par exemple).

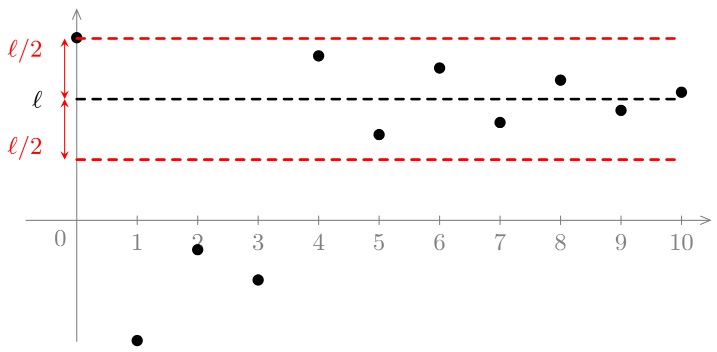
— *Raisonnons par l'absurde et supposons qu'elle est bornée par un réel $M > 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \leqslant M$, c'est-à-dire $2n \leqslant M$. C'est absurde en prenant $n = M$.*

— *Raisonnons par l'absurde et supposons qu'elle tend vers $+\infty$. Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 1$. On a $2n_0+1 \geqslant n_0$ alors que $u_{2n_0+1} = 0$. C'est absurde.*

Proposition. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.*

Il est impératif de bien avoir ce dessin en tête, ainsi que la démonstration pour être capable de l'adapter à plusieurs variantes, cf. ci-dessous.

DÉMONSTRATION.



$\square$

Remarques :

- Ce résultat reste vrai si $\ell = +\infty$. Il suffit de prendre (par exemple) $A = 1$ dans la définition de $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- De façon analogue, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell < 0$ ou vers $-\infty$, alors $u_n < 0$ à partir d'un certain rang.
- Et donc, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite non nulle, on a $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.
- Dans le même genre (mais ce n'est pas explicitement écrit dans le programme), pour tous $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $a < b$,

$$\boxed{\text{Si } u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in]a\,;b[, \text{ alors } u_n \in]a\,;b[\text{ à partir d'un certain rang.}}$$

On ne peut rien dire si la limite est nulle. Par exemple la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 (je vous laisse tenter de le montrer) mais alterne entre terme positif et terme négatif.

Montrons-le dans le cas où a et b sont réels (les autres cas sont analogues avec une inégalité en moins) :

On a déjà fait plus ou moins cette preuve dans le chapitre 13 pour justifier qu'un intervalle ouvert contenant un réel est un voisinage de ce réel.

Par exemple :

— *si $\ell = -1$,* ....

— *si $\ell > 2$,* ....

— *Si $\ell < 1$,* ....

Pour utiliser les théorèmes de ce paragraphe (et le précédent), on doit auparavant avoir montré la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La convergence de ces suites est une **hypothèse** qu'il faut prouver **avant** d'appliquer ce théorème. Ce **ne sont pas** des théorème d'existence contrairement à ceux du paragraphe IV.1.

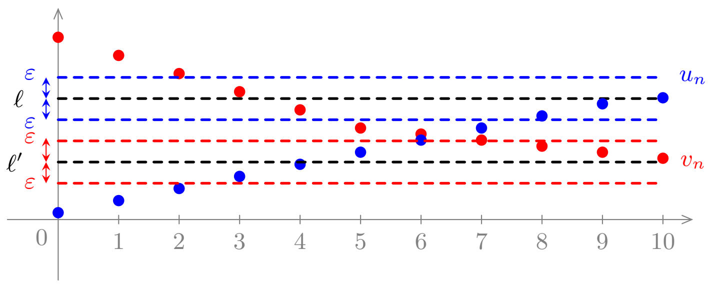
2) Passage à la limite dans une inégalité large

Dans le paragraphe précédent, on a vu que l'on peut transférer des propriétés d'ordre sur la limite aux termes de la suite (à partir d'un certain rang). Et vice-versa dans ce paragraphe : des propriétés d'ordre sur les termes de la suite se transfèrent sur la limite.

Théorème (Les inégalités larges passent à la limite). *Supposons que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Soient ℓ et ℓ' des réels.*
Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$, alors $\ell \leqslant \ell'$.

Démonstration.

L'idée du raisonnement est très simple : v_n se rapproche de ℓ' et u_n se rapproche de ℓ et, si $\ell > \ell'$, alors u_n finit par dépasser v_n, car u_n finit par être dans le cylindre bleu et v_n dans le cylindre rouge, voir dessin ci-contre, ce qui est exclu.



□

LES INÉGALITÉS STRICTES DEVIENNENT LARGES PAS À LA LIMITE.
Prenons l'exemple de $u_n = -\dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < v_n$ mais pourtant leurs limites sont égales (à 0).

Corollaire. *Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $m \in \mathbb{R}$.*
1. *Supposons que $u_n \leqslant m$ à partir d'un certain rang. Alors $\ell \leqslant m$.*
2. *Supposons que $m \leqslant u_n$ à partir d'un certain rang. Alors $m \leqslant \ell$.*

Si on veut montrer que $\ell > 0$, il faut un argument supplémentaire. On peut raisonner par l'absurde ou utiliser des arguments de stricte monotonie (cf. paragraphe IV.2).

En particulier, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et si $u_n \geqslant 0$ (à partir d'un certain rang du moins), alors $\ell \geqslant 0$. Cependant, si $u_n > 0$ (à partir d'un certain rang du moins), on ne peut pas conclure que $\ell > 0$.

Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} > 0$ mais $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

III Opérations sur les suites admettant une limite

1) Opérations algébriques

Ces opérations représentent près de 60 cas ! Nous n'allons en montrer que quelques uns bien choisis (les autres pourront constituer un excellent exercice de manipulation de la définition quantifiée).

Nous allons présenter les opérations algébriques (valeur absolue, somme, multiplication externe, produit et division) sur les limites sous forme de tableaux. Lorsque l'opération effectuée sur des suites ne permet pas de conclure sur la limite en toute généralité, on parle de forme indéterminée (et nous écrirons F.I. dans le tableau). Dans ces cas, il faut faire une étude au cas par cas mais il y a des méthodes générales que nous évoquerons dans le paragraphe III.4 et qui nous occuperons beaucoup cette année, notamment au second semestre.

a) Valeur absolue

Proposition. *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Le tableau suivant indique la limite de $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:*

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \lvert u_n\rvert$	$\lvert\ell\rvert$	$+\infty$	$+\infty$

DÉMONSTRATION. • Supposons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Par inégalité triangulaire renversée, on a alors, pour tout $n \geqslant n_0$, $||u_n| - |\ell|| \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Ainsi $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

• Supposons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Soit $A > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant A$ $\leqslant -A$ et donc $|u_n| \geqslant A$. Ainsi $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. □

b) Somme et multiplication externe

L'opération « $\infty - \infty$ » est une forme indéterminée. En effet :

$$(n^2+2) - (n^2+1) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$

$$n - n^2 = n(1-n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

(cette limite se montre par produit, cf.paragraphe III.1.b).

Proposition. *Soient $(\ell, \ell') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Le tableau suivant indique la limite de $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction des limites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:*

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	*F.I.*
$-\infty$	$-\infty$	*F.I.*	$-\infty$

DÉMONSTRATION. Traitons deux cas parmi tous ces cas (les autres sont analogues et laissés en exercice) :

• Supposons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell' \in \mathbb{R}$.

Ici, prenons $\frac{\varepsilon}{2}$ au lieu de ε dans la définition pour que, à la fin, la somme de ces deux $\frac{\varepsilon}{2}$ donne un ε. Si on met ε, on aura 2ε à la fin, ce qui convient tout autant mais est moins élégant.

• Supposons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

On se donne $A < 0$ (puisqu'on veut $-\infty$ pour limite de la somme).

⋆ Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle est bornée et donc majorée par un réel $M \in \mathbb{R}$.

⋆ Puisque $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n \leqslant A'$ (où $A' < 0$ sera ensuite choisi en fonction de A).

Ces trois dernières lignes sont en fait inutiles. Avoir $A+M$ suffit pour conclure, cf. remarque dans le paragraphe I.1.b.

Pour tout $n \geqslant n_0$, on a donc $u_n + v_n \leqslant M + A'$. Prenons donc $A' = \max\{A - M; 0\}$. Si $A - M < 0$, alors $M + A' = M + A - M = A$. Si $A - M \geqslant 0$, alors $M + A' = M \leqslant A$. Dans les deux cas, $u_n + v_n \leqslant A$. Ainsi $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$. □

Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors $\lambda u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda\ell$ (où $\lambda\ell$ doit être pris au sens de l'extension de la multiplication réelle à $\overline{\mathbb{R}}$).

Si $\lambda = 0$, $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est juste la suite nulle donc elle tend vers 0. Rien de très intéressant.

Proposition. *Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Le tableau suivant indique la limite de $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:*

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda > 0$	$\lambda\ell$	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda < 0$	$\lambda\ell$	$-\infty$	$+\infty$

Démonstration. Traitons le cas où $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ et $\lambda < 0$ (les autres sont laissés en exercice).

On se donne $A > 0$ (puisque l'on veut $+\infty$ pour limite du produit). Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant \dfrac{A}{\lambda}$ (on prend $A' = \dfrac{A}{\lambda} < 0$ dans la définition de la limite). Alors $\lambda u_n \geqslant A$. Ainsi $\lambda u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. □

Le sens de l'inégalité est renversé puisque $\lambda < 0$

Exemple : *On a $\dfrac{7}{n} + 3^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ puisque $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $\dfrac{7}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $3^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.*

⚠ On ne peut évidemment rien dire en général pour la somme de deux suites n'admettant pas de limite. Gardons juste à l'esprit qu'il peut y avoir une limite.

Par exemple les suites $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $((-1)^{n+1} + 1)_{n\in\mathbb{N}}$ n'ont pas de limite. Pourtant leur somme est la suite constant égale à 1 et donc converge (vers 1).

Par récurrence, on obtient la limite d'une combinaison linéaire de suites convergentes :

Si une seule de ces suites tend vers $\pm\infty$ et les autres convergent, la combinaison linéaire tend vers $\pm\infty$ (selon le signe de son coefficient multiplicateur, si celui-ci est non nul bien sûr)

⚠ Si plusieurs de ces suites tendent vers $\pm\infty$, on ne peut rien conclure en général. C'est une forme indéterminée. On verra ci-dessous que, dans ce cas, on factorise par le terme « le plus gros ».

Proposition (combinaisons linéaires). *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient $(u_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}, (u_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (u_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$ des suites qui admettent des limites réelles $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p$ respectivement. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ des réels. Alors*

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_{k,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \ell_k.$$

⚠ Le nombre de suites dans la combinaison linéaire doit être **fixe**.

Par exemple, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{n+k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

en tant que somme de suites qui tendent vers 0.

S'il varie, on n'est plus du tout dans le cadre d'application de cette proposition et tout peut arriver.

Par exemple :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$

bien que ce soit une somme de suites qui tendent vers 0.

⚠ Mais le nombre de suites dans cette somme n'est pas fixe : il tend vers $+\infty$ « en même temps » que le rang des suites.

A l'aide de l'expression explicite des suites arithmétiques et géométriques, et des propriétés de sommes et multiplication externe de limites, on obtient :

Proposition. *Une suite réelle arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}^*$ tend vers $+\infty$ si $r > 0$ et vers $-\infty$ si $r < 0$.*

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Proposition. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle géométrique. Notons q sa raison.*

- *Si $q \in]-1\,;1[$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*
- *Si $q > 1$ et $u_0 \neq 0$, alors alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad u_0 > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad u_0 < 0 \end{cases}$.*
- *Si $q \in]-\infty\,;-1]$ et $u_0 \neq 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.*

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

c) Produit

Commençons par un résultat très utile dans la pratique :

Proposition. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $u_nv_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*

Une autre démonstration consiste à utiliser le théorème d'encadrement (cf. paragraphe IV.1).

Démonstration.

□

Exemples : *La suite $(\sin(n!))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\frac{\sin(n!)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*

L'opération « $0 \times \infty$ » est une forme indéterminée. En effet :

$$\frac{1}{n+1} \times (n^2+n) = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

$$\frac{1}{n^2+1} \times n^2 = \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$

(cette limite se montre par inverse, cf.paragraphe III.1.C).

Proposition. *Soient $(\ell, \ell') \in \mathbb{R}^2$. Le tableau suivant indique la limite de $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction des limites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:*

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' > 0$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' < 0$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell' = 0$	0	0	0	F.I.	F.I.
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$

Démonstration. Traitons deux cas parmi tous ces cas (les autres sont analogues et laissés en exercice) :

- Supposons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell' \in \mathbb{R}$.

A part le cas d'un produit de deux suites tendant vers $\pm\infty$, les autres s'obtiennent en échangeant le rôle des deux suites et/ou en les multipliant par -1.

On a fait en sorte d'appliquer les définitions des limites avec des ε' et de ε'' pour qu'à la fin il ne reste plus que ε. Cela donne une preuve dont la conclusion est très élégante mais elle peut sembler artificiellement technique. On aurait pu prendre ε à chaque fois mais on aurait obtenu, à la fin,

$$|u_n v_n - \ell\ell'| \leqslant (M + |\ell'|)\varepsilon.$$

Ce qui permet tout autant de conclure puisque $M + |\ell'| \neq 0$.

- Supposons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell < 0$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

□

Exemples :

- *On a* $\dfrac{1}{(n+1)7^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *puisque* $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et* $\dfrac{1}{7^n} = \left(\dfrac{1}{7}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *étant donné que* $-1 < \dfrac{1}{7} < 1$.
- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *posons* $u_n = \cos(n!) + 2^n$.

d) Inverse et quotient

Définition (limites 0^+ et 0^-). *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0 *et si* $u_n > 0$ *(respectivement* $u_n < 0$*) à partir d'un certain rang, alors on dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0^+ *(respectivement vers* 0^-*).*

Pratique si on veut élever à une puissance, cf. paragraphe III.3.

Remarques :

- Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, vers 0^+ ou vers $+\infty$, alors $v_n > 0$ à partir d'un certain rang.
- Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}_-^*$, vers 0^- ou vers $-\infty$, alors $v_n < 0$ à partir d'un certain rang.
- Dans les deux cas, on a $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang donc les termes de la suite $(1/v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définis à partir d'un certain rang. Dans le tableau ci-dessous, on

supposera que ce rang est 0 pour simplifier les énoncés et la démonstration (mais il suffit de faire démarrer les suites au premier rang en question sinon).

Proposition. *Soient $\ell \in \mathbb{R}$. Le tableau suivant indique la limite de $\left(\frac{1}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:*

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{v_n}$	$\frac{1}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-

Démonstration. Traitons deux cas parmi les cinq (les autres sont analogues et laissés en exercice) :

- Supposons que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell' \neq 0$. On se donne $\varepsilon > 0$. Puisque $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$:
  - ⋆ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|v_n - \ell'| \leqslant \varepsilon'$ (où $\varepsilon' > 0$ sera ensuite choisi en fonction de ε).
  - ⋆ il existe $n_0' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0'$, $|v_n - \ell'| \leqslant \frac{|\ell'|}{2}$. Par inégalité triangulaire renversée, on a $||v_n| - |\ell'|| \leqslant |v_n - \ell'| \leqslant \frac{|\ell'|}{2}$ donc $\frac{|\ell'|}{2} \leqslant |v_n|$.

  Posons $N = \max\{n_0, n_0'\}$. Pour tout $n \geqslant N$, on a $v_n \neq 0$ et
  $$\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell'}\right| = \frac{|\ell' - v_n|}{|v_n| \times |\ell'|} \leqslant \frac{\varepsilon'}{\frac{|\ell'|}{2} \times |\ell'|} = \frac{2\varepsilon'}{|\ell'|^2} \leqslant \varepsilon,$$
  si on choisit $\varepsilon' = \frac{|\ell'|^2}{2} > 0$. Ainsi $\frac{1}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\ell'}$.
- Supposons que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$. On se donne $A > 0$.
  - ⋆ Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|v_n - 0| \leqslant \frac{1}{A}$.
  - ⋆ Il existe $n_0' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n > 0$.

  Posons $N = \max\{n_0, n_0'\}$. Pour tout $n \geqslant N$, on a $0 < v_n \leqslant \frac{1}{A}$ donc $\frac{1}{v_n} \geqslant A$. Ainsi $\frac{1}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. □

L'opération « $\frac{0}{0}$ » est une forme indéterminée. En effet :
$$\frac{1/n^2}{1/n} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$
$$\frac{1/\sqrt{n}}{1/n} = \sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$
L'opération « $\frac{\infty}{\infty}$ » est une forme indéterminée. En effet :
$$\frac{n^5}{n} = n^4 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$
$$\frac{n+1}{n^3} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
Attention « $\frac{0}{\infty}$ » et « $\frac{\infty}{0}$ » ne sont pas des formes indéterminées.

Proposition. *Soient $(\ell, \ell') \in \mathbb{R}^2$. Le tableau suivant indique la limite de $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction des limites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:*

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' > 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' < 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$-\infty$	$+\infty$
0^+	$+\infty$	$-\infty$	*F.I.*	$+\infty$	$-\infty$
0^-	$-\infty$	$+\infty$	*F.I.*	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0^+	0^-	0	*F.I.*	*F.I.*
$-\infty$	0^-	0^+	0	*F.I.*	*F.I.*

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition précédente sur l'inverse et de la proposition sur la limite d'un produit du paragraphe précédent puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_n}{v_n} = u_n \times \frac{1}{v_n}$. □

Exemple : $\dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *car* $\mathrm{e}^{-n} = (\mathrm{e}^{-1})^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *(puisque* $-1 < \mathrm{e}^{-1} < -1$ *et* $\sqrt{n} = n^{1/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

2) Composition par une fonction

On a vu le concept de point adhérent dans le chapitre 13 (au programme de 2A seulement) : ici cela veut dire que $a \in D$ ou que a est une extrémité (éventuellement infinie) d'un des intervalles dont D est l'union ou de $+\infty$ si A n'est pas majorée ou de $-\infty$ si A n'est pas minorée.

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ qui est une union d'intervalles non vides et non réduits à un point.

Nous admettons provisoirement les propositions suivantes, que nous montrerons dans le chapitre 18.

Proposition. *Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit a un point adhérent à D. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que $u_n \in D$ à partir d'un certain rang.*
Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$, alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Exemple : *On a* $\mathrm{e}^{-n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *car*

La continuité en a est indispensable ! Par exemple, $-\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\left\lfloor -\dfrac{1}{n} \right\rfloor = -1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$ mais $-1 \neq \lfloor 0 \rfloor$.

⚠ On compose une suite par une fonction et non pas par une suite. Cela n'aurait aucun sens (à moins de d'avoir que des suites dont les termes sont des entiers naturels).

Proposition. *Soient $a \in D$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f **continue** en a et que $u_n \in D$ à partir d'un certain rang. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.*

Exemple : *On a* $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin(0) = 0$ *car*

3) Passage à la puissance : de « nouvelles » formes indéterminées

On rappelle que x^α a un sens :
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $\alpha \in \mathbb{N}$.
- pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, si $\alpha \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$.
- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, si $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ (mais on pose $0^\alpha = 0$ si $\alpha > 0$).

Proposition (passage à la puissance fixe). *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Supposons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.*

- *Si ℓ est un réel tel que ℓ^α existe et si u_n^α est bien définie à partir d'un certain rang, alors $u_n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^\alpha$.*
- *Si $\ell = +\infty$ et si $\alpha > 0$, alors $u_n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.*
- *Si $\ell = +\infty$ et si $\alpha < 0$, alors $u_n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*
- *Si $\ell = 0^+$ et si $\alpha < 0$, alors $u_n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.*

En particulier, si $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors, pour tout $p \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$:
- si $\ell \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt[p]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt[p]{\ell}$,
- si $\ell = +\infty$, $\sqrt[p]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Démonstration. Dans le cas où $\alpha \in \mathbb{Z}$, ce théorème est une conséquence des propriétés des limites de produits et quotients de suites (par récurrence sur $|\alpha|$). Dans le cas où $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, cela découle du paragraphe précédent. □

⚠ Mais cela fonctionne pour une puissance **fixe**. Pour calculer la limite d'une suite du type $(u_n^{v_n})_{n\in\mathbb{N}}$, il y a des précautions à prendre (les mêmes que celles évoquées dans le chapitre 4). Notamment on a vu qu'il existait des formes indéterminées qui apparaissent lorsqu'on élève à une puissance qui n'est pas fixe : « 0^0 », « ∞^0 » et « 1^∞ ».

Exemples :

- « 0^0 » :

$$\left(\mathrm{e}^{-(n+1)}\right)^{1/(n+1)^2} = \mathrm{e}^{-1/(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

- *« ∞^0 » :*

- *« 1^∞ » :*

L'erreur classique est de dire que $1+\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $1^n = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

C'est une erreur très grave ! Le raisonnement précédent est faux puisque la puissance n'est pas fixe (elle dépend aussi de n).

Quand on est en présence d'une suite élevée à une puissance qui est elle-même une suite, il faut avoir le réflexe de repasser par la forme exponentielle : $u_n^{v_n} = \exp(v_n \ln(u_n))$.

4) Comment lever les formes indéterminées ?

Et bien c'est tout un programme ! Voyons déjà quelques pistes dans ce paragraphe mais ce sera surtout dans le chapitre 26 que nous apprendrons à lever la plupart des formes indéterminées.

a) Croissances comparées

Les croissances comparées sont l'outil numéro 1 pour lever les formes indéterminées.

Nous renvoyons à la partie C du chapitre 4 pour toutes les remarques sur les croissances comparées qui s'appliquent encore à celles des suites.

Théorème (croissances comparées).

1. *Pour tous $a>0$ et $b>0$,* $\dfrac{(\ln(n))^b}{n^a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$
2. *Pour tous $q \in \,]1\,;+\infty[$ et $a>0$,* $\dfrac{n^a}{q^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

   Pour tous $q \in \,]0\,;1[$ et $a>0$, $n^a q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$
3. *Pour tout $q \in \,]1\,;+\infty[$,* $\dfrac{q^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$
4. $\dfrac{n!}{n^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

DÉMONSTRATION. Les deux premiers points découlent des croissances comparées pour les fonctions (cf. paragraphe V.3 de la partie C du chapitre 4) composée avec la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrons les deux autres :

3.

Dans la preuve des points 3 et 4, on pourra conclure plus rapidement (sans avoir recours à ε) quand on aura vu le théorème d'encadrement.

4.

$\square$

b) Première grande méthode : factoriser par le terme « le plus gros »

Une fois que l'on a identité le terme « le plus gros », cette méthode est très efficace. Problème : identifier celui-ci n'est pas toujours facile et nous allons surtout apprendre à la faire dans le chapitre 26.

Une méthode très efficace quand on est face à une somme de suites dont la limite est une forme indéterminée est de factoriser par « le terme le plus gros » afin de faire apparaître des quotients dont on sait déterminer la limite (par croissances comparées ou par produit de suite bornée par une suite qui tend vers 0 notamment).

On a déjà vu cette méthode dans le chapitre 4 pour les fonctions polynomiales ou rationnelles. Cela fonctionne encore pour les suites :

Exemples :

Mais on peut aussi simplement dire que c'est la composition d'une telle fonction avec la suite $(n)_{\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$ et appliquer le théorème de composition.

- *Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $u_n = n^{2024}+7n^2+1$. On a*

$$u_n = n^{2024}\left(1+\frac{7}{n^{2022}}+\frac{1}{n^{2024}}\right).$$

Or $n^{2024} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $1+\dfrac{7}{n^{2023}}+\dfrac{1}{n^{2024}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1+0+0=1$ donc, par produit, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

- *Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $u_n=\dfrac{n^3+4n^2-n+2}{-2n^3+7n+1}$. On a*

$$u_n = \frac{n^3\left(1+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)}{n^3\left(-2+\frac{7}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{1+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}{-2+\frac{7}{n^2}+\frac{1}{n^3}}$$

donc, par somme et par quotient, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1+0-0+0}{-2+0+0}=-\dfrac{1}{2}$.

Voyons d'autres exemples utilisant ce même principe mais faisant intervenir d'autres fonctions :

Exemples :

Le principe générale est que, une fois que l'on a factorisé par le « plus gros », tous les termes tendent vers 0 sauf un... sinon c'est que l'on s'est trompé dans le choix du « plus gros » et on recommence. Ici les deux plus gros sont $2n^3$ (au numérateur) et n^6 (au dénominateur).

- *Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $u_n=\dfrac{2n^3-7n^2-12}{\sqrt{n^6+n^5+1}}$. Déterminons la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a*

- *Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $u_n=\cos\left(\dfrac{\pi\, 3^n-n^{1789}\mathrm{e}^n+1789!}{\cos(n!)+3^{n+1}}\right)$. Déterminons la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

c) Deuxième grande méthode : utiliser les taux d'accroissements

L'erreur classique est d'oublier de vérifier que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers a. Soit f une fonction dérivable en a. Alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} f'(a)$ et donc, par composition :

$$u_n = \frac{f(v_n)-f(a)}{v_n-a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f'(a).$$

Exemples :

- *Plus haut, nous avons reparlé de la limite culte* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}$ *en disant qu'elle découlait de la limite d'un taux d'accroissement. Montrons plus généralement que :*

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \qquad \left(1+\frac{a}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^a.}$$

- *On a* $n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ *car :*

- *On a* $\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{2}{3}$. *En effet :*

d) Méthode de la quantité conjuguée

On a déjà vu cette méthode pour les fonctions. Elle est très efficace quand on a des différences de racines carrées.

À première vue c'est une forme indéterminée du type « $\infty-\infty$ ». On peut penser à factoriser par n dans chaque racine (mais cela ne va rien donner).

Exemple : *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+1789}$. On a*

$$v_n = \frac{n+1-(n+1789)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1789}} = \frac{-1788}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1789}}.$$

Par somme $n+1789 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Comme $\sqrt{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, par composition, $\sqrt{n+1789} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\sqrt{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Par somme $\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1789} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Enfin $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par passage à l'inverse et multiplication par -1788.

IV Théorèmes d'existence d'une limite

Dans les paragraphes précédents, nous avons vu comment la connaissance de limites permet d'obtenir des inégalités ou d'obtenir d'autres limites par opérations. Mais ces résultats supposent de savoir que la limite existe. Jusqu'à présent, nous nous sommes ramenés à des suites de référence ou des composition par des fonctions (ou en revenant à la définition quantifiée) pour obtenir des limites. Cette approche trouve ses limites quand on manipule des suites définies explicitement comme des sommes ou des produits ou quand on étudie des suites définies par récurrence ou implicitement. Dans ce paragraphe, nous allons voir trois grands théorèmes d'existence de limites.

1) Théorèmes d'encadrement, de minoration et de majoration

a) Théorème d'encadrement

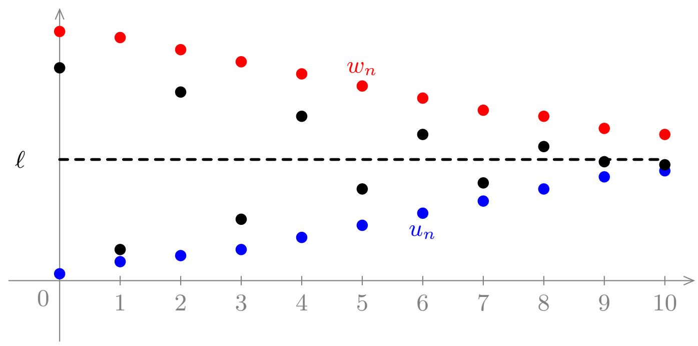
On parle aussi du « théorème des gendarmes » mais on lui préfèrera « théorème d'encadrement ».

Théorème (encadrement). *Supposons que*

- *A partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.*
- *Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$.*

Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ

DÉMONSTRATION.



Ce n'est qu'un dessin ! $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas forcément décroissante et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas forcément croissante (les suites ne sont pas forcément adjacentes, cf. paragraphe IV.3).

Lorsqu'on applique l'un de ces deux résultats, on mentionne le théorème d'encadrement. Le premier lui est d'ailleurs équivalent.

Corollaire. *Supposons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.*

- *Si, à partir d'un certain rang, $|u_n - \ell| \leqslant v_n$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.*
- *Si, à partir d'un certain rang, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*

$\leadsto$ Démonstration laissée en exercice.

Remarque : On retrouve le fait que le produit d'une suite bornée et d'une suite qui tend vers 0 tend à son tour vers 0.

Exemples :

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$. Fixons $n \geqslant 1$.*

Réflexe, quand on a une partie entière, on revient à la seule chose que l'on sait : l'inégalité qui la définit.

- *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $\pm\infty$. On a $\dfrac{u_n}{\lfloor u_n \rfloor} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. En effet :*

- *Soit $q \in \left]0\,;1\right[$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant q u_n$. Une telle suite est dite sous-géométrique et elle tend vers 0. En effet :*

Argument très classique : on applique la définition de la convergence vers ℓ avec $\varepsilon = b - \ell$.

- *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in [0\,;1[$. Alors $u_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En effet :*

b) Théorèmes de minoration et de majoration

Dans le cas des limites infinies, une seule inégalité suffit !

Théorème (minoration/majoration). *Supposons $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Alors*

1. ***Minoration.*** *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.*
2. ***Majoration.*** *Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$*

Démonstration. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers $+\infty$. Soit $A > 0$. Il existe alors $n_0' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0'$, $u_n \geqslant A$. Ainsi, pour tout $n \geqslant \max\{n_0, n_0'\}$, $v_n \geqslant A$. Par conséquent $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. L'autre point est analogue. $\square$

Exemple : *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + (-1)^n n \geqslant n^2 - n = n^2 \times \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc, par théorème de comparaison, $n^2 + (-1)^n \times n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.*

2) Théorème de la limite monotone

Cela découle de la propreté de la borne supérieure/inférieure puisque cette partie de $\mathbb{R}$ est non vide (elle contient u_0).

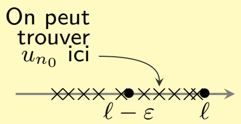
Définition. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Si la partie $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est majorée, sa borne supérieure est notée $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$. Si elle est minorée, sa borne inférieure est notée $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.*

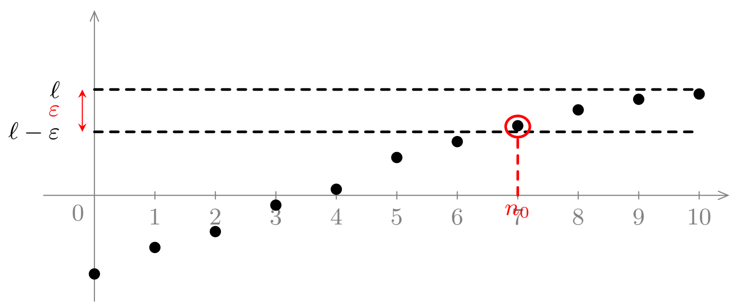
Théorème (de la limite monotone – cas croissant). *Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.*

1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors elle est convergente et sa limite est $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.*
2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.*

Démonstration.

1.





2.

En d'autres termes, une suite croissante converge si et seulement si elle est majorée. En tout cas, elle est minorée par son premier terme.

□

De manière analogue :

Théorème (de la limite monotone – cas décroissant). *Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*

1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, alors elle est convergente et sa limite est $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.*
2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée, alors elle tend vers $-\infty$.*

Corollaire. *Toute suite réelle monotone admet une limite (finie ou infinie).*

Remarques :

- Le théorème de convergence monotone nous donne des informations sur la limite, en cas de convergence :
  - ⋆ Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (respectivement strictement croissante) et majorée par un réel M, alors sa limite appartient à $[u_0\,;M]$ (respectivement à $]u_0\,;M]$).
    ⚠ En aucun cas on ne conclut que $\ell = M$ car M est un majorant de la suite, mais pas forcément sa borne supérieure.
  - ⋆ Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (respectivement strictement décroissante) et minorée par un réel m, alors sa limite appartient à $[m\,;u_0]$ (respectivement à $[m\,;u_0[$).
    ⚠ En aucun cas on ne conclut que $\ell = m$ car m est un minorant de la suite, mais pas forcément sa borne inférieure.

⚠ Par exemple, la suite $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante minorée par 0 mais converge vers 1.

- Le théorème de la limite monotone nous assure aussi que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (respectivement décroissante) et converge vers un réel ℓ, alors elle est majorée (respectivement minorée) par ℓ. De plus ℓ est la borne supérieure (respectivement inférieure) de la partie $A = \{u_n \,|\, n\in\mathbb{N}\}$.
- Se peut-il que ℓ soit le maximum (respectivement le minimum) de A ? Si c'est le cas, alors $\ell \in A$ donc il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} = \ell$. Mais alors la monotonie de la suite entraîne que $u_n = \ell$ pour tout $n \geqslant n_0$. Autrement dit la suite est stationnaire. Par contraposée, dès que la suite n'est pas stationnaire (c'est notamment le cas lorsqu'elle est strictement monotone), alors ℓ n'est pas le maximum (respectivement) le minimum et donc elle n'en admet pas.

Exemples :

- *Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.*

⚠ Deux erreurs graves et classiques à éviter :
• Dire que $u_n \leqslant 2-\dfrac{1}{n}$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée. Un majorant ne peux PAS dépendre de n. C'est un réel fixe.
• Conclure que, comme la suite est croissante majorée par 2, elle converge vers 2. Non, on sait juste que 2 est un majorant mais pas forcément la borne supérieure.

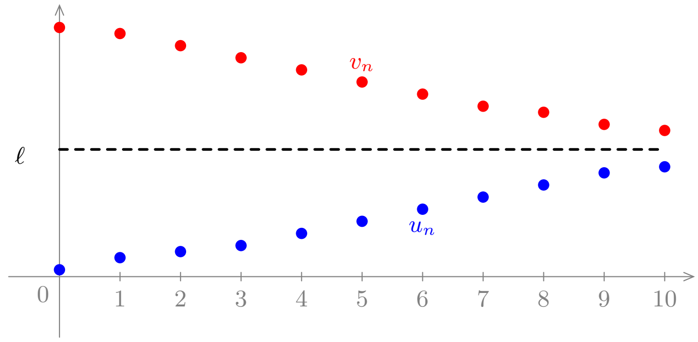
3) Suites adjacentes

Définition. *Deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et si $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*

Pour montrer que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, on doit montrer que $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On ne dit surtout pas que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ donc $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - \ell = 0$. On ne sait pas (encore) que les suites admettent une même limite : ce point est justement la raison d'être des suites adjacentes.

Proposition. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, alors elles convergent et ont la même limite ℓ. De plus (dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante), on a :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \qquad u_0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \ell \leqslant v_{p+1} \leqslant v_p \leqslant v_0.$$



Démonstration.

Sinon il existerait $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} = \ell$ ou $v_{n_0} = \ell$ et cela contredirait la stricte monotonie des suites.

Remarque : Si les suites sont strictement monotones, alors on a même

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in \mathbb{N} \qquad u_0 < u_n < u_{n+1} < \ell < v_{p+1} < v_p < v_0.$$

Les suites adjacentes sont notamment utilisées dans les algorithmes de dichotomie. Nous en verrons plusieurs exemples dans le chapitre 18.

Exemple : *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n \cdot n!}$. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. En effet :*

On admet que la limite commune de ces deux suites est $\mathrm{e} = \exp(1)$ (ce que l'on montrera dans le chapitre 25). Montrons alors que e est irrationnel :

4) Un exemple très important : la suite des intégrales de Wallis

Dans le chapitre 10, nous avons introduit la suite des intégrales de Wallis. Il s'agit de la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a aussi obtenu une formule pour W_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (selon la parité de n). Cette formule permet de montrer que $W_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Nous avons déjà montré (via une IPP) que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$. De plus $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$. Poursuivons l'étude de cette suite :

Et surtout pas :

$$W_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Il ne peut pas y avoir du n à la limite ! ! !

V Traduction séquentielles de certaines propriétés

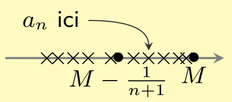
Dans ce paragraphe, nous allons revisiter quelques propriétés vues dans le chapitre 13 avec des suites.

1) Borne inférieure, borne supérieure

Proposition. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

- *Si A est majorée, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers $\sup(A)$.*
- *Si A n'est pas majorée, il existe une suite d'éléments de A qui diverge vers $+\infty$.*

Il existe



DÉMONSTRATION.

$\square$

Proposition (Caractérisation séquentielle de la borne supérieure). *Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Soit $M \in \mathbb{R}$. On a :*

$$M = \sup(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} M \text{ est un majorant de } A \\ \text{et} \\ \text{il existe une suite d'éléments de } A \text{ qui converge vers } M. \end{array} \right.$$

Démonstration. Le sens direct découle de la proposition précédente. Réciproquement, supposons que M soit un majorant de A et qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A de limite M. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|M - a_{n_0}| < \varepsilon$ donc $M - \varepsilon < a_{n_0}$. Comme M est un majorant de A, le théorème de caractérisation de la borne supérieure permet de conclure. $\square$

Exemples :

- *Considérons* $A = \left\{ \dfrac{p}{3^q + p} \,\middle|\, (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$.

- *Dans le chapitre précédent, nous avons montré que, pour tous $p \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$ et $y \in \mathbb{R}_+$, la partie $A_y = \{x \in \mathbb{R}_+ \,|\, x^p \leqslant y\}$ admet une borne supérieure. Notons la M_y et prouvons que $M_y^p = y$.*

Cela découle du théorème de la borne supérieure puisque A_y est une partie de $\mathbb{R}$ qui est non vide (elle contient 0) et majorée (par $x+1$).

Bien sûr on a les mêmes résultats pour une borne inférieure :

Proposition. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

- *Si A est minorée, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers $\inf(A)$.*
- *Si A n'est pas minorée, il existe une suite d'éléments de A qui diverge vers $-\infty$.*

Proposition (Caractérisation séquentielle de la borne inférieure). *Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Soit $m \in \mathbb{R}$. On a :*

$$m = \inf(A) \iff \begin{cases} M \text{ est un minorant de } A \\ \text{et} \\ \text{il existe une suite d'éléments de } A \text{ qui converge vers } M. \end{cases}$$

2) Densité

Proposition (Caractérisation séquentielle de la densité). *Une partie D de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel est limite d'une suite d'éléments de D.*

Démonstration.

$\square$

On peut aussi proposer $a_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemples : *On peut redémontrer la densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.*

- *Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$. On a alors*

  $$10^n x - 1 < \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x$$

  donc $x - \dfrac{1}{10^n} < a_n \leqslant x$. Le théorème d'encadrement permet de conclure que $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{Q}$. On en déduit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
- *Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + \sqrt{2}}{10^n}$. Comme dans le point précédent, on a $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. On en déduit que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Remarque : Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, le rationnel $a_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ utilisé dans l'exemple ci-dessous a une particularité : puisque $10^n a_n \in \mathbb{Z}$, il s'agit d'un nombre décimal.

En multipliant x par 10^n, on obtient un entier si bien que x est possède un nombre fini de chiffres après la virgule.

Définition. *On dit qu'un rationnel x est un nombre décimal s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = \dfrac{k}{10^n}$. On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.*

On a donc montré que

Théorème. *$\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Remarque : Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a même

$$\underbrace{\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}}_{=a_n} \leqslant x < \underbrace{\frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}}_{=b_n}$$

Le nombre a_n est le développement décimal (on reparlera de ce terme dans le chapitre 27) de x tronqué au $n^{\text{ième}}$ chiffre après la virgule. Par exemple, si $x = \pi$, : $a_0 = 3$, $a_1 = 3.1$, $a_2 = 3.14$, $a_3 = 3.141$, $a_4 = 3.1415$, etc.

donc $a_n \in \mathbb{D}$, $b_n \in \mathbb{D}$,

$$0 \leqslant b_n - x < b_n - a_n = 10^{-n} \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant x - a_n < b_n - a_n = 10^{-n}.$$

On en déduit que a_n et b_n sont des approximations de x à 10^{-n} près, la première étant inférieure (on dit « par défaut ») et la second supérieure (on dit « par excès »). On définit alors :

Définition. *Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, les décimaux $a_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $b_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$ sont appelés respectivement valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès de x.*

VI Extension aux suites complexes

Dans ce paragraphe, on se donne $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe.

1) Limite d'une suite complexe

On définit une suite convergente de la même façon qu'une suite réelle, à ceci près qu'on utilise le module et non plus la valeur absolue. Plus précisément :

$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ signifie que u_n se trouve dans le disque (fermé) de centre ℓ et de rayon ε.

⚠ L'équivalence à $u_n \in [\ell - \varepsilon \,;\, \ell + \varepsilon]$ n'a plus aucun sens ici !

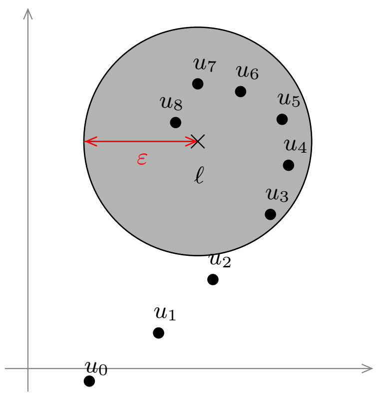
Définition. *Soit $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite (ou tend vers ℓ ou converge vers ℓ) si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.

Mais par « distance » ici, on parle de celle qui est définie par le module et non pas par la valeur absolue.

Remarque : En d'autres termes, la suite converge vers ℓ si ses termes s'approchent aussi près qu'on veut de ℓ sans plus s'en éloigner. Autrement dit si, quelle que soit la précision voulue, notée ε, la distance entre u_n et ℓ devient plus petite que ε dès que n est assez grand.



Dans la pratique, on peut se ramener facilement à des suites réelles grâce au résultat suivant :

En d'autres termes, pour étudier la limite d'une suite complexe, il suffit d'étudier deux suites réelles. Cela permet de montrer pour les suites complexes des résultats vrais jusque là pour des suites réelles sans passer par le module.

Théorème. *Soit $\ell \in \mathbb{C}$. On a :*

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \iff \operatorname{Re}(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \operatorname{Re}(\ell) \quad \textit{et} \quad \operatorname{Im}(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \operatorname{Im}(\ell).$$

Démonstration. Supposons que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$|\operatorname{Re}(u_n) - \operatorname{Re}(\ell)| = |\operatorname{Re}(u_n - \ell)| \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon,$$

$$|\operatorname{Im}(u_n) - \operatorname{Im}(\ell)| = |\operatorname{Im}(u_n - \ell)| \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit que $\operatorname{Re}(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \operatorname{Re}(\ell)$ et $\operatorname{Im}(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \operatorname{Im}(\ell)$.

Réciproquement, supposons que $\operatorname{Re}(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \operatorname{Re}(\ell)$ et $\operatorname{Im}(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \operatorname{Im}(\ell)$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors :

- il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|\operatorname{Re}(u_n) - \operatorname{Re}(\ell)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
- il existe $n_0' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0'$, $|\operatorname{Im}(u_n) - \operatorname{Im}(\ell)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Notons $N = \max\{n_0 ; n_0'\}$. Pour tout $n \geqslant N$, on a alors

Par inégalité triangulaire et car $|\mathrm{i}| = 1$.

$$\begin{aligned} |u_n - \ell| &= |\operatorname{Re}(u_n) + \mathrm{i}\operatorname{Im}(u_n) - \operatorname{Re}(\ell) - \mathrm{i}\operatorname{Im}(\ell)| \\ &= |(\operatorname{Re}(u_n) - \operatorname{Re}(\ell) + \mathrm{i}(\operatorname{Im}(u_n) - \operatorname{Im}(\ell))| \\ &\leqslant |(\operatorname{Re}(u_n) - \operatorname{Re}(\ell)| + |\operatorname{Im}(u_n) - \operatorname{Im}(\ell)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$. □

⚠ On ne définit pas la notion de limite $\pm\infty$ pour une suite complexe. Cela n'a aucun sens : où se trouvent $+\infty$ et $-\infty$ dans $\mathbb{C}$? Tout ce que l'on peut faire, c'est parler de suite complexe qui tend vers $+\infty$ en module.

2) Extension de certains résultats

Leur démonstration est laissée en exercice.

A l'aide du théorème précédent (faisant le lien avec les limites de suites réelles), plusieurs résultats vus dans ce chapitre se prolongent aux suites complexes :

- Il y a encore unicité de la limite sur $\mathbb{C}$.
- La convergence éventuelle d'une suite ne dépend toujours pas de ses premiers termes.
- Les opérations algébriques sur les suites admettant des limites finies sont encore valables sur $\mathbb{C}$.
- Le théorème de composition d'une suite par une fonction est encore valable quand cela a un sens.
- On peut définir la notion de partie dense sur $\mathbb{C}$ comme une partie qui rencontre tout disque ouvert centré en n'importe quel complexe. La caractérisation séquentielle de la densité est alors encore valable.

Toutes celles faisant apparaître une limite infinie n'ont aucun sens.

Le programme ne le dit pas explicitement cela dit.

D'autres résultats restent vrais en utilisant le module et la définition quantifiée (avec les mêmes preuves que dans le cas réel), par exemple :

Cela concerne les indices et non les termes.

- La notion de suite extraite d'une suite réelle s'étend totalement aux suites complexes. Les résultats suivants s'obtiennent avec les mêmes démonstrations :
  - ⋆ Si une suite complexe converge vers $\ell \in \mathbb{C}$, alors toute suite extraite aussi.

- ⋆ Une suite complexe converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si ses suites de rangs pairs et de rangs impairs convergent toutes les deux vers ℓ.

On a vu ce que cela signifiait pour une suite complexe dans la partie A. Toute fois, rappelons que la notion de suite complexe majorée ou minorée n'a aucun sens.

- Une suite complexe convergente est bornée.
- La suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si $|u_n - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (la suite $(|u_n - \ell|)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite réelle).
- Si $\ell \in \mathbb{C}$ sont tels que :
  - ⋆ il existe une suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0,
  - ⋆ $|u_n - \ell| \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang,

  alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

C'est le module ici.

Toutefois de nombreux résultats ne sont plus valables pour des suites complexes, typiquement tout ceux utilisant les relations d'ordre qui n'ont plus de sens :

- Cela n'a pas de sens de dire que l'inégalité large passe à la limite dans $\mathbb{C}$.
- Il n'y a pas de théorème d'encadrement (sauf le cas particulier, utilisant le module, cité ci-dessus) ou de comparaison.
- Il n'a pas de notion de suite complexe monotone donc il n'y a pas de théorème de la limite monotone ou de suites adjacentes.
- Il n'y a pas de limite pour une suite complexe qui est arithmétique de raison non réelle. Par contre, il y a convergence dans certain cas pour les suites complexes géométriques :

Si q est un réel positif, alors $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Mais sinon, cela n'a pas de sens de parler de limite infinie pour des suites complexes non réelles.

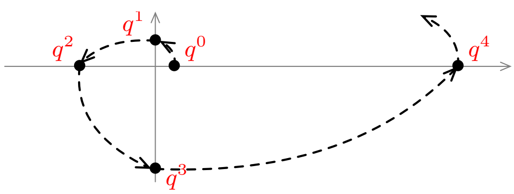
Théorème (Convergence des suites géométriques). *Soit $q \in \mathbb{C}$. La suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $|q| < 1$ ou $q = 1$. Plus précisément :*

- *Si $q = 1$, la suite (q^n) est constante égale à 1 donc converge vers 1.*
- *Si $|q| < 1$, alors $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*
- *Si $|q| = 1$ et si $q \neq 1$, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite (mais son module est constant égal à 1).*
- *Si $|q| > 1$, $|q|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ mais la suite (q^n) n'a pas de limite finie*

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Exemple : *Si $q = 2\mathrm{i}$, alors la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini **en module** mais n'a pas de limite.*

Plus généralement, multiplier par un complexe non nul $q = re^{\mathrm{i}\theta}$ revient à multiplier les longueurs par r et à faire une rotation d'angle θ (cf. chapitre 6). Les termes successifs de la suite géométrique de raison q « tournent ».



VII Le théorème de Bolzano-Weierstrass

Penser à la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On a vu qu'une suite convergente est bornée. Mais la réciproque est fausse. Le théorème suivant offre une réciproque partielle.

1) Énoncé du théorème

Théorème (Théorème de Bolzano-Weierstrass). *De toute suite (réelle ou complexe) bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Avec le vocabulaire (HP) du paragraphe I.5.c, toute suite bornée admet une valeur d'adhérence.

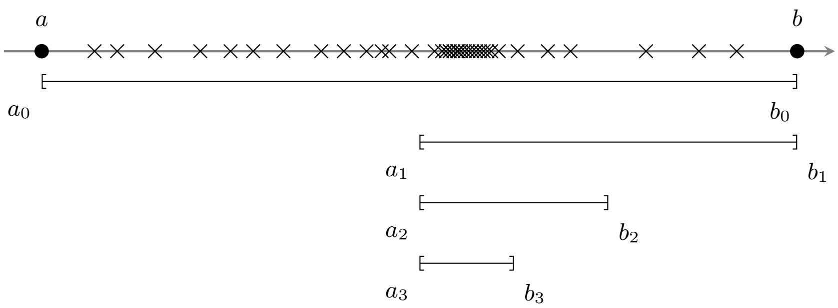
$\inf_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$ sont respectivement les bornes inférieure et supérieure de l'ensemble $\{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ des termes de la suite, qui est une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$ donc elles existent bien.

Remarque : Cela signifie qu'une suite bornée (donc à valeurs dans un segment si elle est réelle ou à valeurs dans un disque fermé si elle est complexe) s'accumule forcément quelque-part.

2) Démonstration dans le cas d'une suite réelle bornée

Il existe plusieurs démonstrations. Conformément au programme, nous en présentons une qui utilise le principe de la dichotomie (on retrouvera ce principe dans la démonstration du TVI dans le chapitre 18).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Notons alors $a = \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $b = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$ si bien que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[a\,;b]$.



3) Démonstration dans le cas d'une suite complexe bornée

Il faut retenir cette méthode : pour extraire des suites qui convergent « en même temps », il ne faut pas extraire séparément mais successivement. Si on avait appliqué Bolzano-Weierstrass (réel) séparément, on aurait obtenu une sous-suite $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ convergente et une sous-suite $(y_{k_p})_{p\in\mathbb{N}}$. Problème : rien ne dit que ce deux sous-suites portent sur les mêmes indices. Par exemple, il se pourrait que la première porte sur les indices pairs et la second sur les indices impairs.