Chapitre 26

Analyse asymptotique

Partie B : Développements limités

Dans cette partie, on considère D une union d'intervalles non vides et non réduit à un point. On considère a un **réel** adhérent à D. On se donne enfin f et g des fonctions de D dans $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

I Notion de développement limité

1) Définition et interprétation

Dans la partie A, nous avons vu que

$$\sqrt{1+x}-1 \underset{0}{\sim} \frac{x}{2} \qquad \cos(x)-1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}, \qquad \ln(x) \underset{1}{\sim} x-1$$

Ces équivalents se reformulent de la façon suivante :

Il s'agit à chaque fois d'une approximation simple (polynomiale) de ces fonctions au voisinage de 0 pour les deux premières et de 1 pour la troisième. On a vu que cela permet de lever des formes indéterminées dans le calcul de limite. Mais, lorsqu'on somme des équivalents, on a aussi vu que cela pouvait être insuffisant. Peut-on obtenir des termes supplémentaires, pour obtenir une approximation encore meilleure ?

On dit aussi que f admet un DL à l'ordre n au voisinage de a ou encore un $\mathrm{DL}_n(a)$.

Définition. *On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a (ou en a) s'il existe des réels $c_0, c_1, \dots, c_n$ tels que*

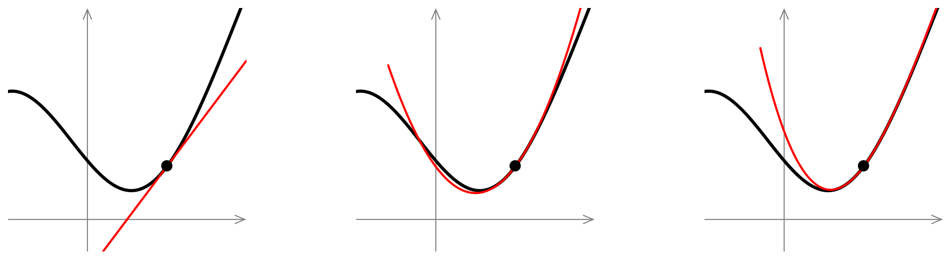
$$f(x) \underset{a}{=} c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right).$$

Remarque : Autrement dit, f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a s'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$. Dans la définition, il s'agit du polynôme

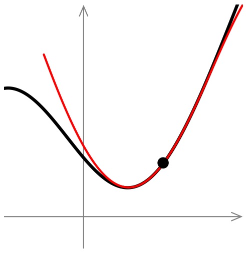
$$P = c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + \cdots + c_n X^n = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k.$$

Le polynôme P est appelé la partie régulière du développement limité. Les réels $c_0, c_1, \dots, c_n$ sont appelée les coefficients (d'ordre $0, 1, 2, \dots, n$ respectivement) du développement limité.

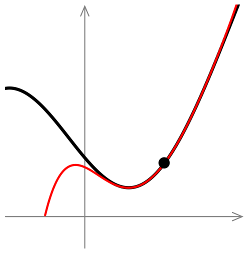
Plus l'ordre du développement limité est élevé, meilleure est l'approximation de la fonction par la partie régulière, comme on peut le voir sur les dessins ci-contre (en noir la courbe de la fonction, en rouge la courbe de la partie régulière du DL).



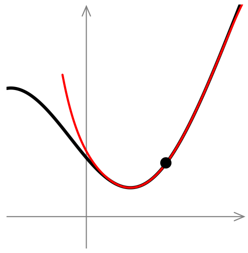
À l'ordre 1 À l'ordre 2 À l'ordre 3



À l'ordre 4



À l'ordre 5



À l'ordre 6

2) Premiers exemples

- *Reprenons les trois exemples du paragraphe précédent :*

- *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

3) Premières propriétés

a) Troncature

Proposition (troncature). *Si f admet un DL à l'ordre n au voisinage de a alors, pour tout $p \leqslant n$, f admet un DL à l'ordre p au voisinage de a. Plus précisément : si*

$$f(x) \underset{a}{=} c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

alors , pour tout $p \leqslant n$,

$$f(x) \underset{a}{=} c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_p(x-a)^p + \mathrm{o}\left((x-a)^p\right).$$

On dit alors que le développement limité de f est tronqué à l'ordre n.

Démonstration. Soit $p \in \mathbb{N}$. Il existe $(c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$f(x) \underset{a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_p(x-a)^p + \underbrace{c_{p+1}(x-a)^{p+1} + \cdots + c_n(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)}_{=\mathrm{o}(x^p)}$$

ce qui permet de conclure. □

b) Unicité du DL

Proposition (unicité du DL). *Si f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a, alors celui-ci est unique.*

C'est-à-dire la liste des coefficients $c_0, \dots, c_n$ du DL est unique.

Démonstration.

Attention, on rappelle qu'on ne peut pas simplifier les o !

$\square$

Corollaire. *On suppose que D est symétrique par rapport à 0 et que f admet un DL à l'ordre n au voisinage de 0.*

- *Si f est impaire sur D, alors tous les coefficients d'ordre pair $(c_0, c_2, c_4, \dots)$ sont nuls.*
- *Si f est paire sur D, alors tous les coefficients d'ordre impair $(c_1, c_3, c_5, \dots)$ sont nuls.*

DÉMONSTRATION.

$\square$

Remarque : Cela peut permettre notamment d'augmenter « gratuitement » l'ordre d'un DL si on connaît sa parité.

Par exemple, nous verrons dans le paragraphe III que $\cos$ *admet un développement limité à tout ordre. On a déjà vu que* $\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)$*. Comme* $\cos$ *est paire, ses coefficients d'ordre impair sont nuls et donc* $\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$*.*

c) Se ramener à un DL en 0

La plupart des développements limités usuels sont en 0 (comme on le verra dans le paragraphe III) et on peut s'y ramener facilement :

Lorsqu'on cherche un $\mathrm{DL}_n(a)$, il est souvent bien plus simple de se ramener à un $\mathrm{DL}_n(0)$ en faisant le « changement de variable $x = x_0 + h$ » :

Proposition. *La fonction f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a si et seulement si la fonction $h \longmapsto f(a+h)$ admet un développement limité d'ordre n en 0. Plus précisément, pour tout $(c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$,*

$$f(x) \underset{x \to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big)$$

si et seulement si

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} c_0 + c_1 h + \cdots + c_n h^n + o\big(h^n\big).$$

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Exemple : *Déterminons un développement limité d'ordre 2 en $\dfrac{\pi}{2}$ de $\sin$.*

d) Lien avec les équivalents

Lorsqu'une fonction admet en a un développement limité dont la partie régulière n'est pas nulle, alors elle est équivalent au premier terme non nul de son DL :

Théorème. *Supposons que f admet un DL à l'ordre n en a :*

$$f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big)$$

avec $c_0, \dots, c_n$ non tous nuls. Notons $k = \min\{j \in [\![0\,;n]\!] \mid c_j \neq 0\}$. Alors

$$f(x) \underset{a}{\sim} c_k(x-a)^k.$$

Démonstration. Par définition $c_0 = \cdots = c_{k-1} = 0$ et $c_k \neq 0$. En tronquant le DL à l'ordre k, on obtient :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} c_k(x-a)^n + o\big((x-a)^k\big) \underset{a}{\sim} c_k(x-a)^k.$$

□

Les DL sont donc des armes redoutables pour trouver des équivalents (particulièrement quand il y a une somme) et donc des limites. Nous verrons des exemples dès que nous aurons listé les développements limités à tout ordre des fonctions usuelles.

4) DL avec O

Ci-contre le DL avec le O entraîne celui avec le o mais la réciproque est fausse.

On rencontrera parfois des DL avec un O au lieu d'un o, c'est-à-dire

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + \mathrm{O}\left((x-a)^{n+1}\right)$$

au lieu de

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right).$$

L'avantage de cette écriture est que :

- Elle nous évite de devoir calculer le coefficient devant x^{n+1} qui peut être parfois compliqué. Cela sera souvent suffisant dans le chapitre 27.
- Le O étant très maniable, cette écriture est aussi très maniable et permet de regrouper sous une même bannière des termes très divers.
- Elle indique l'ordre de grandeur du prochain terme donc dire que le prochain terme est un $\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)$ est plus précis que dire que c'est un $\mathrm{o}\left(x^n\right)$.
- Si on connaît un DL à l'ordre n et que l'on sait qu'il y a un DL à l'ordre $n+1$ (sans le connaître), alors on peut remplacer $\mathrm{o}\left(x^n\right)$ par $\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)$.

Par exemple elle dit qu'il n'y a pas de terme en $x^{n+\frac{1}{2}}$.

Par contre, si on ne sait pas qu'il y a un DL à l'ordre $n+1$, on ne peut rien dire. Nous verrons surtout dans la partie C que, pour les développements dits asymptotiques, il peut exister des termes de tout type (par exemple $x^{n+\frac{1}{2}}$ ou $\frac{x^n}{\ln(x)}$).

Exemple : *On connaît un DL à l'ordre 2 de $\cos$, on et on verra dans le paragraphe III que $\cos$ admet des développements limités à tout ordre. Puisque $\cos$ est pair, les coefficients de degré impairs sont nuls. Ainsi on peut affirme que*

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{O}\left(x^4\right).$$

On verra dans le paragraphe III que, dans ce O, se cache un $\dfrac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^4\right)$

II Théorèmes d'existence de développements limités

1) CNS d'un DL à l'ordre 0 et à l'ordre 1

Supposons que f n'est pas définie en a et possède un DL à l'ordre 0 en a :

$$f(x) = c_0 + \mathrm{o}(1)$$

Alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} c_0$. Ainsi f est prolongeable par continuité en a en posant $f(a) = c_0$.

Proposition (CNS d'un DL à l'ordre 0). *Supposons que f soit définie en a. La fonction f admet un développement limité à l'ordre 0 en a si et seulement si f est continue en a. Dans ce cas, $c_0 = f(a)$.*

Démonstration.

□

Proposition (CNS d'un DL à l'ordre 1). *Supposons que f soit définie en a. La fonction f admet un développement à l'ordre 1 en a si et seulement si f est dérivable en a. Dans ce cas, $c_0 = f(a)$ et $c_1 = f'(a)$.*

Démonstration.

□

Plus précisément, l'existence d'un DL à l'ordre 2 en a n'implique pas que f soit deux fois dérivable en a.

On pourrait croire que l'on peut continuer ainsi indéfiniment, à savoir que f admet un DL d'ordre n en a si et seulement si f est n fois dérivable en a. Mais ce résultat est faux à partir de $n = 2$.

Par exemple, considérons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

2) La formule de Taylor-Young

Dans le chapitre précédent, nous avons vu (et démontré) une condition nécessaire d'existence d'un développement limité d'ordre n : la formule de Taylor-Young. Reformulons simplement le théorème en terme de développement limité :

Théorème (formule de Taylor-Young). *Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ au voisinage de a, alors f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a :*

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right).$$

Notons que cette formule est vraie dès que f est n fois dérivable en a mais le programme impose l'hypothèse $\mathscr{C}^n$ et nous avons utilisé cette dernière pour la preuve présentée dans le chapitre 25.

Remarque : Sous forme plus condensée, $f(x) \underset{a}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$.

C'est principalement ce théorème qui va nous permettre d'obtenir les développements limités des fonctions usuelles dans la paragraphe suivant.

III Développements limités usuels

Théorème (développements limités usuels). *Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Les fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{1 \pm x}$, $x \longmapsto \ln(1 \pm x)$, $x \longmapsto (1+x)^\alpha$, $\exp$, ch, sh, $\cos$, $\sin$ et Arctan admettent des développements limités à tout ordre en 0. Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

- $\displaystyle \frac{1}{1-x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right) \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)$
- $\displaystyle \frac{1}{1+x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right) \underset{0}{=} 1 - x + x^2 + -x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)$
- $\displaystyle \ln(1-x) \underset{0}{=} -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + \mathrm{o}\left(x^n\right) \underset{0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots - \frac{x^n}{n} + \mathrm{o}\left(x^n\right)$
- $\displaystyle \ln(1+x) \underset{0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)$
- $$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &\underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right) \\ &\underset{0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 \\ &\qquad + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)\end{aligned}$$
- $\displaystyle \mathrm{e}^x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}\left(x^n\right) \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}\left(x^n\right)$

Moyen mnéomtechnique pour retenir les DL de $x \mapsto \ln(1 \pm x)$: ce sont les primitives des DL de $x \mapsto \dfrac{1}{1 \pm x}$.

Moyen mnémotechnique pour retenir les DL de ch et sh : ce sont le DL de $\exp$ en ne gardant que les termes d'ordre pair et impair respectivement.

- $\operatorname{ch}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right) \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right)$
- $\operatorname{sh}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$
- $\cos(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right)$
- $\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$

  $\underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$
- $\operatorname{Arctan}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$

  $\underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$

Moyen mnémotechnique pour retenir les DL de $\cos$ et $\sin$: ce sont le DL de ch et sh mais en alternant les signes.

Moyen mnémotechnique pour retenir les DL de Arctan : c'est le même que le DL de $\sin$ mais sans les ! au dénominateur.

Démonstration. Toutes les fonctions citées sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 donc la formule de Taylor-Young assure qu'elles admettent des développements limités à tout ordre en 0. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Le DL de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ à l'ordre n a été déterminé dans le paragraphe I.2.
- Le DL de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ à l'ordre n s'obtient à partir du précédent en substituant x par $-x$ (possible puisque $-x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$).
- Le DL de $f : x \longmapsto \ln(1-x)$ à l'ordre n peut s'obtenir en primitivant celui de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ (cf. paragraphe IV.5) mais il découle de la formule de Taylor-Young puisque, pour tout $x \in \,]-1\,;1[$,
$$f'(x) = \frac{-1}{1-x}, \quad f''(x) = \frac{-1}{(1-x)^2}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{-2}{(1-x)^3}, \dots$$
Par récurrence immédiate, pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, $f^{(k)}(x) = \dfrac{-(k-1)!}{(1-x)^k}$ et donc $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} = -\dfrac{(k-1)!}{k!} = -\dfrac{1}{k}$.
- Le DL de $x \longmapsto \ln(1+x)$ à l'ordre n peut s'obtenir à partir du précédent en substituant x par $-x$ (possible puisque $-x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$).
- Le DL de $f : x \longmapsto (1+x)^\alpha$ à l'ordre n découle de la formule de Taylor-Young puisque, pour tous $x \in \,]-1\,;1[$ et $k \in [\![0\,;n]\!]$, $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$ et donc $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$.

Notons que, si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors $f^{(k)}(x) = 0$ pour tout $k > \alpha$. C'est attendu puisqu'à alors f est une fonction polynomiale de degré α.

- Le DL de $\exp$ à l'ordre n découle de la formule de Taylor-Young puisque, pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, $\exp^{(k)} = \exp$ et donc $\dfrac{\exp^{(k)}(0)}{k!} = \dfrac{1}{k!}$.
- Le DL de ch à l'ordre $2n$ découle de la formule de Taylor-Young puisque, pour tout $p \in [\![0\,;2n]\!]$, $\operatorname{ch}^{(p)} = \begin{cases} \operatorname{ch} & \text{si } p \text{ pair} \\ \operatorname{sh} & \text{si } p \text{ impair} \end{cases}$ donc $\dfrac{\operatorname{ch}^{(p)}(0)}{p!} = \begin{cases} \frac{1}{p!} & \text{si } p \text{ pair} \\ 0 & \text{si } p \text{ impair} \end{cases}$
On effectue alors le changement d'indice $p = 2k$ (autorisé puisque les termes d'indice impair sont nuls).
- Le DL de sh à l'ordre $2n+1$ découle de la formule de Taylor-Young puisque, pour tout $p \in [\![0\,;2n+1]\!]$, $\operatorname{sh}^{(p)} = \begin{cases} \operatorname{sh} & \text{si } p \text{ impair} \\ \operatorname{ch} & \text{si } p \text{ pair} \end{cases}$ donc $\dfrac{\operatorname{sh}^{(p)}(0)}{p!} = \begin{cases} \frac{1}{p!} & \text{si } p \text{ impair} \\ 0 & \text{si } p \text{ pair} \end{cases}$

On effectue alors le changement d'indice $p = 2k + 1$ (autorisé puisque les termes d'indice pair sont nuls).

- Le DL de $\cos$ à l'ordre $2n$ découle de la formule de Taylor-Young puisque, pour tout $p \in [\![0\,;2n]\!]$, $\cos^{(p)} = \begin{cases} \cos & \text{si } p \equiv 0\,[4] \\ -\sin & \text{si } p \equiv 1\,[4] \\ -\cos & \text{si } p \equiv 2\,[4] \\ \sin & \text{si } p \equiv 3\,[4] \end{cases}$ donc $\dfrac{\cos^{(p)}(0)}{p!} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{p}{2}}}{p!} & \text{si } p \text{ pair} \\ 0 & \text{si } p \text{ impair} \end{cases}$
On effectue alors le changement d'indice $p = 2k$ (autorisé puisque les termes d'indice pair sont nuls).
- Le DL de $\sin$ à l'ordre $2n+1$ découle de la formule de Taylor-Young puisque, pour tout $p \in [\![0\,;2n+1]\!]$, $\sin^{(p)} = \begin{cases} \sin & \text{si } p \equiv 0\,[4] \\ \cos & \text{si } p \equiv 1\,[4] \\ -\sin & \text{si } p \equiv 2\,[4] \\ -\cos & \text{si } p \equiv 3\,[4] \end{cases}$ donc $\dfrac{\sin^{(p)}(0)}{p!} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p!} & \text{si } p \text{ impair} \\ 0 & \text{si } p \text{ pair} \end{cases}$
On effectue alors le changement d'indice $p = 2k + 1$ (autorisé puisque les termes d'indice pair sont nuls).
- Le DL de Arctan est admis temporairement (et sera montré dans le paragraphe IV.5).

$\square$

Exemples :

- *Par exemple, à l'ordre 5 (ce qui est en général amplement suffisant) :*
  - ⋆ $\dfrac{1}{1-x} \underset{0}{=}$
  - ⋆ $\dfrac{1}{1+x} \underset{0}{=}$
  - ⋆ $\ln(1-x) \underset{0}{=}$
  - ⋆ $\ln(1+x) \underset{0}{=}$
  - ⋆ $\mathrm{e}^x \underset{0}{=}$
  - ⋆ $\mathrm{ch}(x) \underset{0}{=}$
  - ⋆ $\mathrm{sh}(x) \underset{0}{=}$
  - ⋆ $\cos(x) \underset{0}{=}$
  - ⋆ $\sin(x) \underset{0}{=}$
  - ⋆ $\mathrm{Arctan}(x) \underset{0}{=}$
- *Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminons le développement de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre n en 0.*

C'est le cas où $\alpha = -\frac{1}{2}$ dans la formule pour $(1+x)^\alpha$. A savoir retrouver car c'est très très classique !

  - ⋆ *Commençons par les DL d'ordres 0 à 3 :*

⋆ *A l'ordre n quelconque maintenant :*

C'est le cas où $\alpha = \frac{1}{2}$ cette fois.

- *On montre de même que*

$$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}(2n-1)}\binom{2n}{n}x^n + o(x^n)$$

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

- *Voyons un premier exemple d'application des développements limités à la recherche d'un équivalent. Déterminons un équivalent de* $\dfrac{(\sin(x) - x)\operatorname{Arctan}(x)}{\mathrm{e}^x - 1 - x}$ *en* 0. *On a :*

Remarque : Le programme n'impose pas de connaitre les DL en 0 de Arcsin et Arccos. Nous verrons dans le paragraphe IV.5 comment les obtenir (plus ou moins) rapidement.

Théorème. *La fonction* $\tan$ *admet des développements limités à tout ordre en* 0. *On a*

$$\tan(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right).$$

Au delà de l'ordre 7 (ou plutôt de l'ordre 8 puisque le coefficient d'ordre 8 est nul), les coefficients sont difficiles à retenir. Contrairement aux DL du théorème précédent, il n'y a pas de formule simple pour les coefficients.

Démonstration. Puisque $\tan$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0, la formule de Taylor-Young assure que $\tan$ admet des développements limités à tout ordre en 0. On a

$$\tan' = 1 + \tan^2, \qquad \tan'' = 2(1+\tan^2)\tan, \qquad \tan^{(3)} = 2\tan'(1 + 3\tan^2)$$

donc $\tan'(0) = 1$, $\tan''(0) = 0$ et $\tan^{(3)}(0) = 2$. La formule de Taylor-Young à l'ordre 3 permet de conclure. □

Remarque : En TD, nous utiliserons parfois plusieurs termes du DL de $\tan$ en 0 :

$$\tan(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \mathrm{o}\left(x^7\right)$$

Nous verrons en TD et dans les paragraphes suivants, plusieurs méthodes pour l'obtenir.

IV Opérations sur les développements limités

Dans la pratique, on utilise rarement la formule de Taylor-Young puisqu'elle demande le calcul des dérivées successives des fonctions, ce qui est rapidement fastidieux. À la place, on utilise les DL usuels pour obtenir ceux de fonctions construites à l'aide des fonctions usuelles à partir de sommes, produits, quotients, composées, etc.

1) Combinaison linéaire

Pour sommer un DL à l'ordre p et un DL à l'ordre $n < p$, on commence par tronquer le premier à l'ordre n puis on somme. En bref on somme les ordres communs et tout ce qui reste est aspiré par le « trou noir » du $\mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$.

Proposition. *Soit $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}^*)^2$. Si les fonctions f et g admettent des développements limités d'ordre n en a dont les parties régulières sont les polynômes P et Q respectivement, alors $\lambda f + \mu g$ admet un développement limité d'ordre n en a dont la partie régulière $\lambda P + \mu Q$.*

DÉMONSTRATION. On a alors

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)(x) &\underset{a}{=} \lambda(P(x-a) + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)) + \mu(Q(x-a) + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)) \\ &\underset{a}{=} \lambda P(x-a) + \mu Q(x-a) + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right).\end{aligned}$$

On conclut en remarquant que $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{R}_n[X]$. $\square$

On a regroupé les deux $\mathrm{o}\left(x^4\right)$: rappelons qu'on peut sommer les mêmes o !

Exemple : *Donner le DL à l'ordre 4 en 0 de $f : x \longmapsto \sin(x) + 2\ln(1+x)$.*

2) Produit

Là encore, pour faire le produit d'un DL à l'ordre p et un DL à l'ordre $n < p$, on commence par tronquer le premier à l'ordre n puis on les multiplie. Ce qui reste est aspiré par le « trou noir » du $\mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$.

Proposition. *Si les fonctions f et g admettent des développements limités d'ordre n en a dont les parties régulières sont les polynômes P et Q respectivement, alors $f \times g$ admet un développement limité d'ordre n en a dont la partie régulière est $P \times Q$ tronqué à l'ordre n.*

DÉMONSTRATION. Il existe $(c_0, \ldots, c_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ tel que $PQ = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} c_k X^k$. On a

$$\begin{aligned}(fg)(a+h) &\underset{h\to 0}{=} (P(h) + \mathrm{o}\left(h^n\right))(Q(h) + \mathrm{o}\left(h^n\right)) \\ &\underset{h\to 0}{=} P(h)Q(h) + P(h)\mathrm{o}\left(h^n\right) + Q(h)\mathrm{o}\left(h^n\right) + \mathrm{o}\left(h^n\right) o(h^n) \\ &\underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k h^k + \sum_{k=n+1}^{2n} c_k h^k + h^n\big(P(h)\mathrm{o}\left(1\right) + Q(h)\mathrm{o}\left(1\right) + o(h^n)\big) \\ &\underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k h^k + h^n\Bigg(\underbrace{\sum_{k=n+1}^{2n} c_k h^{k-n} + P(h)\mathrm{o}\left(1\right) + Qh)\mathrm{o}\left(1\right) + \mathrm{o}\left(h^n\right)}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0}\Bigg) \\ &\underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k h^k + \mathrm{o}\left(h^n\right).\end{aligned}$$

Ainsi

$$(fg)(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right).$$

et la partie régulière est bien PQ tronqué à l'ordre n. $\square$

En clair : pour le produit de DL à l'ordre n, on multiplie les parties régulière en ne gardant que les termes de degré inférieur à n. Réfléchir aux ordres peut donc parfois éviter des calculs compliqués et inutiles.

Exemple : *Donner le DL à l'ordre* 5 *en* 0 *de* $f : x \longmapsto \sin(x) \times (\cos(x) - 1)$.

- ***Méthode naïve :*** *Donnons le DL de* $\sin$ *et* $\cos - 1$ *à l'ordre* 5*, et développons :*

- ***En pratique :*** *Tout d'abord, il est inutile d'écrire un terme quand on se rend compte qu'il a un ordre trop grand donc, dans notre exemple, quand on se rend compte qu'il est négligeable devant* x^5*. Par conséquent, quand on développe, on n'écrit que les termes de degré inférieur ou égal à* 5*, les autres étant aspirés par le* $\mathrm{o}\left(x^5\right)$ *qu'on met à la fin de l'expression. De plus, il est même inutile de mettre certains termes au début du calcul. Dans notre exemple :*
  - $\star$ *le premier terme de* $\sin(x)$ *est* x*, donc tous les termes de* $\cos(x) - 1$ *seront multipliés au moins par* x *donc leur degré augmentera au moins de* 1*. Puisqu'on veut du degré* 5 *à la fin, il suffit de donner le DL du* $\cos$ *à l'ordre* 4*.*
  - $\star$ *le premier terme de* $\cos(x) - 1$ *est* $-\dfrac{x^2}{2}$*, donc tous les termes de* $\sin(x)$ *seront multipliés au moins par* x^2 *donc leur degré augmentera au moins de* 2*. Puisqu'on veut du degré* 5 *à la fin, il suffit de donner le DL du* $\sin$ *à l'ordre* 3*.*

  En conclusion, en pratique, on écrira simplement :

On ne développe pas tous les termes (par exemple, on n'écrit pas le terme $x^3 \times x^4$ ni le terme $x^3 \times \mathrm{o}\left(x^4\right)$) : encore une fois, on n'écrit pas les termes dont on sait déjà qu'ils seront négligeables !

Exemples :

- *Donner le DL de* $\sin^2$ *à l'ordre* 4 *en* 0*.*

- *Donner le DL de* $x \longmapsto x^3\cos(x)$ *à l'ordre 8.*

3) Composition

Conformément au programme, il n'y a pas de résultat général à connaître concernant les compositions dans les développements limités. Le principe est très simple : si on dispose d'une fonction f qui admet un DL d'ordre n en a :

$$f(u) \underset{u\to a}{=} c_0 + c_1(u-a) + \cdots + c_n(u-a)^n + \mathrm{o}\left((u-a)^n\right),$$

Puisque tous les DL usuels sont en 0, on compose à droite par une fonction ou un développement limite, **qui tend vers** 0.

alors on peut remplacer u par toute quantité qui tend vers a. C'est le principe de substitution dans les o vu dans le paragraphe IV.1.b de la partie A. Cette quantité peut être :

- u_n avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.
- $u(x)$ avec u une fonction telle que $u(x) \xrightarrow[x\to b]{} a$ où b est un point adhérent au domaine de définition de u.
- un développement limité d'une fonction u en un réel b de son domaine de définition et dont le coefficient constant est a.

Contentons-nous d'exemples pour bien comprendre le principe :

Exemples :

- *Donner le DL à l'ordre* 5 *en* 0 *de* $x \longmapsto \sin(2x)$.

- *Donner le DL à l'ordre* 5 *en* 0 *de* $x \longmapsto \sin(x^2)$.

- *Donnons le DL de* $\ln$ *au voisinage de* 2 *à l'ordre* 3.

Il faut absolument penser à se ramener au DL de $\ln(1 \pm u)$ qui est le seul que l'on connaît avec du $\ln$.

- *Donner le DL de* $x \longmapsto e^x \sin(x^2)$ *à l'ordre* 7 *en* 0*.*

- *Donner le DL de* $\sin \circ \tan$ *à l'ordre* 4 *en* 0*.*

On a tout de suite simplifié le

$$\mathrm{o}\left(\left(x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right)^4\right)$$

en $\mathrm{o}\left(x^4\right)$: cela doit vous sembler évident (et ça l'est puisqu'un o d'un terme équivalent à x^4 est un $\mathrm{o}\left(4\right)$.

- *Reprenons l'exemple de* $u_n = 1 - \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ *dont nous avons échoué, dans le paragraphe II.7 de la partie A, à donner un équivalent. La raison est que nous n'avions que les équivalents usuels pour faire le calcul, c'est-à-dire des DL à l'ordre 1.*

4) Quotient

Commençons par deux exemples que l'on sait déjà obtenir facilement avec les techniques des paragraphes précédents :

Exemples :

- *Donner le DL de* $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)-1}{x^2}$ *à l'ordre* 5 *en* 0.

- *Calculer le DL à l'ordre 3 de* $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{2+x}$ *en* 0.

Lorsque $g(a) = 0$, on peut quant même s'en sortir dans certains cas : notons $c_k(x-a)^k$ le premier terme non nul du DL de f et $b_p(x-a)^p$ le premier terme non nul du DL de g (on a forcément $p \geqslant 1$).
• Si $p \leqslant k$, alors on simplifie au numérateur et au dénominateur par $(x-a)^p$ pour se ramener au cas décrit ci-contre (avec un DL dont le terme constant n'est pas nul) et obtenir un DL du quotient (cf. exemple suivant).
• si $p > k$, alors on n'obtiendra pas de développement limité mais plutôt un développement asymptotique (cf. partie C de ce chapitre).

Pour obtenir le DL d'un quotient $\dfrac{f}{g}$ de fonctions dont on connait des DL et telles que $g(a) \neq 0$, on écrit $g(x) = g(a) + g(x) - g(a) = g(a)\left(1 + \dfrac{g(x)-g(a)}{g(a)}\right)$ et on utilise celui de $x \longmapsto \dfrac{1}{1 \pm u}$. Cela revient donc à faire une composition (cf. paragraphe précédent).

Exemples :

- *Calculer le DL à l'ordre 4 de* $\dfrac{1}{\cos}$.

- *Donner le DL de* $x \longmapsto \dfrac{x^3}{\mathrm{sh}(x) - x}$ *à l'ordre* 2.

- *Donner le DL de* $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{\cos(x)}}$ *à l'ordre* 4 *en* 0.
  On pourrait donner le DL de $\cos$ *puis appliquer le DL de* $\sqrt{1+u}$ *puis celui de* $\dfrac{1}{1+u}$ *mais on peut gagner une étape en mélangeant les deux dernières et en donnant le DL de* $\dfrac{1}{\sqrt{1+u}} = (1+u)^{-1/2}$ *(que l'on a vu dans le paragraphe III). Plus précisément :*

5) Primitivation

Soit I un intervalle non vide inclus dans D.

Lemme. *Supposons que* $a \in I$. *Soit* g *une fonction définie et dérivable sur* I *telle que* $g'(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$. *Alors* $g(x) \underset{a}{=} g(a) + \mathrm{o}\left((x-a)^{n+1}\right)$.

Démonstration.

□

L'idée est simple : si f est petite alors ses primitives le sont (penser à l'aire sous la courbe) donc on peut primitiver un o.

Théorème (primitivation d'un DL). *Supposons que $a \in I$ et que f admette une primitive F sur I. Supposons aussi que f admet un développement limite à l'ordre n en a :*

$$f(x) \underset{a}{=} c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + a_c n(x-a)^n + \text{o}\left((x-a)^n\right).$$

Alors F admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en a :

$$F(x) \underset{a}{=} F(a) + c_0(x-a) + \frac{c_1}{2}(x-a)^2 + \frac{c_2}{3}(x-a)^3 + \cdots + \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + \text{o}\left((x-a)^{n+1}\right).$$

Remarques :

- On peut donc toujours primitiver le DL d'une fonction continue (puisqu'une fonction continue admet des primitives).
- ⚠ Ne pas oublier de primitiver le petit o.
- ⚠ Ne pas oublier le $F(a)$!

Démonstration.

□

Exemples :

- *Retrouver le DL de $x \longmapsto \ln(1+x)$ en 0 à tout ordre.*

- *Démontrons le DL de* Arctan *en* 0 *à tout ordre, temporairement dans le paragraphe III.*

- *Déterminons les DL de* Arccos *et* Arcsin *en* 0 *à tout ordre.*

⚠ On ne peut pas dériver un développement limité en général.

Par exemple, reprenons la fonction

$$f : x \longmapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \textit{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \textit{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

du paragraphe II.1. On a vu que f *admet un DL à l'ordre* 2 *en* 0 *mais n'est pas dérivable deux fois en* 0 *: dès lors,* f' *n'est pas dérivable en* 0 *donc n'admet pas de DL à l'ordre* 1*, alors que* f *admet un DL à l'ordre* 2*.*

La méthode ci-contre n'est pas officiellement au programme. Il faudra donc la reproduire si besoin.

Néanmoins, si on arrive à justifier l'existence du DL de la dérivée, alors on peut dériver le DL en utilisant le théorème de primitivation et l'unicité du DL. Plus précisément :

- On dispose du DL d'une fonction f à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(x) \underset{a}{=} c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right).$$

- On justifie que f' admet un développement limité d'ordre $n-1$ (en général grâce à la formule de Taylor-Young si f' est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$) :

$$f'(x) \underset{a}{=} b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots + b_{n-1}(x-a)^{n-1} + \mathrm{o}\left((x-a)^{n-1}\right).$$

- On peut alors primitiver le DL de f' :

$$f(x) \underset{0}{=} f(0) + b_0(x-a) + \frac{b_1}{2}(x-a) + \frac{b_2}{3}(x-a)^3 + \cdots + \frac{b_{n-1}}{n}(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right).$$

- Par unicité du DL à l'ordre f de n, on a : $f(0) = c_0$ et, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $\dfrac{b_{k-1}}{k} = c_k$ donc $b_{k-1} = kc_k$ et donc

$$f'(x) \underset{a}{=} c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots + nc_n(x-a)^{n-1} + \mathrm{o}\left((x-a)^{n-1}\right).$$

  On a bien pu dériver le DL de f.