Chapitre 29

Applications linéaires

Nous allons à présent nous intéresser aux applications linéaires : les applications d'un espace vectoriel dans un autre qui préservent la somme et la multiplication externe.

Tous les résultats du chapitre restent valables sur un corps quelconque.

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne une fois de plus le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$. De plus E, F et G désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

I Notion d'application linéaire

1) Définitions et caractérisations

Si f est une application définie sur $\mathbb{R}^n$ (avec $n \geqslant 2$) et si $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ alors on note souvent $f(x_1, \ldots, x_n)$ au lieu de $f\big((x_1, \ldots, x_n)\big)$.

Définition (application linéaire). *Une application f de E dans F est dite linéaire si*

- *Pour tout $(x, y) \in E^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.*
- *Pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.*

Remarques :

- On fait donc la même chose qu'avec les morphismes de groupes, d'anneaux ou de corps : on dispose de lois et on s'intéresse aux applications qui préservent ces lois. La différence est qu'il y a des lois externes et que l'on parle d'applications linéaires au lieu de morphismes (même si on pourrait tout à fait parler de morphisme d'espaces vectoriels).
- La première condition garantit qu'une application linéaire est un morphismes de groupes de $(E, +)$ dans $(F, +)$. Toutes les propriétés des morphismes de groupes sont donc valables pour une application linéaire, en particulier une application linéaire de E dans F envoie le neutre de E sur le neutre de F :

Proposition. *Si f est une application linéaire de E dans F, alors $f(0_E) = 0_F$.*

On verra dans le prochain paragraphe que la réciproque est fausse !

Corollaire. *Si $f : E \longrightarrow F$ est telle que $f(0_E) \neq 0_F$, alors f n'est pas une application linéaire.*

Définition.

- *On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.*
- *Une forme linéaire de E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.*
- *Un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans E. On note $\mathscr{L}(E)$ au lieu de $\mathscr{L}(E, E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.*
- *Un isomorphisme de E dans F est une application linéaire bijective de E dans F.*
- *Un automorphisme de E est un endomorphisme de E bijectif. On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.*

Un automorphisme de E est donc un isomorphisme de E dans E, c'est-à-dire à la fois un isomorphisme et un endomorphisme.

Avant de passer aux exemples, donnons quelques caractérisations :

Proposition (caractérisations). *Soit $f : E \longrightarrow F$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est linéaire de E dans F.*
2. *Pour tous $(x, y) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.*
3. *Pour tous $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.*

Démonstration.

- Supposons que f soit linéaire de E dans F. Soient $(x, y) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Puisque f préserve la multiplication externe, on a $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ et $f(\mu y) = \mu f(y)$. Puisque f préserve la somme externe, on a alors $f(\lambda x + \mu y) = f(\lambda x) + f(\mu y)$ et donc $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$. D'où le point 2.
- Le point 3 découle immédiatement du point 2 en prenant $\mu = 1$.
- Supposons que le point 3 est vérifié.
  - ⋆ Soit $(x, y) \in E^2$. On a $f(x + y) = f(1 \cdot x + y) = 1 \cdot f(x) + f(y) = f(x) + f(y)$.
  - ⋆ Soit $(x, \lambda) \in E \times \mathbb{K}$. On a
  $$f(\lambda x) = f(\lambda x + 0_E) = \lambda f(x) + f(0_E) = \lambda f(x) + f(0_F) = \lambda f(x).$$

  Ainsi f est linéaire.

La deuxième caractérisation dit que l'image d'une combinaison linéaire de deux vecteurs est la combinaison linéaire des images. Cela se généralise :

Si f est linéaire, il suffit donc de connaître l'image de tous les vecteurs d'une famille ou d'une partie pour connaître l'image de tout vecteur de son sous-espace engendré. On en reparlera dans le paragraphe IV.1.

Proposition (Image d'une combinaison linéaire). *Soit $f : E \longrightarrow F$ linéaire. Alors, pour toute famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E et pour toute famille presque nulle de scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$,*
$$f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i).$$

Démonstration. On démontre par récurrence, à l'aide de la proposition précédente, le résultat suivant :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n,\ \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

Cela permet de conclure puisqu'une famille presque nulle est une famille n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls. □

2) Exemples

Prenons tout de suite $\mathbb{K}$ au lieu de $\mathbb{R}$ pour généraliser aussi aux fonctions linéaires complexes.

- Depuis le lycée, la notion de fonction linéaire sur $\mathbb{R}$ est connue. Il s'agit des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles de la forme $t \longmapsto at$, avec $a \in \mathbb{R}$. Le terme linéaire est-il bien le même que celui de la définition présentée dans ce chapitre. Et bien oui : considérons $a \in \mathbb{K}$ et notons $f : t \longmapsto at$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{K}^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,
  $$f(x+y) = a(x+y) = ax+ay = f(x)+f(y) \quad \text{et} \quad f(\lambda x) = a(\lambda x) = \lambda(ax) = \lambda f(x).$$
  Ainsi f est linéaire de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. Mais est-ce que ce sont les seuls ? Et bien oui :

  Morale de l'histoire : on connaît parfaitement toutes les applications linéaires de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. Remarquons que, pour tout $a \in \mathbb{K}^*$, $f : t \longmapsto at$ est bijective et donc est un automorphisme de $\mathbb{K}$. Seule la fonction nulle n'est pas bijective parmi les applications linéaires de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$.
- Continuons avec un exemple explicite (mais présentant une forme ultra classique) d'une application de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathbb{K}^2$.

  Notons $f : (x, y, z) \longmapsto (5x - 2y, x + 7z)$. Montrons que f est linéaire de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathbb{K}^2$.

Il faut arriver à dépasser la notation (x, y, z) dans la définition de f et à calculer l'image de n'importe quel vecteur. Pour cela, il suffit de comprendre qu'en fait, si a est un vecteur de $\mathbb{R}^3$, on a $f(a) = (5 \times$ [première coordonnée de a] $- 2 \times$ [deuxième coordonnée de a] , [première coordonnée de a] $+ 7 \times$ [troisième coordonnée de a]), d'où les images ci-contre.

Il faut impérativement savoir montrer qu'une telle application est linéaire dans un cas particulier.

En fait, pour tous $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, les applications linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ sont exactement celles de la forme

$$(x_1, \dots, x_p) \longmapsto \left(\sum_{j=1}^{p} a_{1,j} x_j, \cdots, \sum_{j=1}^{p} a_{n,j} x_j \right)$$

avec $(a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant n}$ une famille de scalaires. En effet, on vérifie aisément qu'une telle application est linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$. Réciproquement :

Du moins une application de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ peut être écrite sous cette forme mais cela peut ne pas sauter aux yeux au premier coup d'oeil.

Par exemple $f : (x, y) \longmapsto (x+1)^2 - x^2 - 3y + 1$ *n'a pas l'air très linéaire alors que, en développant, on trouve que* $f : (x, y) \longmapsto 2x - 3y$ *et il est facile alors de montrer qu'elle est linéaire de* $\mathbb{K}^2$ *dans* $\mathbb{K}$ *(c'est donc une forme linéaire).*

Lorsqu'il y a des produits de coefficients (ou des puissances donc) et des ajouts de constantes, cela met la puce à l'oreille que l'application ne va pas être linéaire ! Pour caricaturer, une application linéaire consiste à faire des combinaisons linéaires de vecteurs ou de leurs coordonnées ou d'autres opérations « linéaires » du type dériver ou intégrer.

Voyons un exemple d'une application qui n'est pas linéaire.

Notons $f : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \longmapsto \sum_{k=1}^{n} x_k^2$.

On a $f((1, \dots, 1)) = n$ *et* $f((2, \dots, 2)) = 4n$ *donc* $f(2(1, \dots, 1)) \neq 2f((1, \dots, 1))$.

On montrera dans le chapitre 33 que, si $p \neq n$, une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ n'est jamais un isomorphisme. On montrera dans le chapitre 34 que, lorsque $p = n$, cela peut se ramener à une problème d'inversibilité de matrice.

- Voyons maintenant d'autres exemples sur des espaces vectoriels divers et variés :
  - ⋆ *L'application*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array} \right.$$

est linéaire de E *dans* F*. On l'appelle l'application linéaire nulle de* E *dans* F*. On verra dans le paragraphe II.2 que c'est l'élément neutre de l'espace vectoriel* $\mathscr{L}(E, F)$.

⋆ *L'application*

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(2025) \end{array} \right.$$

est une forme linéaire (appelée évaluation en 2025). En effet :

⋆ *L'application*

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right.$$

est une forme linéaire sur $\mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *car on a vu dans le chapitre 19 que la dérivation est linéaire.*

⋆ *L'application*

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0([0\,;1]\,,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est une forme linéaire sur $\mathscr{C}^0([0\,;1]\,,\mathbb{R})$ *car on a vu dans les chapitres 10 et 24 que l'intégrale d'une fonction sur un segment est linéaire.*

Ce n'est pas un automorphisme (car ce n'est pas un endomorphisme) lorsque $n \neq p$).

⋆ *L'application*

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & M^T \end{array} \right.$$

est linéaire car la transposition est linéaire (cf. chapitre 23). C'est même un isomorphisme.

⋆ *L'application*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}_1[X] \\ (a,b) & \longmapsto & aX+b \end{array} \right.$$

est un isomorphisme. En effet :

⋆ *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *L'application*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & X^2P' - nXP \end{array} \right.$$

est un endomorphisme. En effet :

⋆ *L'application*

$$T : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est un endomorphisme de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. En effet :

On a le note parfois Id tout court s'il n'y a pas d'ambiguïté. Remarquons que c'est un automorphisme de réciproque lui-même.

Proposition/Définition (identité de E). *L'application*

$$\mathrm{Id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$$

est un endomorphisme appelé identité de E. On la note aussi id_E

Si $\alpha \neq 0$, alors

$$h_{1/\alpha} \circ h_\alpha = h_\alpha \circ h_{1/\alpha} = \mathrm{Id}_E$$

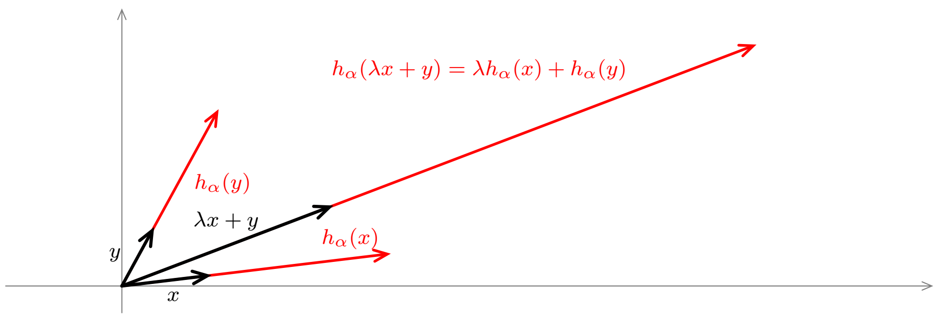
Ainsi h_α est un automorphisme de réciproque de $h_{1/\alpha}$.

Sur le dessin ci-contre $\lambda = 2$ et $\alpha = 3$. Dans $\mathbb{R}^2$ (et $\mathbb{R}^3$), une homothétie de rapport α multiplie toutes les longueurs par α.

Proposition/Définition (homothéties de E). *Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, l'application $\alpha\,\mathrm{Id}_E : x \longmapsto \alpha x$ est un endomorphisme appelé homothétie de E de rapport α.*

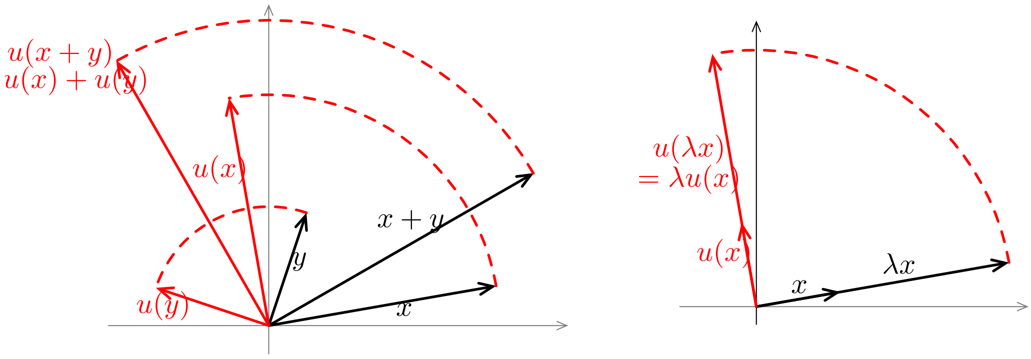
Démonstration.

□



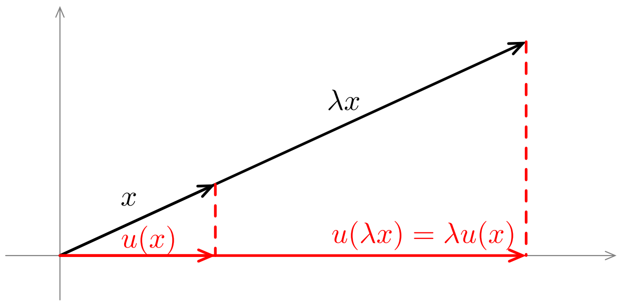
Il existe de nombreux exemples d'applications linéaires issues de la géométrie. Nous les rencontrerons dans ce chapitre et en deuxième année. En vrac :

- Les rotations :



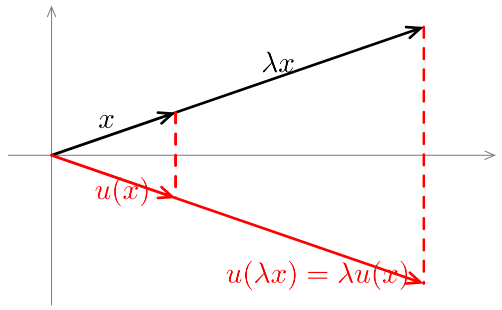
On verra qu'il existe des projections non orthogonales dans le paragraphe V.1.

- Les projections orthogonales :



Là aussi, il existe des symétries non orthogonales, cf. paragraphe V.2

- Les symétries orthogonales :



- Une translation de vecteur non nul n'est pas linéaire puisqu'elle n'envoie pas 0 sur 0.

II Opérations sur les applications linéaires

1) Restrictions d'une application linéaire à un sous-espace vectoriel

Considérer la restriction de f à E' revient simplement à « oublier » que f est définie sur E tout entier. Dans le second point, le fait que $f(E') \subset F'$, garantit que les images des vecteurs de E' sont dans F' et donc considérer la restriction de f à E' et F' revient à « supprimer » les vecteurs de F qui ne sont pas dans F'.

Proposition/Définition. *Soit E' un sous-espace vectoriel de E et F' un sous-espace vectoriel de F. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.*

- *On appelle restriction de f au sous-espace vectoriel E' l'application*

$$f|_{E'} : \left\{ \begin{array}{ccc} E' & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

Il s'agit d'une application linéaire de E' dans F

- *Supposons que $f(E') \subset F'$. On appelle restriction de f aux sous-espaces vectoriels E' et F' l'application*

$$f|_{E'}^{F'} : \left\{ \begin{array}{ccc} E' & \longrightarrow & F' \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

Il s'agit d'une application linéaire de E' dans F'.

Cela ne signifie pas que $f\big|_{E'}^{F'}$ est surjective puisqu'on ne sait pas si $f(E') = F'$.

Démonstration. Montrons le deuxième point (le premier revient à prendre $F' = F$).

Définition. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel stable par f (c'est-à-dire $f(F) \subset F$). La restriction $f\big|_F^F$ de f au sous-espace vectoriel F au départ et à l'arrivée est appelé endomorphisme induit par f sur F. On le note plus simplement $f\big|_F$.*

Ne pas oublier de vérifier la stabilité avant de parler d'endomorphisme induit !

Exemple : *Dans le paragraphe précédent, on a vu que $d : P \in \mathbb{K}[X] \longmapsto P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.*

2) $\mathscr{L}(E, F)$ est un espace vectoriel

La notion de produit d'applications linéaires n'a pas de sens en général puisqu'on ne ne peut pas multiplier des vecteurs a priori (mais les produits scalaires sont au programme de deuxième année).

Dans le chapitre 28, nous avons défini une addition et une multiplication externe sur $\mathcal{F}(E, F)$, l'ensemble des applications de E dans F, qui le munissent d'une structure d'espace vectoriel (car F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel). Rappelons que cela consiste à définir :

- pour tous f et g dans $\mathscr{F}(E, F)$,

$$f + g : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) + g(x) \end{array} \right. .$$

- pour tous $f \in \mathscr{F}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\lambda f : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda f(x) \end{array} \right. .$$

Proposition. *L'ensemble $\mathscr{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : si $(f, g) \in \mathscr{L}(E, F)^2$ et $\lambda \in K$, alors $f + g \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\lambda f \in \mathscr{L}(E, F)$.*

Démonstration.

□

Cette proposition est vraie en particulier lorsque $F = E$. Ainsi

Corollaire. *$\mathscr{L}(E)$ est un espace vectoriel.*

⚠ L'ensemble $\mathrm{GL}(E)$ des automorphismes de E n'est pas un espace vectoriel (car l'application nulle sur E n'est pas bijective).

3) Composition d'applications linéaires

En d'autres termes, quand elle est bien définie, une composée d'applications linéaires est une application linéaire.

Proposition (composition d'applications linéaires). *Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$, alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.*

Démonstration.

□

C'est aussi vrai si f ou g ne n'est pas linéaire.

Proposition. *Soient f et g dans $\mathscr{L}(E,F)$. Soit h dans $\mathscr{L}(F,G)$. Alors*

$$h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g.$$

Démonstration. Soit $x \in E$. On a

$$h \circ (f+g)(x) = h((f+g)(x)) = h(f(x)+g(x)).$$

Puisque h est linéaire,

$$h \circ (f+g)(x) = h(f(x)) + h(g(x)) = h \circ f(x) + h \circ g(x)$$

et donc $h \circ (f+g)(x) = (h \circ f + h \circ g)(x)$. Ainsi $h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g$. □

Remarques :

- Autrement dit la composition est distributive à gauche par rapport à à l'addition (quand tout est bien défini).
- La composition est aussi distributive à droite par rapport à l'addition (quand tout est bien défini) : pour tout h dans $\mathscr{L}(E,F)$ et pour tous f et g dans $\mathscr{L}(F,G)$,

$$(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h.$$

  Mais cette propriété est vraie même si les fonctions ne sont pas linéaires (cf. chapitre 15 et 17).

⚠ La distributivité à droite est en revanche fausse en général (cf. contre exemples du chapitre 17.

- On a même plus général :

Proposition (bilinéarité de la composition d'applications linéaires). *Soient $(f,g) \in \mathscr{L}(E,F)$. Soient $(h,\varphi) \in \mathscr{L}(F,G)$. Soient $(\lambda,\mu,\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^4$. On a :*

$$(\lambda h + \mu\varphi) \circ (\alpha f + \beta g) = \lambda\alpha(h \circ f) + \lambda\beta(h \circ g) + \mu\alpha(\varphi \circ f) + \mu\beta(\varphi \circ g).$$

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Remarques :

Avant de tout développer, on changer l'indice de la somme intérieure.

- Encore une fois cette propriété reste valable si f ou g n'est pas linéaire.
- Cela se généralise encore davantage : soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $f_1,\dots,f_p$ dans $\mathscr{L}(E,F)$, $g_1,\dots,g_n$ dans $\mathscr{L}(F,G)$. Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_n,\mu_1,\dots,\mu_p$ des scalaires. Alors :
$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i\right) \circ \left(\sum_{i=1}^p \mu_i f_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p \lambda_i \mu_k (g_i \circ f_k).$$
- Soit $f \in \mathscr{L}(F,G)$. Comme une application linéaire est nulle en 0, on a $f \circ 0_{\mathscr{L}(E,F)} = 0_{\mathscr{L}(E,G)}$. On a aussi $0_{\mathscr{L}(E,G)} = 0_{\mathscr{L}(F,G)} \circ f$ mais cette égalité est vraie même si f n'est pas linéaire.

Proposition. *Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(F,G)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :*

$$\forall x \in E, \qquad \lambda g(f(x)) = (\lambda g)(f(x)) = g(\lambda f(x)) = g(f(\lambda x)) = (g \circ f)(\lambda x).$$

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

4) Réciproque d'une bijection

Proposition (isomorphisme réciproque). *Si f est un isomorphisme de E dans F, alors sa réciproque f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.*

Puisque f^{-1} est bijective (c'est la bijection réciproque), il suffit de prouver que f^{-1} est linéaire.

Démonstration.

$\square$

Définition. *On dit que deux espaces vectoriels E et F sont isomorphes si il existe un isomorphisme de E sur F.*

... ou un isomorphisme de F dans E quitte à prendre la réciproque. On vérifie aisément que « être isomorphe » est une relation d'équivalence.

On peut donc reformuler la proposition du chapitre 15 dans le cadre des applications linéaires :

Théorème. *Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. S'il existe $g \in \mathscr{L}(F,E)$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ **et** $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, alors f est un isomorphisme de E dans F et $f^{-1} = g$.*

5) $\mathscr{L}(E)$ est un anneau

a) Structure d'anneau

Théorème. *$(\mathscr{L}(E),+,\circ)$ est un anneau.*

Démonstration. On sait que $(\mathscr{L}(E),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel donc $(\mathscr{L}(E),+)$ est un groupe abélien. De plus on sait que la composition est associative et on a vu dans le paragraphe II.3 qu'elle est distributive par rapport à la somme. Enfin, Id_E est un élément neutre pour la composition, ce qui permet de conclure. $\square$

Remarques :

- Ce n'est pas un anneau commutatif en général.

  Par exemple $f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\longmapsto(x,y-x)$ et $g:(x,y)\in\mathbb{R}^2\longmapsto(-x,y)$ sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ (je vous laisse le vérifier).

  — *Si $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a $f\circ g(x,y)=f(-x,y)=(-x,y+x)$.*

  — *Si $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a $g\circ f(x,y)=g(x,y-x)=(-x,y-x)$.*

  Les coordonnées ne sont pas les mêmes, mais cela ne suffit pas pour prouver que les applications sont distinctes : on ne peut pas dire que $f\circ g(x,y)\neq g\circ f(x,y)$ car, par exemple, $f\circ g(0,0)=g\circ f(0,0)$. Il faut un contre-exemple explicite ! Il suffit de voir que $f\circ g(1,1)\neq g\circ f(1,1)$ pour conclure que $f\circ g\neq g\circ f$.

  Dans le chapitre 33, on verra que E n'est pas commutatif dès qu'il est de dimension (finie) supérieure ou égale à 2.

- Ce n'est pas non plus un anneau intègre en général.

  Par exemple $D:P\longmapsto P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$.

- On note parfois la loi $\circ$ multiplicativement, c'est-à-dire que, lorsque u et v sont dans $\mathscr{L}(E)$, on pourra écrire vu au lieu de $v\circ u$. Il n'y a aucune ambiguïté puisque la notion de produit d'applications linéaires n'a pas de sens (plus généralement la notion de produit n'a pas de sens sur un espace vectoriel, ce qu'est $\mathscr{L}(E)$) : aucun risque de confusion.
- Comme dans tout anneau, on peut définir les notions de puissances d'endomorphismes et d'endomorphismes qui commutent et toutes les propriétés vues dans le chapitre 17 sont vérifiées. Comme dans le chapitre 23, cet anneau revenant très souvent, faisons un récapitulatif détaillé :

On utilise sans le dire l'associativité de la composition.

Définition. *Soit $u\in\mathscr{L}(E)$ et soit $p\in\mathbb{N}^*$. On note $u^p=\underbrace{u\circ u\circ\cdots\circ u}_{p\text{ fois}}$. Par convention, on pose $u^0=\mathrm{Id}_E$.*

La notion de puissance n'a aucun sens pour des applications linéaires qui ne sont pas des endomorphismes !

Pour tout $x\in E$, $u^2(x)=u(u(x))$ et non pas $u(x)\times u(x)$ (qui n'est pas défini).

Remarques :

- Pour tous $u\in\mathscr{L}(E)$ et $p\in\mathbb{N}$, $u^p\in\mathscr{L}(E)$.
- Ne pas confondre $u^p(x)$ avec $(u(x))^p=u(x)\times u(x)\times\cdots\times u(x)$ ce qui n'a aucun sens puisqu'il n'y a pas de produit sur E. La notation u^p n'est donc pas gênante.
- Les propriétés de $\mathscr{L}(E)$ ressemblent donc beaucoup à celles de $\mathbb{K}$ sauf la commutativité :

Définition. *On dit que deux endomorphismes u et v de E commutent si $u\circ v=v\circ u$.*

Exemple : *Pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$, l'homothétie $\lambda\,\mathrm{Id}_E$ commute avec tout endomorphisme de E.*

Toute puissance de u commutent avec toute puissance de u.

Proposition. *Soient $u\in\mathscr{L}(E)$ et $(p,k)\in\mathbb{N}^2$.*

- $u^k\circ u^\ell=u^k\circ u^\ell=u^{k+\ell}$.
- $\left(u^k\right)^\ell=\left(u^\ell\right)^k=u^{k\times\ell}$.

Proposition. *Soient u et v deux endomorphismes de E qui **commutent**. Alors, pour tout $(k,\ell)\in\mathbb{N}^2$, $v^k\circ u^\ell=u^\ell\circ v^k$.*

Proposition. *Soient u et v deux endomorphismes de E qui **commutent**. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(v \circ u)^k = v^k \circ u^k$.*

L'hypothèse que u et v commutent est indispensable.

Théorème (formule du binôme de Newton). *Soient u et v deux endomorphismes de E qui **commutent**. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k}.$$

Théorème. *Soient u et v deux endomorphismes de E qui **commutent**. Alors :*

$$u^n - v^n = (u-v) \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} u^k \circ v^{n-1-k} \right)$$

Exemple : *Considérons l'application $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (x+y+z, y+z, z)$. Montrons que c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et calculer ses puissances.*

Corollaire. *Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathscr{L}(E)$,*

$$\mathrm{Id}_E - u^n = (\mathrm{Id} - u) \circ \sum_{k=0}^{n-1} u^k.$$

Remarque : Comme pour les matrices (et plus généralement les éléments d'un anneau quelconque), on définit la notion d'endomorphisme nilpotent. Un endomorphisme u est nilpotent lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^n = 0$. On renvoie alors au paragraphe III.5 du chapitre 23 pour différentes propriétés des matrices nilpotentes (il suffit de remplacer les matrices par des endomorphismes et le produit pas le composition dans les preuves).

b) Le groupe $\mathrm{GL}(E)$

Un groupe pour la composition bien sûr (surtout pas pour l'addition puisque $0_{\mathscr{L}(E)} \notin \mathrm{GL}(E)$).

Proposition/Définition (groupe linéaire). *L'ensemble des automorphismes de E est un groupe noté $\mathrm{GL}(E)$ et est appelé groupe linéaire.*

Démonstration. $\mathrm{GL}(E)$ est l'ensemble des éléments inversibles (pour la composition) de l'anneau $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ donc c'est un groupe. □

Remarques :

- En particulier, la composition de deux automorphismes de E et la réciproque d'un automorphisme de E sont des automorphismes de E.
- L'écriture $\mathrm{GL}(E)$ et sa ressemblance avec $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ n'est pas un hasard : il y a un lien étroit entre ces ensembles que l'on verra dans le chapitre 34.

Cette notation n'a de sens que sur $\mathrm{GL}(E)$ puisque u^{-1} n'existe que si u est bijectif.

Définition. *Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$ et soit $p \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$. On pose*

$$u^p = \underbrace{u^{-1} \circ u^{-1} \circ \cdots \circ u^{-1}}_{-p \text{ fois}}$$

Remarque : Là aussi, cette notation vérifie les mêmes conditions que la notation puissance sur $\mathbb{R}$, hormis la commutativité.

c) Utilisation d'un polynômes annulateur

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On appelle polynôme en l'endomorphisme f tout endomorphisme qui s'écrit comme combinaison linéaire de puissances de f. Supposons que l'on dispose d'un polynôme

$$P = a_p X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors

Ne pas oublier de changer le a_0 en $a_0 f^0 = a_0 \mathrm{I}_n$!

$$P(f) = a_n f^p + a_{p-1} f^{p-1} + \cdots + a_1 u + a_0 \,\mathrm{Id}_E$$

est un polynôme en f. On dit qu'il est annulateur de f si $P(f)$ est l'endomorphisme nul. On obtient alors

$$a_p f^p + a_{p-1} f^{p-1} + \cdots + a_1 u = -a_0 \,\mathrm{Id}_E$$

donc

$$f \circ (a_p f^{p-1} + a_{p-1} f^{p-2} + \cdots + a_1 \,\mathrm{Id}_E) = -a_0 \,\mathrm{Id}_E$$

et donc, lorsque le coefficient constant a_0 est non nul,

$$f \circ \left(-\frac{a_p}{a_0} f^{p-1} - \frac{a_{p-1}}{a_0} f^{p-2} + \cdots - \frac{a_1}{a_0} \,\mathrm{Id}_E \right) = \mathrm{Id}_E \,.$$

On a aussi

$$\left(-\frac{a_p}{a_0} f^{p-1} - \frac{a_{p-1}}{a_0} f^{p-2} + \cdots - \frac{a_1}{a_0} \,\mathrm{Id}_E \right) \circ f = \mathrm{Id}_E \,.$$

On ne peut rien conclure avec cette méthode lorsque $a_0 = 0$.

On en déduit que f est un automorphisme de E et que

$$f^{-1} = -\frac{a_p}{a_0} f^{p-1} - \frac{a_{p-1}}{a_0} f^{p-2} + \cdots - \frac{a_1}{a_0} \,\mathrm{Id}_E \,.$$

On peut bien sûr raisonner en terme de somme :

$$f^{-1} = -\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{p} a_k f^{k-1}.$$

Exemple : *Considérons $f : P \in \mathbb{K}[X] \longmapsto P(1)X + P$. Il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. Cherchons un polynôme annulateur de f de degré 2 et montrons que f est un automorphisme.*

On peut aussi exprimer « facilement » les puissances successives d'un endomorphismes à l'aide d'un polynôme annulateur. En effet, en reprenant les notations ci-dessus et en supposant que $a_p \neq 0$,

$$f^{p+1} = f^p \circ f = \left(-\frac{1}{a_p}\sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k\right) \circ f = -\frac{1}{a_p}\sum_{k=0}^{p-1} a_k f^{k+1} = -\frac{a_{p-1}}{a_p} f^p - \frac{1}{a_p}\sum_{k=0}^{p-2} a_k f^{k+1}$$

Cela ne garantit pas non plus de trouver facilement les coefficients de la combinaison linéaire mais il y a un lien avec les suites récurrentes linéaires, cf. exemple ci-dessous.

Reste à remplacer f^p par l'expression donnée par le polynôme annulateur une fois de plus et on obtient une expression de f^{p+1} en fonction de $\mathrm{Id}_E, f, \dots, f^{p-1}$. On peut reproduire ce procédé et montrer par récurrence que, pour tout $k \geqslant p$, f^k est une combinaison linéaire de $\mathrm{Id}_E, f, \dots, f^{p-1}$.

Exemple : *Reprenons l'exemple ci-dessus où $f^2 = 3f - 2\,\mathrm{Id}$ (où Id désigne ici $\mathrm{Id}_{\mathbb{K}[X]}$). On a alors*

$$f^3 = f^2 \circ f = (3f - 2\,\mathrm{Id}) \circ f = 3f^2 - 2f = 3(3f - 2\,\mathrm{Id}) - 2f = 7f - 6\,\mathrm{Id}$$

$$f^4 = f^3 \circ f = (7f - 6\,\mathrm{Id}) \circ f = 7f^2 - 6f = 7(3f - 2\,\mathrm{Id}) - 6f = 15f - 14\,\mathrm{Id}$$

Par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{K}^2$ tels que $f^n = a_n f + b_n\,\mathrm{Id}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 3a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -2a_n$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_{n+2} = -2a_{n+1} = -2(3a_n + b_n) = 3(-2a_n) - 2b_n = 3b_{n+1} - 2b_n.$$

On retombe sur une suite récurrente linéaire d'ordre 2 et, comme $b_0 = 1$ et $b_0 = 0$, on trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 2 - 2^n$ puis $a_n = 2^n - 1$. Dès lors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f^n = (2^n - 1)f + (2 - 2^n)\,\mathrm{Id}$$

III Image et noyau d'une application linéaire

1) Image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire

Proposition. *Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.*

En d'autres termes, l'image d'un espace vectoriel par une application linéaire est encore un espace vectoriel.

DÉMONSTRATION.

□

Proposition. *Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Soit A une partie non vide de E. Alors*

$$f\big(\mathrm{Vect}(A)\big) = \mathrm{Vect}\left(f(A)\right).$$

En particulier, si $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E, alors

$$f\big(\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}\big) = \mathrm{Vect}\left(f(x_i)\right)_{i\in I}$$

Nous en reparlerons dans la paragraphe IV.1.a.

DÉMONSTRATION.

Preuve alternative pour cette inclusion : on a $A \subset \mathrm{Vect}(A)$ donc $f(A) \subset f(\mathrm{Vect}(A))$. Ainsi $f(\mathrm{Vect}(A))$ est un sous-espace vectoriel qui contient $f(A)$ et donc $\mathrm{Vect}(f(A)) \subset f(\mathrm{Vect}(A))$.

□

2) Image d'une application linéaire

Définition (image d'une application linéaire). *Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Le sous-espace vectoriel $f(E)$ de F est appelé image de f et noté $\mathrm{Im}(f)$.*

Proposition. *Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Supposons que E admette une famille génératrice $(x_i)_{i\in I}$. Alors*
$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(x_i))_{i\in I}$$
Autrement dit $(f(x_i))_{i\in I}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.

Démonstration.

□

Exemple : *Soit $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (2x-y+3z, x-2y, -x-2y-4z)$. Il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (je vous laisse le vérifier). Déterminons l'image de F.*

- ***Méthode 1 : On résout un système.***

- ***Méthode 2 : On utilise une famille génératrice.***

Exemple : *Considérons $f : P \in \mathbb{K}[X] \longmapsto XP$. Il 'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. En effet :*

Déterminons $\mathrm{Im}(f)$.

- ***Méthode 1 :***

- ***Méthode 2 :***

Remarque : Terminons ce paragraphe par une inclusion ultra classique (que l'on pourrait presque qualifier d'immédiate) et très utile. Ne figurant par explicitement au programme, il faut savoir la redémontrer et il faut y penser :

En particulier, si $f \in \mathscr{L}(E)$,

$$\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f).$$

$$\boxed{\text{Si } f \in \mathscr{L}(E,F) \text{ et } g \in \mathscr{L}(F,G), \text{ alors } \mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g).}$$

En effet :

L'inclusion contraire est fausse en général (par exemple si g est surjective mais $f \circ g$ non).

3) Image réciproque d'un sous-espace vectoriel d'une application linéaire

Proposition. *Soit $\mathscr{L}(E,F)$. Si F' est un sous-espace vectoriel de F, alors $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration.

□

4) Noyau d'une application linéaire

Dans la proposition précédente, si on prend $F' = \{0_F\}$, on obtient :

$\{0_F\}$ est bien un sous-espace vectoriel de F.

Définition (noyau d'une application linéaire). *Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Le sous-espace vectoriel $f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \,|\, f(x) = 0_F\}$ est appelé noyau de f et noté $\mathrm{Ker}(f)$.*

Exemple : *Reprenons l'endomorphisme du paragraphe précédent*

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (2x - y + 3z, x - 2y, -x - 2y - 4z)$$

Déterminons son noyau. On se donne $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est un vecteur de l'espace de départ de f.

On est face au même système linéaire que dans le paragraphe précédent mais dans le cas particulier $x' = y' = z' = 0$. On réalise les mêmes opérations sur les lignes.

Remarque : Soit F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est défini sous forme paramétrée si on écrit F comme l'image de E par une application linéaire.

Par ce même le sous-espace vectoriel $F = \left\{(-2y + 3z + t, y, z, t) \,\middle|\, (y, z, t) \in \mathbb{R}^3\right\}$ est égal à $\mathrm{Im}(f)$ avec $f : (y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (-2y + 3z + t, y, z, t)$.

On dit que F est défini par une équation si on écrit F comme le noyau d'une application linéaire sur E.

Dans ce même exemple, on écrit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x = -2y + 3z + t\} = \mathrm{Ker}(g)$ avec $g : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \longmapsto x + 2y - 3z - t$.

On dit que F est défini par une famille génératrice (cf. chapitre 28).

Dans notre exemple, on a

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in F \quad &\Longleftrightarrow \quad (x, y, z, t) = (-2y + 3z + t, y, z, t) \\ &\Longleftrightarrow \quad (x, y, z, t) = y(-2, 1, 0, 0) + z(3, 0, 1, 0) + t(1, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

donc $F = \mathrm{Vect}\left((-2, 1, 0, 0), (3, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\right)$.

Exemples :

- *Reprenons l'endomorphisme du paragraphe précédent $f : P \in \mathbb{K}[X] \longmapsto XP$. Déterminons son noyau.*

- *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\varphi : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto A^T - A$.*

  Montrons que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Puisque $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$, il faut et il suffit que $\mathrm{Ker}(f) \subset \{0_E\}$ pour que f soit injective.

Ainsi, vérifier que 0_F admet 0_E pour unique antécédent, permet de montrer que n'importe quel vecteur de F admet un unique antécédent. ⚠ Ce n'est vrai que lorsque f est linéaire. Sinon on revient à la méthode classique.

Proposition. *Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On a f injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.*

Démonstration.

- Supposons que f est injective. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$, alors $f(x) = 0_F = f(0_E)$ (car f est linéaire) et donc $x = 0_E$ (par injectivité de f). Par conséquent $\mathrm{Ker}(f) \subset \{0_E\}$ et donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
- Réciproquement, supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$. On se donne x et y dans E tels que $f(x) = f(y)$. On a alors $f(x) - f(y) = 0$ et donc, par linéarité de f, $f(x-y) = 0_F$. Par conséquent $x - y \in \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$. Ainsi $x - y = 0_E$ et donc $x = y$. D'où l'injectivité de f. □

Remarque : On a aussi f surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$ mais c'est une propriété générale (bien qu'on ne parle pas de $\mathrm{Im}(f)$ pour une application qui n'est pas un morphisme de groupes) qui n'est pas propre aux applications linéaires.

Exemples :

- *Reprenons encore une fois l'exemple de l'endomorphisme*

$$f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (2x - y + 3z, x - 2y, -x - 2y - 4z).$$

  - ⋆ *On a $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\big((-2,1,-1)\big) \neq \{(0,0,0)\}$ donc f n'est pas injective.*
  - ⋆ *On a $\mathrm{Im}(f) = \{(x',y',z') \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 = 4x' - 5y' + 3z'\} \neq \mathbb{R}^3$ car $(1,0,0) \notin \mathrm{Im}(f)$ (en effet ce vecteur ne vérifie pas $0 = 4 \times 1 - 5 \times 0 + 3 \times 0$). Ainsi f n'est pas surjective.*
- *Considérons l'application $g : P \in \mathbb{R}_3[X] \longmapsto \big(P(1), P'(1)\big)$.*
  - ⋆ *g est une application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^2$. En effet :*
  - ⋆ *Est-elle surjective ? Injective ? Bijective ?*

- *Notons $u : f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longmapsto f \times \sin$. C'est un endomorphisme de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. En effet :*
- *Est-elle surjective ? Injective ? Bijective ?*
- *Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(E,F)$. Montrons que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.*

Remarque : Terminons ce paragraphe par une inclusion ultra classique (que l'on pourrait presque qualifier d'immédiate) et très utile. Ne figurant par explicitement au programme, il faut savoir la redémontrer et il faut y penser :

En particulier, si $f \in \mathscr{L}(E)$,
$$\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2).$$

$$\boxed{\text{Si } f \in \mathscr{L}(E,F) \text{ et } g \in \mathscr{L}(E,F), \text{ alors } \mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f).}$$

L'inclusion contraire est fausse en général (par exemple si f est injective mais $g \circ f$ non).

En effet :

IV Détermination d'une application linéaire

1) Détermination par l'image d'une base

a) Image d'une famille génératrice, liée, libre

Définition. *Soit $\mathscr{F} = (x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On note $f(\mathscr{F})$ la famille $(f(x_i))_{i\in I}$.*

Proposition. *Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E.*
1. *Si $\mathscr{F}$ engendre E, alors $f(\mathscr{F})$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.*
2. *Si $\mathscr{F}$ est liée, alors $f(\mathscr{F})$ est une famille liée de F.*
3. *Si $\mathscr{F}$ est libre **et** f injective, alors $f(\mathscr{F})$ est une famille libre de F.*

Si f est de plus surjective, alors $f(\mathscr{F})$ engendre F.

DÉMONSTRATION. Le point 1 a déjà été montré dans le paragraphe III.1.

□

b) Théorème de caractérisation par l'image d'une base

Ce résultat est alaogue à celui de la rigidité des polynômes : savoir que deux polynômes coïncident en une infinité de valeurs (même mieux : en un nombre de valeurs strictement supérieur à leurs degrés) suffit pour montrer qu'ils sont égaux.

Lorsque f et g sont deux applications linéaires de E dans F, elles sont égales si et seulement si

$$\forall x \in E, \qquad f(x) = g(x).$$

Nous allons voir que, lorsque E admet une base, cette condition peut-être considérablement affaiblie : il suffit que f et g coïncident sur une base de E. On dit que les applications linéaires sont rigides.

Théorème. *Supposons que E admette une base $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$. Soit $\mathscr{F} = (v_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'éléments de F. Alors il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que, pour tout $i \in I$, $f(e_i) = v_i$. Autrement dit une application linéaire de E dans F est entièrement déterminée par l'image d'une base.*

Bien sûr $(\lambda_i)_{i\in I}$ désigne une famille presque nulle de scalaires (c'est sous-entendu).

Remarque : On va même montrer que l'application f (uniquement déterminée donc) est :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i e_i & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i v_i \end{array} \right. .$$

DÉMONSTRATION.

$\square$

Corollaire. *Si f et g sont deux applications linéaires de E dans F qui coïncident sur une base de E, alors $f = g$.*

Le théorème précédent s'accompagne d'une caractérisation de son injectivité/surjectivité/bijectivité par la nature de la famille des images :

Théorème. *Soit $g \in \mathscr{L}(E, F)$. Soit $\mathscr{B}$ une* ***base*** *de E. Alors :*

1. *f est surjective si et seulement si $f(\mathscr{B})$ est génératrice de F.*
2. *f est injective si et seulement si $f(\mathscr{B})$ est libre.*
3. *f est bijective si et seulement si $f(\mathscr{B})$ est une base de E.*

Ainsi une application linéaire est un isomorphisme si et seulement si elle envoie une base sur une base (sous réserve d'existence d'une base).

DÉMONSTRATION.

□

Exemples : *Notons* (e_1, e_2, e_3) *la base canonique de* $\mathbb{K}^3$.

- *Il existe une unique application linéaire* f *de* $\mathbb{K}^3$ *dans* $\mathbb{K}^{2025}$ *telle que* $f(e_1) = 0$, $f(e_2) = 0$ *et* $f(e_3) = 0$. *Il s'agit de l'application nulle puisqu'elles coïncident sur une base de* $\mathbb{K}^3$.
- *Donnons l'unique application linéaire* g *de* $\mathbb{K}^3$ *dans* $\mathbb{K}^2$ *telle que*

$$g(e_1) = (1, 1), \qquad g(e_2) = (2, -1), \qquad g(e_3) = (1, 3).$$

et déterminons si elle est surjective/injective/bijective.

- *Donnons l'unique application linéaire* h *de* $\mathbb{K}^3$ *dans* $\mathbb{K}_2[X]$ *telle que*

$$h(e_1) = X, \qquad h(e_2) = (X+1)^2, \qquad h(e_3) = -2$$

et déterminons si elle est surjective/injective/bijective.

- *Donnons l'unique application linéaire* φ *de* $\mathbb{K}^3$ *dans* $\mathbb{K}_3[X]$ *telle que*

$$\varphi(e_1) = X^2 - 1, \qquad \varphi(e_2) = X - X^3, \qquad \varphi(e_3) = 2 + X$$

et déterminons si elle est surjective/injective/bijective.

Exemple : *Montrons (autrement que dans le chapitre 21) que, pour tout* $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $(PQ)' = P'Q + PQ'$. *Pour cela notons* $D : P \longmapsto P'$.

2) Détermination par restriction à ses sous-espaces supplémentaire

L'idée est analogue à celle du paragraphe précédent : par linéarité, il suffit de connaître une application linéaire sur « deux morceaux qui engendrent tout l'espace ». Si en plus les deux espaces sont supplémentaires, alors il y a existence. Si en plus les deux espaces sont en somme directe, alors il y a unicité.

Proposition. *Soient* E_1 *et* E_2 *deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de* E. *Soient* $f_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$ *et* $f_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$. *Alors il existe une unique application linéaire* $f \in \mathscr{L}(E, F)$ *telle que* $f\big|_{E_1} = f_1$ *et* $f\big|_{E_2} = f_2$. *En d'autres termes, une application linéaire de* E *dans* F *est entièrement déterminée par sa restriction à deux sous-espaces supplémentaires.*

Démonstration.

□

V Projections, projecteurs, symétries, involutions

1) Projections et projecteurs

a) Projections vectorielles

La projection de p sur F parallèlement à G est la fonction qui à x dans E associe le morceau $u_x \in F$ de l'écriture de $x = u_x + v_x$.

G est appelé la direction de la projection s.

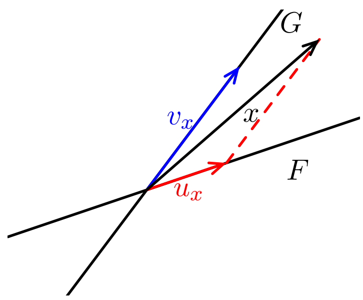
Définition (projection). *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E qui sont supplémentaires. Pour tout $x \in E$, il existe alors un unique $(u_x, v_x) \in F \times G$ tel que $x = u_x + v_x$. L'application*

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & u_x \end{array} \right.$$

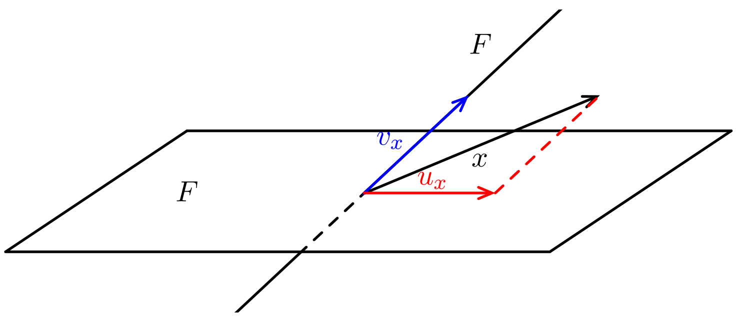
est appelée projection (vectorielle) sur F parallèlement à G.

Exemples : *Ci-dessous, on a à chaque fois deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G, et on a $p(x) = u_x$.*

- *Dans $\mathbb{R}^2$:*



- *Dans $\mathbb{R}^3$:*



Remarque : Avec les notations de la définition, l'application

$$q : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & v_x \end{array} \right.$$

est la projection (vectorielle) sur G parallèlement à F. On dit que p et q sont des projections associées. Remarquons que

$$p + q = \mathrm{Id}_E\,.$$

On obtient les propriétés de q à partir de celles de q en échangeant F et G.

Exemples :

- *On a vu dans le chapitre 28 que, lorsque $u = (a_1, b_1)$ et $v = (a_2, b_2)$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$, alors $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}(u) \oplus \mathrm{Vect}(v)$. De plus, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,*

$$(x,y) = \underbrace{\frac{xb_2 - ya_2}{a_1b_2 - a_2b_1}(a_1,b_1)}_{\in \mathrm{Vect}(u)} + \underbrace{\frac{ya_1 - xb_1}{a_1b_2 - a_2b_1}(a_2,b_2)}_{\in \mathrm{Vect}(v)}.$$

  Ainsi :

- *On a vu dans le chapitre 28 que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$ avec $F_1 = \mathrm{Vect}((-1,0,1))$ et $F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - y - z = 0\}$. De plus, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,*

$$(x,y,z) = \underbrace{\left(\frac{x-y-z}{2}, 0, \frac{-x+y+z}{2}\right)}_{\in F_1} + \underbrace{\left(\frac{x+y+z}{2}, y, \frac{x-y+z}{2}\right)}_{\in F_2}.$$

  Ainsi :

- *On a vu dans le chapitre 28 que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. De plus, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,*

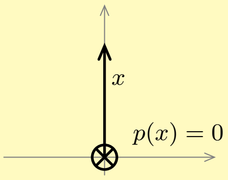
$$M = \underbrace{\frac{M + M^T}{2}}_{\in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})} + \underbrace{\frac{M - M^T}{2}}_{\in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})}.$$

  Ainsi :

- *On a vu dans le chapitre 28 que $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \oplus \mathcal{I}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ où $\mathcal{P}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{I}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f = p + i$ avec $p : x \longmapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2} \in \mathscr{P}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $i : x \longmapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2} \in \mathscr{I}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Ainsi :*

Ainsi ch n'est rien d'autre que le projeté de $\exp$ (c'est-à-dire l'image de $\exp$ par la projection) sur $\mathcal{P}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathcal{I}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Cela se voit bien sur un dessin : dans $\mathbb{R}^2$, si F est l'axe des abscisses et G l'axe des ordonnées, et si p est la projection sur F parallèlement à G :



De plus, si $x \in F$ i.e. si x appartient à l'axe des abscisses, alors x sera laissé invariant par F (nous laissons le lecteur faire un dessin pour s'en convaincre).

Rappelons que p^2 désigne $p \circ p$.

Lemme. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Soit p la projection sur F parallèlement à G. Pour tout $x \in E$, on a*

- *$x \in F$ si et seulement si $p(x) = x$.*
- *$x \in G$ si et seulement si $p(x) = 0$.*

Démonstration.

□

Proposition. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Soit p la projection sur F parallèlement à G. Alors :*

1. $p \in \mathscr{L}(E)$,
2. $p^2 = p$,
3. $\mathrm{Ker}(p) = G = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - p)$
4. $\mathrm{Im}(p) = F = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - p)$.

Démonstration.

b) Projecteurs

On vient de voir qu'une projection p de E est un endomorphisme vérifiant $p^2 = p$. On dit qu'une projection est un projecteur. En effet, on définit plus généralement :

Définition (projecteurs). *On dit qu'un endomorphisme f de E vérifiant $f^2 = f$ est un projecteur.*

Lorsqu'on demande de montrer qu'une application f est un projecteur, il y a deux choses à montrer :
- f est un endomorphisme, c'est-à-dire va de E dans E et surtout est linéaire (cette partie est trop souvent oubliée par les candidats),
- $f \circ f = f$ (ou encore $f^2 = f$).

Exemple : *Notons $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (2x+3y-z, -x-2y+z, -x-3y+2z)$. Je vous laisse montrer que c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Il s'agit d'un projecteur de E. En effet, si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,*

$$\begin{aligned} f \circ f(x,y,z) &= f\,(2x+3y-z, -x-2y+z, -x-3y+2z) \\ &= \Big(2(2x+3y-z) + 3(-x-2y+z) - (-x-3y+2z), \\ &\quad -(2x+3y-z) - 2(-x-2y+z) + (-x-3y+2z), \\ &\quad -(2x+3y-z) - 3(-x-2y+z) + 2(-x-3y+2z)\Big) \\ &= (2x+3y-z, -x-2y+z, -x-3y+2z) = f(x,y,z). \end{aligned}$$

Un projecteur est une projection et la réciproque est vraie :

Théorème. *Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur. Alors $E = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Ker}(p)$ et p est la projection sur $\operatorname{Im}(p)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(p)$.*

Démonstration.

□

Pourquoi pense-t-on à cette décomposition ? Non seulement on veut montrer que $E = \operatorname{Im}(p) + \operatorname{Ker}(p)$ mais aussi que pour tout x, dans la décomposition en tant que somme d'un vecteur de $\operatorname{Im}(p)$ et de $\operatorname{Ker}(p)$, le vecteur de $\operatorname{Im}(p)$ est $p(x)$. Mais que le lecteur se rassure : s'il n'y pense pas, une analyse-synthèse (pour montrer que tout élément $x \in E$ s'écrit de façon unique sous la forme $x = u_x + v_x$ avec $u_x \in \operatorname{Im}(p)$ et $v_x \in \operatorname{Ker}(p)$) fait tout aussi bien l'affaire et donne le même résultat !

Remarques :
- Dorénavant on confondra les notions de projecteurs et de projections car c'est la même chose (seul le point de vue change). Plus précisément, on emploiera ces deux termes indifféremment.
- Si p est un projecteur, alors p est la projection sur $\operatorname{Im}(p)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(p)$ et donc $\mathrm{Id}_E - p$ est la projection sur $\operatorname{Ker}(p)$ parallèlement à $\operatorname{Im}(p)$. On retrouve donc le fait que
$$\operatorname{Im}(\mathrm{Id}_E - p) = \operatorname{Ker}(p) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_E - p) = \operatorname{Im}(p).$$

Exemple : *Déterminons l'image et le noyau du projecteur*

$$f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (2x+3y-z, -x-2y+z, -x-3y+2z)\,.$$

2) Symétries et involutions

a) Symétries vectorielles

La projection de p sur F parallèlement à G est la fonction qui à x dans E associe le morceau $u_x \in F$ de l'écriture de $x = u_x + v_x$.

G est parfois appelé la direction de s.

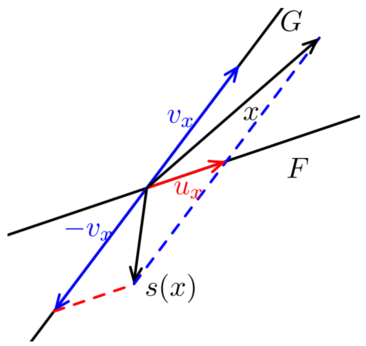
Définition (symétrie). *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E qui sont supplémentaires. Pour tout $x \in E$, il existe alors un unique $(u_x, v_x) \in F \times G$ tel que $x = u_x + v_x$. L'application*

$$s : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & u_x - v_x \end{array} \right.$$

est appelée symétrie (vectorielle) par rapport à F parallèlement à G.

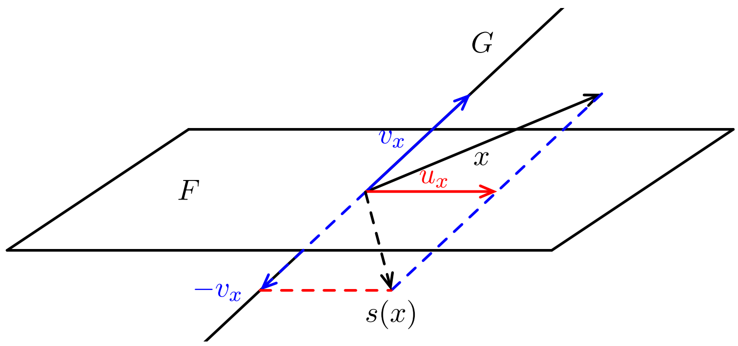
Exemples : *Ci-dessous, on a à chaque fois deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G, et on a $s(x) = u_x - v_x$.*

- *Dans $\mathbb{R}^2$:*



On peut remarquer (ce qui est contraire à l'intuition mais c'est parce qu'on a l'habitude des symétries « orthogonales ») que x et $s(x)$ n'ont pas « la même longueur » : mais qu'est-ce que la longueur dans un espace vectoriel ? Qu'est-ce que la longueur d'une suite, d'une fonction, d'une matrice donnée ? Réponse en deuxième année !

- *Dans $\mathbb{R}^3$:*



Exemples :

- *On a vu dans le chapitre 28 que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$ avec $F_1 = \mathrm{Vect}((-1,0,1))$ et $F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - y - z = 0\}$. On reprend les notations du paragraphe précédent (où l'on a déterminé les projections) et on trouve que la symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2 est*

$$(x,y,z) \longmapsto \left(\frac{x-y-z}{2}, 0, \frac{-x+y+z}{2} \right) - \left(\frac{x+y+z}{2}, y, \frac{x-y+z}{2} \right),$$

c'est-à-dire $(x,y,z) \longmapsto (-y-z, -y, -x+y)$.

- *On a vu dans le chapitre 28 que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. On reprend les notations du paragraphe précédent (où l'on a déterminé les projections) et on trouve que la symétrie par rapport à $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est*

$$M \longmapsto \frac{M+M^T}{2} - \frac{M-M^T}{2} = M^T.$$

  Autrement dit il s'agit de la transposition sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$..

Proposition. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Notons s la symétrie par rapport à F parallèlement à G et p le projecteur sur F parallèlement à G. Alors $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.*

Démonstration.

□

Rappelons que s^2 désigne $s \circ s$.

Proposition. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Notons s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Alors $s \in \mathscr{L}(E)$ et $s^2 = \mathrm{Id}_E$.*

Démonstration.

□

Corollaire. *Une symétrie est un automorphisme qui est sa propre bijection réciproque.*

Démonstration. Si s est une symétrie, on vient de voir que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. On en déduit que s est bijective et $s^{-1} = s$. Comme c'est un endomorphisme, il s'agit d'un automorphisme. □

Proposition. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Notons s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Alors*

$$F = \{x \in E \,|\, s(x) = x\} \qquad \text{et} \qquad G = \{x \in E \,|\, s(x) = -x\}.$$

Démonstration. Notons $A = \{x \in E \,|\, s(x) = x\}$ et $B = \{x \in E \,|\, s(x) = -x\}$.

- Soit $x \in E$. On a

$$x \in A \iff s(x) = x \iff 2p(x) - x = x \iff p(x) = x.$$

  On en déduit que du lemme du paragraphe V.1.a que $x \in A$ si et seulement si $x \in F$. Dès lors $A = F$.

- Soit $x \in E$. On a

$$x \in B \iff s(x) = -x \iff 2p(x) - x = -x \iff p(x) = 0.$$

  On en déduit que du lemme du paragraphe V.1.a que $x \in B$ si et seulement si $x \in G$. Dès lors $B = G$. □

b) Involutions linéaires

Définition. *Une application f de E dans E est appelée involution lorsque $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.*

Une involution est une bijection de E dans E et sa réciproque est elle-même.

On a vu qu'une symétrie est une involution linéaire. La réciproque est vraie :

Proposition. *Soit f un endomorphisme de E qui est une involution de E. Notons*

$$F = \{x \in E \,|\, f(x) = x\} \qquad \text{et} \qquad G = \{x \in E \,|\, f(x) = -x\}.$$

Alors F et G sont des sous-espaces vectoriels de E qui sont supplémentaires et f est la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

On pourrait aussi remarquer que $p = \frac{1}{2}(f + \mathrm{Id}_E)$ est un projecteur et appliquer les résultats du paragraphe V.1.

Démonstration.

$\square$