Chapitre 26

Analyse asymptotique

Partie A : Relations de comparaison des suites et des fonctions

Au premier semestre, nous n'avons utilisé que des inégalités pour comparer des suites et des fonctions entre elles. Lorsque l'on connaît la nature d'une suite ou d'une fonction, on peut s'intéresser ensuite à sa vitesse de convergence. C'est ce qu'on appelle l'analyse asymptotique. Pour cela, nous allons voir dans la partie A de ce chapitre trois nouveaux outils pour comparer des suites et les fonctions : la négligeabilité, l'équivalence et la domination. Ils vont nous permettre notamment de lever de nombreuses formes indéterminées et de pousser plus loin l'étude locale des suites et des fonctions. La partie B sera consacrée aux développements limités qui sont des approximations locales de fonctions par des fonctions polynomiales. Enfin la partie C traitera de nombreux exemples de problèmes d'analyse asymptotique.

I Suites négligeables

On omet volontairement de préciser à partir de quel rang ces suites sont définies. Tout ce qui importe dans ce paragraphe est le comportement asymptotique.

Dans tout ce paragraphe, $(u_n)_n$, $(v_n)_n$, $(w_n)_n$ et $(x_n)_n$ désignent des suites réelles ou complexes dont les termes sont non nuls à partir d'un certain rang.

On oubliera souvent d'écrire « $n \to +\infty$ » quand on manipulera des suites car, comme pour les limites : pour les suites, c'est « forcément » (sauf quand il y a un paramètre mais dans ce cas tout sera précisé) quand n tend vers $+\infty$.

1) Définition, exemples et interprétation

Définition. *On dit que $(u_n)_n$ est négligeable devant $(v_n)_n$ si $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(v_n)$ ou $u_n \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}\,(v_n)$ ou, plus simplement, $u_n = \mathrm{o}\,(v_n)$. Cela se lit « u_n est un petit o de v_n ».*

Exemples :

- *Si $0 < \alpha < \beta$, alors*

- *Si $0 < q < r$,*

- *Autre écriture des croissances comparées vues au chapitre 4 : pour tous α, β strictement positifs et pour tout q tel que $|q| > 1$,*

- *On a également, si α et β sont strictement positifs et q est tel que $|q| < 1$:*

$$\frac{1}{n^n} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n!}\right), \quad \frac{1}{n!} = \mathrm{o}\,(q^n), \quad q^n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{n^\alpha} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{(\ln(n))^\beta}\right).$$

Dans le cas (rare en pratique) où une infinité des termes de la suite $(v_n)_n$ sont nuls (la négation du fait qu'ils sont non nuls à partir d'un certain rang), une définition plus générale est la suivante : on dit que $(u_n)_n$ est négligeable devant $(v_n)_n$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant \varepsilon |v_n|$.

Cas particulier important :

$$\boxed{u_n = \mathrm{o}\,(1) \iff \frac{u_n}{1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$$

Dire que $u_n = \mathrm{o}\,(1)$ est donc une autre manière de dire que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Interprétation :

> Cette interprétation n'est pas rigoureuse ! Justement, la notation o permet de définir rigoureusement les notions écrites entre guillemets.

- Dire que $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ est une façon rigoureuse de dire que « v_n est beaucoup plus gros que u_n » au voisinage de $+\infty$.
- Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ tendent vers $+\infty$, alors $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ quand « $(v_n)_n$ tend vers $+\infty$ plus vite que $(u_n)_n$ ». Ci-dessous, parmi les suites usuelles, on range celles qui tendent vers $+\infty$ (en valeur absolue pour $(q^n)_n$) « de la plus lente à la plus rapide » (et donc, chaque suite est négligeable devant celles situées à sa droite) :

$$(\ln(n))^\beta \qquad n^\alpha \qquad n^{\alpha'} \qquad q^n \qquad n! \qquad n^n \qquad \to +\infty$$

$$0<\beta \qquad 0<\alpha<\alpha' \qquad 1<|q|$$

> Quand on parle de suites négligeables, les suites ne tendent pas forcément vers 0 ou $+\infty$ comme les exemples ci-contre pourraient le laisser penser. Par exemple $(-1)^n = \mathrm{o}(n)$.

- Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ tendent vers 0, alors $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ quand « $(u_n)_n$ tend vers 0 plus vite que $(v_n)_n$ ». Ci-dessous, parmi les suites usuelles, on range celles qui tendent vers 0 « de la plus lente à la plus rapide » (et donc, chaque suite est négligeable devant celles situées à sa droite) :

$$0 \leftarrow \qquad \frac{1}{n^n} \qquad \frac{1}{n!} \qquad q^n \qquad \frac{1}{n^{\alpha'}} \qquad \frac{1}{n^\alpha} \qquad \frac{1}{(\ln(n))^\beta}$$

$$|q|<1 \qquad 0<\alpha<\alpha'$$

Remarques :

- La notation o est appelée notation de Landau. Elle est très utilisée en mathématiques et très pratique (comme nous allons le voir).
- ⚠ Cependant elle repose sur un abus d'écriture : $\mathrm{o}(v_n)$ ne désigne pas une suite fixée mais n'importe quelle suite négligeable devant $(v_n)_n$. En particulier, si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et $w_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors on a pas forcément $u_n = v_n$, ni même à partir d'un certain rang

  Par exemple $n = \mathrm{o}(n^2)$ et $\sqrt{n} = \mathrm{o}(n^2)$ alors que les suites $(n)_n$ et $(\sqrt{n})_n$ ne sont pas égales à partir d'un certain rang.

  De plus on écrit $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et jamais $\mathrm{o}(v_n) = u_n$.

> Cela revient encore à dire que
> $$u_n - v_n = o(w_n).$$

- On rencontrera aussi la notation $u_n = v_n + o(w_n)$ pour dire que $u_n = v_n + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n = o(w_n)$. Mais, là encore, méfiance : avoir $u_n + \mathrm{o}(w_n) = v_n + \mathrm{o}(w_n)$ n'implique pas $u_n = v_n$.

  Par exemple, pour tout $n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n-1} + \dfrac{1}{n(1-n)}$ (ces deux quantités sont égales à $\dfrac{1}{n}$). Mais $\dfrac{1}{n(n+1)} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $\dfrac{1}{n(1-n)} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc $\dfrac{1}{n+1} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n-1} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ sans que $\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n-1}$.

2) Premières propriétés

Proposition (transitivité). *Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et $v_n = \mathrm{o}(w_n)$, alors $u_n = \mathrm{o}(w_n)$.*

Démonstration. $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{u_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{v_n} \times \dfrac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. □

Exemple : *Si $u_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ alors*

Dire que $u_n = o(\ell)$, avec ℓ un réel non nul, est équivalent à dire que $u_n = o(1)$ ou encore que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Proposition (multiplication par une constante). *Si $u_n = o(v_n)$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors $\lambda u_n = o(v_n)$ et $u_n = o(\lambda v_n)$.*

Démonstration. $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{\lambda u_n}{v_n} = \lambda \times \dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{u_n}{\lambda v_n} = \dfrac{1}{\lambda} \times \dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. □

Avec la définition plus général vue dans la marge plus haut, $u_n = o(0)$ voudrait dire que $(u_n)_n$ est stationnaire à 0... ce qui n'arrive jamais pratique.

Remarques :

- On n'écrit **JAMAIS** $u_n = o(0)$: cela n'a aucun sens !
- En particulier, si $u_n = o(v_n)$, alors $-u_n = o(v_n)$ et $2u_n = o(v_n)$. On ne fait pas apparaître ls constantes multiplicatives pas dans les o. En fait, elles sont superflues. Il ne serait pas faux d'écrire $2u_n = o(2v_n)$, mais c'est inutile.
- Les o servent à comparer les ordres de grandeur de deux suites : par exemple, le cas échéant, il est plus parlant de dire que $2u_n$ est négligeable devant n que de dire que $2u_n$ est négligeable devant $2n$: on s'intéresse uniquement à l'ordre de grandeur.

Proposition (produit par une suite). *Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n \times w_n = o(v_n \times w_n)$.*

Démonstration. $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{u_n \times w_n}{v_n \times w_n} = \dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. □

Exemples : *Si $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,*

Proposition (produit de deux o). *Si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(x_n)$, alors $u_n \times w_n = o(v_n \times x_n)$.*

Démonstration. $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{w_n}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{u_n w_n}{v_n x_n} = \dfrac{u_n}{v_n}\dfrac{w_n}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. □

Exemple : *Si on a $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $w_n = o\left(n^2\right)$, alors $u_n w_n = o(n)$.*

• C'est faux si $\alpha \leqslant 0$. Par exemple $n = o(n^2)$ mais $\dfrac{1}{n} \neq o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
• C'est faux si α dépend de n. Par exemple $e^n = o(e^{2n})$ mais $(e^n)^{1/n} \neq o\left((e^{2n})^{1/n}\right)$.

Proposition (élévation à une puissance FIXE). *Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que u_n^α et v_n^α sont bien définies pour n assez grand. Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n^\alpha = o(v_n^\alpha)$.*

Démonstration. Par hypothèse, $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est continue donc $\dfrac{u_n^\alpha}{v_n^\alpha} = \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^\alpha = 0$ ce qui permet de conclure.

Exemples : *Si $u_n = o\left(n^2\right)$, alors*

Proposition (valeur absolue/module). *On a :*

$$u_n = o(v_n) \iff |u_n| = o(v_n) \iff u_n = o(|v_n|) \iff |u_n| = o(|v_n|).$$

Démonstration. Rappelons qu'une suite tend vers 0 si elle tend vers 0 en valeur absolue. Il se trouve que $\dfrac{u_n}{v_n}$, $\dfrac{|u_n|}{v_n}$, $\dfrac{u_n}{|v_n|}$ et $\dfrac{|u_n|}{|v_n|}$ ont la même valeur absolue. □

En d'autres termes, on peut « sommer les o ». Attention, cependant, il faut « les mêmes o » !

Proposition (somme de deux mêmes o). *Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n \pm v_n = o(w_n)$.*

Démonstration. $\dfrac{u_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\dfrac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{u_n \pm v_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{w_n} \pm \dfrac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. □

Exemple : $n^2 = \mathrm{o}(2^n)$, $n^4 = \mathrm{o}(2^n)$ *donc*

⚠ Si $u_n = \mathrm{o}(w_n)$ et $v_n = \mathrm{o}(w_n)$, alors $u_n - v_n = \mathrm{o}(w_n)$, surtout pas 0 !

Résumons ces propriétés :

Dans les paragraphes II.5 et II.7.a, on verra commencer sommer des o différents. En un mot : on garde le plus gros des deux (ou encore le plus petit est « aspiré » par le plus gros).

$$\boxed{\begin{array}{c}
\mathrm{o}(\mathrm{o}(u_n)) = \mathrm{o}(u_n) \\
\lambda\mathrm{o}(u_n) = \mathrm{o}(\lambda u_n) = \mathrm{o}(u_n) \text{ si } \lambda \neq 0 \\
v_n \times \mathrm{o}(u_n) = \mathrm{o}(v_n u_n) \\
\mathrm{o}(u_n) \times \mathrm{o}(v_n) = \mathrm{o}(u_n v_n) \\
(\mathrm{o}(u_n))^\alpha = \mathrm{o}(u_n^\alpha) \text{ si } \alpha > 0 \\
|\mathrm{o}(u_n)| = \mathrm{o}(|u_n|) = \mathrm{o}(u_n) \\
\mathrm{o}(u_n) \pm \mathrm{o}(u_n) = \mathrm{o}(u_n) \\
\mathrm{o}(u_n) \pm \mathrm{o}(v_n) = ????
\end{array}}$$

Il existe une multitudes de propriétés sur les suites négligeables et il serait fastidieux d'être exhaustif et de toutes les retenir : au moindre doute, on refait la démonstration au brouillon. C'est souvent immédiat !

Quelques exemples :

- ⋆ *Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors $u_{\varphi(n)} = \mathrm{o}\left(v_{\varphi(n)}\right)$. En effet toute sous-suite d'une suite qui tend vers 0 tend à son tour vers 0.*
- ⋆ *Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $\dfrac{1}{v_n} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ (l'ordre a été changé).*
- ⋆ *Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et $|x_n| \leqslant u_n$ à partit d'un certain rang, alors $x_n = \mathrm{o}(v_n)$. En effet :*

⚠ C'est faux sans valeur absolue : x_n pourrait être alors « très grand dans les négatifs ».

- ⋆ *Si $(u_n)_n$ est bornée et si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$, alors $u_n = \mathrm{o}(v_n)$. En effet :*

II Suites équivalentes

Dans le cas (rare en pratique) où une infinité des termes de la suite $(v_n)_n$ sont nuls (la négation du fait qu'ils sont non nuls à partir d'un certain rang), une définition plus générale est la suivante : on dit que $(u_n)_n$ est équivalente devant $(v_n)_n$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - v_n| \leqslant \varepsilon |v_n|$.

Dans tout ce paragraphe, $(u_n)_n$, $(v_n)_n$, $(w_n)_n$ et $(x_n)_n$ désignent des suites réelles ou complexes dont les termes sont non nuls à partir d'un certain rang.

1) Définition et interprétation

Définition. *On dit que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont équivalentes si $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ou $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ ou, plus simplement, $u_n \sim v_n$.*

Interprétation. Dire que $u_n \sim v_n$ est une façon rigoureuse de dire que « u_n est à peu près pareil que v_n quand n tend vers $+\infty$ ».

Remarque : ⚠ On n'écrit **JAMAIS** $u_n \sim 0$: cela n'a aucun sens (avec la définition générale dans la marge, cela signifie que $(u_n)_n$ est stationnaire à 0 ce qui n'arrive jamais en pratique).

2) Équivalents usuels

Théorème. *Si* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, *on a les équivalents suivants :*

- $\mathrm{e}^{u_n} \sim 1$,
- $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim u_n$,
- $\ln(1+u_n) \sim u_n$,
- $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ***fixe***,
- $\mathrm{sh}(u_n) \sim u_n$,
- $\mathrm{ch}(u_n) \sim 1$,
- $\mathrm{ch}(u_n) - 1 \sim \dfrac{u_n^2}{2}$,
- $\mathrm{th}(u_n) \sim u_n$,
- $\sin(u_n) \sim u_n$,
- $\cos(u_n) - 1 \sim -\dfrac{u_n^2}{2}$,
- $\tan(u_n) \sim u_n$,
- $\mathrm{Arcsin}(u_n) \sim u_n$,
- $\mathrm{Arccos}(u_n) \sim \frac{\pi}{2}$,
- $\mathrm{Arccos}(u_n) - \frac{\pi}{2} \sim -u_n$,
- $\mathrm{Arctan}(u_n) \sim u_n$,

Démonstration.

- Par continuité en 0, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{1} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, $\dfrac{\mathrm{ch}(x)}{1} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, $\dfrac{\cos(x)}{1} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ et $\dfrac{\mathrm{Arccos}(x)}{\pi/2} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.
On conclut car $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Ces équivalents seront immédiats quand on aura vu les DL, cf. partie B.

- $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ (taux d'accroissement en 0) donc, par composition de limites, $\dfrac{\sin(u_n)}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ c'est-à-dire que $\sin(u_n) \sim u_n$.
De même pour $\mathrm{e}^{u_n} - 1$, $\ln(1+u_n)$, $(1+u_n)^\alpha - 1$, $\mathrm{sh}(u_n)$, $\mathrm{th}(u_n)$, $\mathrm{Arccos}(u_n) - \frac{\pi}{2}$, $\mathrm{Arcsin}(u_n)$ et $\mathrm{Arctan}(u_n)$.
- On a $\sin^2\left(\frac{u_n}{2}\right) = 1 - \cos(u_n)$ donc

$$\frac{\cos(u_n) - 1}{-u_n^2/2} = \frac{\sin^2(u_n/2)}{u_n^2/4} = \left(\frac{\sin(u_n/2)}{u_n/2}\right)^2.$$

Puisque $\dfrac{u_n}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{\sin(u_n/2)}{u_n/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, on a $\dfrac{\cos(u_n) - 1}{-u_n^2/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1^2 = 1$.

De même $\dfrac{\mathrm{ch}(u_n) - 1}{u_n^2/2} = \left(\dfrac{\mathrm{sh}(u_n/2)}{u_n/2}\right)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. □

Ces équivalents sont totalement faux lorsque $\cancel{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$!

Par exemple, si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, $\mathrm{Arctan}(u_n) \sim \dfrac{\pi}{2}$ *et* $\mathrm{th}(u_n) \sim 1$.

Une suite polynomiale est équivalente à son terme de plus haut degré. Attention si c'est un polynôme en $\dfrac{1}{n}$, c'est équivalent au terme de plus bas degré.

Proposition. *Soit* $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ *tel que* $q < p$. *Soient* $a_q, \ldots, a_p$ *des réels tels que* $a_q \neq 0$ *et* $a_q \neq 0$. *Alors*

$$\sum_{k=q}^{p} a_k n^k \sim a_p n^p \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=q}^{p} \frac{a_k}{n^k} \sim \frac{a_q}{n^q}.$$

Démonstration. Nous avons

$$\frac{1}{a_p n^p} \sum_{k=q}^{p} a_k n^k = \sum_{k=q}^{p-1} \frac{a_k}{a_p n^{p-k}} + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

et

$$\frac{n^q}{a_q} \sum_{k=q}^{p} \frac{a_k}{n^k} = 1 + \sum_{k=q+1}^{p} \frac{a_k}{a_q n^{k-q}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

□

Exemples :

- $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim$

- $\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1$

- $\ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right) \sim$

C'était un piège : ici $u_n = \mathrm{Arctan}(n)$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Attention aux automatismes !

- $\ln(1+\mathrm{Arctan}(n)) \sim$

- $\dfrac{7}{n} - \dfrac{4}{n^{2025}} \sim$

- $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} \sim$

- $n+1 \sim$

- $3n^4 + 6n^3 + 18000^{18000}n^2 \sim$

- $n^2 - 100n\ln(n) + \sqrt{n} + \dfrac{1}{n} \sim$

- *Si $(W_n)_n$ est la suite des intégrales de Wallis, $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ (cf. chapitre 14).*

Théorème (formule de Stirling). $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

On le rencontre aussi sous la forme suivante :

$$n! \sim \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}.$$

Démonstration. Reportée au chapitre 27. □

3) Premières propriétés

Proposition. *$\sim$ est une relation d'équivalence :*

- ***Réflexivité.*** *$u_n \sim u_n$.*
- ***Symétrie.*** *Si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$.*
- ***Transitivité.*** *Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$.*

Démonstration.

- On a $\dfrac{u_n}{u_n} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
- Si $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, alors $\dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{1}{u_n/v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{1} = 1$.
- Si $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\dfrac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, alors $\dfrac{u_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{v_n}\dfrac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. □

Par exemple, si $w_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$, alors $w_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. En d'autres termes, dans le o, on ne garde que le terme prédominant. Comme pour les constantes multiplicatives, on ne garde pas les termes suivants car ils sont superflus : seul compte l'ordre de grandeur.

Proposition. *Si $u_n \sim v_n$, alors u_n et v_n ont même signe à partir d'un certain rang.*

Démonstration. Puisque $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} \leqslant 2$. Dès lors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang. □

De même signe ne veut pas dire de signe constant !

Par exemple, $\dfrac{(-1)^n}{n+1} \sim \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Deux suites équivalentes ne sont pas forcément de même monotonie, même à partir d'un certain rang.

Si $n \geqslant 1$, posons $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 - \frac{1}{n}$. Alors $u_n \sim v_n$. Pourtant, $(u_n)_n$ est décroissante et $(v_n)_n$ est croissante.

Théorème (théorème d'encadrement pour les équivalents). *Supposons que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang. Si $u_n \sim x_n$ et $w_n \sim x_n$, alors $v_n \sim x_n$.*

Démonstration.

□

Exemple : *Supposons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Alors $\lfloor u_n \rfloor \sim u_n$. En effet :*

4) Liens entre $\sim$ et limites

Proposition. *Si $u_n \sim v_n$ et si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.*

Démonstration. $\frac{v_n}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ donc $v_n = u_n \times \frac{v_n}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. □

En d'autres termes, deux suites équivalentes ont même limite éventuelle. Attention, comme dit ci-contre, la réciproque est fausse.

La réciproque est fausse ! Deux suites ayant même limite ne sont pas forcément équivalentes !

Par exemple :

- ⋆ $n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, $n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ *mais* $\cancel{n^2 \sim n}$ *(le quotient ne tend pas vers 1).*
- ⋆ $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *mais* $\cancel{\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n}}$ *(le quotient ne tend pas vers 1).*

Cependant, on a le résultat suivant :

Proposition. *Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$. Alors $u_n \sim \ell$ si et seulement si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.*

Démonstration. On a $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ si et seulement si $\frac{u_n}{\ell} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ si et seulement si $u_n \sim \ell$. □

C'est une erreur classique : ce n'est pas une raison pour la faire !

Attention, on rappelle qu'on ne manipule que des suites non nulles à partir d'un certain rang. Par conséquent, cela n'a **AUCUN SENS** de dire qu'une suite est équivalente à 0 ou à la suite nulle. Par exemple, même s'il est correct d'écrire que $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on n'écrira **JAMAIS** $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim 0$ mais plutôt $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ (cf. paragraphe II.2.

Comme on l'a vu ci-dessus, c'est faux si $\ell = 0$ ou si $\ell = \pm\infty$: en poussant un peu, on pourrait dire que c'est faux dans tous les cas intéressants...

Corollaire. *Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ alors $u_n \sim v_n$.*

Exemple : $2 + \frac{1}{n} \sim 2 - \frac{1}{n} \sim 2$.

5) Liens entre $\sim$ et o

Proposition. *Si* $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ *et* $v_n \sim w_n$, *alors* $u_n = \mathrm{o}(w_n)$.

Démonstration. $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\dfrac{u_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{v_n}\dfrac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. □

Proposition. *Si* $u_n \sim v_n$ *et* $v_n = \mathrm{o}(w_n)$, *alors* $u_n = \mathrm{o}(w_n)$.

Démonstration. $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\dfrac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{u_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{v_n}\dfrac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. □

La réciproque est fausse aussi : $\dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ mais $\cancel{\dfrac{2}{n} \sim \dfrac{1}{n}}$.

⚠ Même si $u_n \sim v_n$, on n'a pas forcément $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$!

Par exemple, $n^2 + n \sim n^2$ *mais la différence tend vers* $+\infty$ *!*

Cependant, on a le résultat fondamental suivant :

Théorème. $u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n) \iff u_n - v_n = \mathrm{o}(u_n)$.

C'est intuitif ! Deux suites sont « à peu près égales » si et seulement si la différence est négligeable devant ces mêmes suites. L'intérêt de ce théorème est qu'on peut alors écrire que $u_n \sim v_n$ si et seulement si

$$u_n = v_n + \mathrm{o}(v_n).$$

Démonstration.

□

Remarques :

- De manière générale, les notations o et $\sim$ sont utiles pour formaliser des approximations. Par exemple, écrire « $n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} n$ » est une horreur ignoble mais écrire $n+1 \sim n$ est tout-à-fait rigoureux.
- Et si on veut plusieurs termes ? On utilise un o. Par exemple, écrire

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

signifie que

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \left(1 - \frac{1}{2n^2}\right) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

c'est-à-dire que $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$ est à peu près égal à $\left(1 - \dfrac{1}{2n^2}\right)$ et que l'erreur commise en faisant cette approximation est négligeable devant $\dfrac{1}{n^2}$, c'est-à-dire devant le dernier terme de l'approximation. C'est le principe du développement limité et du développement asymptotique : cf. parties B et C.

L'avantage de cette écriture est qu'on peut l'utiliser dans les calculs car le o vérifie des propriétés que ne vérifie par forcément l'équivalent (voir paragraphe suivant).

Dans la remarque de la page suivante, c'est à cette interprétation qu'on fait référence.

- Pourquoi préfère-t-on écrire $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 - \dfrac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ plutôt que $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim 1 - \dfrac{1}{2n^2}$? Cette écriture est correcte mais écrire des équivalents à plus d'un terme est déconseillé voire interdit. Prenons un autre exemple d'équivalent à plus d'un terme pour que cela soit plus parlant.

  Écrire $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim 1 + \dfrac{1}{n}$ est

  ⋆ *correct :* le quotient tend bien vers 1.

  ⋆ *totalement inutile :* on peut tout aussi bien écrire $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim 1 + \dfrac{\pi^2}{n^{1789}}$ et ce sera tout aussi correct. En effet, le deuxième terme n'apporte aucune information.

  ⋆ *dangereux :* on a envie d'en déduire que $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1 \sim \dfrac{1}{n}$ ce qui est **faux** !

⚠ Morale de l'histoire : en pratique, on ne met qu'un seul terme dans un équivalent. Quand on veut en mettre plusieurs, pour avoir une meilleure approximation, on utilise un o.

6) Opérations légales sur les équivalents

Théorème (produit).

- *Si $u_n \sim v_n$, alors $x_n \times u_n \sim x_n \times v_n$.*
- *Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim x_n$, alors $u_n \times w_n \sim v_n \times x_n$.*

Démonstration. $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\dfrac{w_n}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\dfrac{u_n w_n}{v_n x_n} = \dfrac{u_n}{v_n}\dfrac{w_n}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. □

Remarque : En particulier, si $u_n \sim v_n$ et si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors $\lambda u_n \sim \lambda v_n$.

C'est normal ! Quand on parle de suites négligeables, on parle de limite nulle donc multiplier par un scalaire ne change rien, tandis que quand on parle de suites équivalentes, on parle de limite égale à 1, donc si on multiplie par une constante, on change la limite !

Contrairement aux o, les constantes multiplicatives « apparaissent » dans les équivalents.

Par exemple $\dfrac{1}{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$ *donc* $\dfrac{2}{n+1} \sim \dfrac{2}{n}$ *alors que* $\dfrac{1}{n} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ *donc* $\dfrac{2}{n} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Théorème (quotient). *Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim x_n$ alors $\dfrac{u_n}{w_n} \sim \dfrac{v_n}{x_n}$.*

Démonstration. $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\dfrac{w_n}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\dfrac{u_n/w_n}{v_n/x_n} = \dfrac{u_n/v_n}{w_n/x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.□

Théorème (élévation à une puissance FIXE). *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que u_n^α et v_n^α sont bien définis pour n assez grand. Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n^\alpha \sim {v_n}^\alpha$.*

Démonstration. $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est continue donc $\left(\dfrac{u_v}{v_n}\right)^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1^\alpha = 1$ ce qui permet de conclure. □

Contrairement au cas des o, on ne peut pas seulement prendre le module de l'un des deux. De plus, la réciproque est fausse : $|n| \sim |-n|$ mais $\cancel{n \sim n}$ puisque la quotient ne tend pas vers 1.

Exemple : *Déterminons la limite de $u_n = \dfrac{\sqrt{n}\ln(1+\frac{1}{n\sqrt{n}})}{n - \sqrt[3]{n^3+n^2}}$ quand n tend vers $+\infty$.*

Théorème (valeur absolue/module). *Si $u_n \sim v_n$ alors $|u_n| \sim |v_n|$.*

Démonstration. $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\dfrac{|u_n|}{|v_n|} = \left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. □

7) Opérations illégales sur les équivalents (et comment contourner la loi)

a) La somme

On ne peut pas sommer des équivalents pur et simplement, c'est-à-dire, lorsque $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim x_n$, on n'a pas forcément $u_n + w_n \sim v_n + x_n$.

Par exemple, $1 + \dfrac{1}{n} \sim 1 + \dfrac{1}{n^2}$ *et* $-1 + \dfrac{1}{n} \sim -1$ *mais* $\dfrac{2}{n}$ *n'est pas équivalent à* $\dfrac{1}{n^2}$.

C'est-à-dire le fait que $u_n \sim v_n$ si et seulement si

$$u_n - v_n = \mathrm{o}\,(v_n)\,.$$

Pour sommer des équivalents, une seule solution : reformuler les équivalents en terme de o.

Exemple : *Posons $u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ et $v_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right)$. Donnons un équivalent de $u_n + v_n$.*

On peut sommer les mêmes o, mais que faire quand on a des o différents ? On garde « le plus gros ». Voyons avec un exemple :

Exemple : *Posons $u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ et $v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$. Donnons un équivalent de $u_n + v_n$.*

Cependant, en pratique, cela ne se passe pas toujours aussi bien :

Exemple : *Peut-on, avec nos outils actuels, donner un équivalent de $u_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$?*

Rappelons qu'il est HORS DE QUESTION de dire que u_n est équivalent à 0 !

On peut donc conclure que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ mais pas donner d'équivalent ! Pour cela, il faudrait être plus précis et regarder « ce qui se cache dans le $\mathrm{o}\,(1)$ ». Il nous faut donc une plus grande précision dans l'approximation du $\ln$. Nous verrons cela dans la partie B.

b) Le passage à une fonction (même continue)

On peut composer les limites par une fonction continue (cf. chapitre 18), c'est pour cela que composer un équivalent par une fonction continue est une erreur fréquente.

On ne peut pas passer composer à gauche par une fonction dans un équivalent, c'est-à-dire, lorsque $u_n \sim v_n$ et si f est une fonction, on n'a pas forcément $f(u_n) \sim f(v_n)$.

Par exemple, $n + 1 \sim n$ mais $\cancel{\mathrm{e}^{n+1} \sim \mathrm{e}^n}$ (car le quotient ne tend pas vers 1).

Il faut traiter ce problème au cas par cas. Voyons en plusieurs :

- **Cas particulier d'un équivalent à une constante non nulle :** Supposons que $u_n \sim \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}^*$ et que f est continue en ℓ.

Exemple : Remontrons l'immense classique $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim e$.

Il serait totalement abusif de conclure immédiatement que $\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \sim e$. Vous ne voudriez pas qu'un examinateur croie que vous avez passé à la fonction continue dans un équivalent.

- **Passage au logarithme.** On fait comme au premier semestre en factorisant par le terme prédominant.

Exemple : Donner un équivalent de $u_n = \ln\left(2n^2+5n+1000\ln(n)+3\right)$.

Si bien sûr passer au logarithme a un sens...

Un autre cas peut se produire : si on a $u_n \sim v_n$ et si on veut appliquer la fonction $\ln$, on écrit :

Il faut reproduire ce raisonnement systématiquement dans le cas particulier que vous rencontrez : ce n'est pas un résultat du cours. Attention cela ne fonctionne pas si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Exemple : Donner un équivalent de $u_n = \ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Exemple : Donner un équivalent de $\ln(n!)$.

On a vu plus haut que $u_n \sim v_n$ n'a rien à voir avec le fait que

$$u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et donc $u_n \sim v_n$ n'a rien à voir avec le fait que $e^{u_n} \sim e^{v_n}$.

On peut commencer par dire que, puisque $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $\text{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Mais attention on ne peut pas composer les équivalents par la fonction $\sin$.

Encore cet immense classique vu plusieurs fois cette année (cf. chapitres 4, 14 et 18).

- **Passage à l'exponentielle :**

- **Composition de plusieurs équivalents usuels :** Il suffit de procéder de gauche à droite au lieu de droite à gauche.

  Exemple : *Déterminons un équivalent simple de* $\sin\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

c) L'élévation à une puissance variable

On ne peut pas élever à une puissance variable dans un équivalent (comme pour les limites de suites d'ailleurs), c'est-à-dire, lorsque $u_n \sim v_n$, on a pas forcément $u_n^{x_n} \sim v_n^{x_n}$.

Par exemple, $1 + \frac{1}{n} \sim 1$ *mais* $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *n'est pas équivalent à* $1^n = 1$ *puisque* $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$

Plus généralement, si on a une suite du type $u_n^{x_n}$, on commence toujours par l'écrire sous la forme $u_n^{x_n} = \exp\left(x_n \ln(u_n)\right)$ et on se retrouve donc avec des compositions (cf. ci-dessus).

d) Le passage à la partie réelle/imaginaire

On ne peut pas passer à la partie réelle ou la partie imaginaire dans un équivalent.

Par exemple, $n^2 + \mathrm{i}n \sim n^2 - \mathrm{i}n$ *mais* $\mathrm{Im}(n^2 + \mathrm{i}n) = n$ *n'est pas équivalent à* $-n = \mathrm{Im}(n^2 - \mathrm{i}n)$.

e) Et sinon ?

Dans les autres cas où aucun théorème ne s'applique, on revient à la définition (c'est-à-dire on forme le quotient et on montre qu'il tend vers 1).

III Suites dominées

Dans tout ce paragraphe, $(u_n)_n$, $(v_n)_n$, $(w_n)_n$ et $(x_n)_n$ désignent des suites réelles ou complexes dont les termes sont non nuls à partir d'un certain rang.

1) Définition et interprétation

Définition. *On dit que* $(u_n)_n$ *est dominée par* $(v_n)_n$ *si la suite* $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$ *est bornée.*
On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$ *ou* $u_n \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$ *ou, plus simplement,* $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.
Cela se lit « u_n est un grand o de v_n ».

Dans le cas (rare en pratique) où une infinité des termes de la suite $(v_n)_n$ sont nuls (la négation du fait qu'ils sont non nuls à partir d'un certain rang), une définition plus générale est la suivante : on dit que $(u_n)_n$ est négligeable devant $(v_n)_n$ si il existe $K > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant K|v_n|$.

Exemples :

- $\dfrac{\cos(n)}{n^2} = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. *On voit sur ce premier exemple que ce n'est ni un équivalent, ni un o : la notation* O *apporte donc quelque chose.*
- $\dfrac{5n^3+12n^2+1000}{n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 5$ *et, une suite convergence étant bornée, il vient que* $5n^3+12n^2+1000 = \mathrm{O}\left(n^3\right)$.

Remarques :

- ⚠ Cette fois encore, écrire $u_n = \mathrm{O}\,(0)$ n'a aucun sens (avec la définition plus générale dans la marge, cela voudrait dire que $(u_n)_n$ est stationnaire à 0… ce qui n'arrive jamais en pratique).

  ⚠ **Cas particulier important :**

$$\boxed{u_n = \mathrm{O}\,(1) \iff \text{la suite } \left(\frac{u_n}{1}\right)_n \text{ est bornée} \iff \text{la suite } (u_n)_n \text{ est bornée}}$$

  Dire que $u_n = \mathrm{O}\,(1)$ est donc une autre manière de dire que $(u_n)_n$ est bornée.

Interprétation : $u_n = \mathrm{O}\,(v_n)$ lorsque « v_n est l'ordre de grandeur maximal de u_n » : soit u_n est d'un ordre de grandeur moindre que v_n, soit u_n est du même ordre de grandeur (cf. lien entre O, o et $\sim$). L'avantage de cette notation par rapport à l'équivalence est qu'elle est plus souple concernant les constantes, puisque seul compte l'ordre de grandeur.

Par exemple, si $n \leqslant u_n \leqslant 3n$ pour n assez grand, alors la suite de terme général $\dfrac{u_n}{n}$ est à valeurs dans $[1\,;3]$ donc est bornée, donc $u_n = \mathrm{O}\,(n)$, i.e. u_n est de l'ordre de grandeur de n (ce qui n'est déjà pas si mal comme information), mais il n'y a aucune raison que $\dfrac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ (c'est-à-dire $u_n \sim n$).

Le O permet de donner des informations sur l'ordre de grandeur, même lorsqu'on n'a pas idée du comportement « précis ». Quand trouver une constante précise est fastidieux et inutile (ce qui compte souvent est uniquement l'ordre de grandeur), on peut penser au O.

Rappelons que le degré d'une fraction rationnelle est la différence du degré de son numérateur et de son dénominateur.

Proposition. *Soit $R \in \mathbb{K}(X)$ non nulle de degré $d \in \mathbb{Z}$. Alors $R(n) = \mathrm{O}\left(n^d\right)$.*

DÉMONSTRATION.

□

Le O est une « arme de destruction massive » : il donne des informations utiles tout en étant très facile de ma-

Bon, dans l'exemple ci-dessus, on pourrait donner un équivalent à l'aide du binôme de Newton : on trouverait pour terme dominant $-42 \times 2006 \times X^{41}$.

Exemple :

Remarque : Pourquoi donner un O alors qu'ici on pourrait donner un équivalent, ce qui serait plus précis ? Parce que, par exemple, on peut sommer les O (alors qu'on ne peut pas sommer les équivalents, cf. paragraphe II.5.b) et aussi parce que, parfois, un O est tout ce dont on a besoin (par exemple pour appliquer les théorèmes de comparaison dans le chapitre 27). Surtout parce que, la plupart du temps, donner un O est plus simple que donner un équivalent précis.

Par exemple, $(n+19)^{42} - (n+2025)^{42} = \mathrm{O}\left(n^{41}\right)$. En effet les polynômes $(X+19)^{42}$ et $(X+2025)^{42}$ ont même degré et même coefficient dominant donc leur différence est de de degré au plus $42-1$.

2) Premières propriétés

Facile : ce sont exactement les mêmes propriétés que celles du o dans le paragraphe I.1.b.

Lorsqu'on somme deux O différents, on garde celui qui domine l'autre.

Proposition.

- *Si* $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ *et* $v_n = \mathrm{O}(w_n)$, *alors* $u_n = \mathrm{O}(w_n)$.
- *Si* $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}^*$, *alors* $\lambda u_n = \mathrm{O}(v_n)$ *et* $u_n = \mathrm{O}(\lambda v_n)$.
- *Si* $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, $u_n \times w_n = \mathrm{O}(v_n \times w_n)$.
- *Si* $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ *et* $w_n = \mathrm{O}(x_n)$, *alors* $u_n \times w_n = \mathrm{O}(v_n \times x_n)$.
- *Si* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ *est telle que* u_n^α *et* v_n^α *sont bien définis pour* n *assez grand et si* $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, *alors* $u_n^\alpha = \mathrm{O}(v_n^\alpha)$.
- $u_n = \mathrm{O}(v_n) \iff |u_n| = \mathrm{O}(v_n) \iff u_n = \mathrm{O}(|v_n|) \iff |u_n| = \mathrm{O}(|v_n|)$.
- *Si* $u_n = \mathrm{O}(w_n)$ *et* $v_n = \mathrm{O}(w_n)$, *alors* $u_n \pm v_n = \mathrm{O}(w_n)$.

$\rightsquigarrow$ DÉMONSTRATION LAISSÉE EN EXERCICE.

3) Lien avec $\sim$ et o

Proposition.

- *Si* $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, *alors* $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.
- *S'il existe* $\lambda \in \mathbb{K}^*$ *tel que* $u_n \sim \lambda v_n$, *alors* $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.

DÉMONSTRATION. Si $\dfrac{u_n}{v_n}$ tend vers 0 ou λ, alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_n$ est bornée (comme toute suite convergente). $\square$

⚠ La réciproque est fausse !

Par exemple, $2n = \mathrm{O}(n)$ *mais* $2n$ *n'est ni négligeable devant* n, *ni équivalent à* n.

Proposition.

- *Si* $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ *et* $v_n \sim w_n$, *alors* $u_n = \mathrm{O}(w_n)$.
- *Si* $u_n \sim v_n$ *et* $v_n = \mathrm{O}(w_n)$, *alors* $u_n = \mathrm{O}(w_n)$.

$\rightsquigarrow$ DÉMONSTRATION LAISSÉE EN EXERCICE.

⚠ En revanche, lorsque $u_n = v_n + \mathrm{O}(v_n)$, on ne peut pas conclure que $u_n \sim v_n$.

Par exemple $3n^2 = n^2 + \mathrm{O}(n^2)$ *alors que* $\cancel{3n^2 \sim n^2}$.

Encore une fois, c'est intuitif : si u_n est de l'ordre de grandeur de v_n et v_n négligeable devant w_n, alors u_n est négligeable devant w_n, et idem pour l'autre.

Proposition.

- *Si* $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ *et* $v_n = \mathrm{o}(w_n)$ *alors* $u_n = \mathrm{o}(w_n)$.
- *Si* $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ *et* $v_n = \mathrm{O}(w_n)$ *alors* $u_n = \mathrm{o}(w_n)$.

$\rightsquigarrow$ DÉMONSTRATION LAISSÉE EN EXERCICE.

Corollaire. *Si* $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ *et* $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, *alors* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

IV Comparaison de fonctions

Tout dans ce paragraphe est analogue au premier. Nous allons nous contenter d'adapter les résultats mais les démonstrations sont exactement les mêmes. Nous ajouterons seulement les propriétés de substitution.

Dans ce paragraphe, on considère D une union d'intervalles non vides et non réduit à un point. On considère $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à D. On se donne enfin f, g, h et φ des fonctions de D dans $\mathbb{K}$ qui ne s'annulent pas au voisinage de a sauf éventuellement en a.

1) Fonctions négligeables

a) Définition, exemples et interprétation

Une définition plus générale est la suivante : on dit que f est négligeable devant g en a (ou au voisinage de a) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a tel que, pour tout $x \in D \cap V$, $|f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|$.

Définition. *On dit que f est négligeable devant g en a (ou au voisinage de a) si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 0$. On note $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\left(g(x)\right)$ ou $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}\left(g(x)\right)$ ou, plus simplement, $f(x) = \mathrm{o}\left(g(x)\right)$ si aucune confusion n'est possible. Cela se lit « $f(x)$ est un petit o de $g(x)$ en a ».*

Exemples :

- $\dfrac{1/x}{1/x^2} = \dfrac{x^2}{x} = x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ *donc* $\dfrac{1}{x} \underset{0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
- $\dfrac{\pm \ln(x)}{1/x} = -x \ln(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ *par croissances comparées. Ainsi* $\pm \ln(x) \underset{0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
- $\dfrac{x}{\ln(x)} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ *par quotient donc* $x \underset{0}{=} \mathrm{o}\left(\pm \ln(x)\right)$.
- $\dfrac{x^2}{x} = x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ *par quotient donc* $x^2 \underset{0}{=} \mathrm{o}\left(x\right)$.

Exemple : *Autre écriture des croissances comparées vues au chapitre 4 : pour tous α, β, γ strictement positifs,*

On a également :

$$\mathrm{e}^{-\gamma x} \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \qquad \frac{1}{x^\alpha} \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{(\ln(x))^\beta}\right), \qquad x^\alpha \underset{0^+}{=} \frac{1}{|\ln(x)|^\beta}$$

Remarques :

- L'interprétation est la même que pour les suites : $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}\left(g(x)\right)$ lorsque « g est beaucoup plus gros que f au voisinage de a ».
- ⚠ Le o « dépend de l'endroit où on se trouve » : un o au voisinage de $+\infty$ ne sera plus forcément valable au voisinage de 0, et réciproquement.

  Par exemple, si $0 < \alpha < \beta$, alors :

  — $\dfrac{1}{x^\beta} \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$ *et* $x^\alpha \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}\left(x^\beta\right)$

  — $\dfrac{1}{x^\alpha} \underset{0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^\beta}\right)$ *et* $x^\beta \underset{0}{=} \mathrm{o}\left(x^\alpha\right)$.
- ⚠ Cas particulier important : $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}\left(1\right)$ si et seulement si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.
- ⚠ Là encore, écrire $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}\left(0\right)$ n'a aucun sens (et avec la définition plus générale dans la marge, cela voudrait dire que f est nulle au voisinage de a, ce qui n'arrive jamais en pratique).
- La plupart du temps, on cherche des o en 0 ou en $+\infty$. Lorsque $a \in \mathbb{R}^*$, on étudie généralement $f(a+h)$ lorsque $h \to 0$.

b) Propriétés

On reprend celles des suites et on remplace $=$ par $\underset{a}{=}$ et les suites par des fonctions.

Proposition.

- *Si* $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ *et* $g(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}(h(x))$*, alors* $f(x) = \mathrm{o}(h(x))$.
- *Si* $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}^*$*, alors* $\lambda f(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ *et* $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}(\lambda g(x))$.
- *Si* $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}(g(x))$, $f(x) \times h(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}(g(x) \times h(x))$.
- *Si* $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ *et* $h(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}(\varphi(x))$*, alors* $f(x) \times h(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}(g(x) \times \varphi(x))$.
- *Si* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ *est tel que* f^α *et* g^α *sont bien définis au voisinage de* a *et si* $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}(g(x))$*, alors* $f(x)^\alpha \underset{a}{=} \mathrm{o}(g(x)^\alpha)$.
- $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}(g(x)) \iff |f(x)| \underset{a}{=} \mathrm{o}(g(x)) \iff f(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}(|g(x)|)$
  $\iff |f(x)| \underset{a}{=} \mathrm{o}(|g(x)|)$
- *Si* $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}(h(x))$ *et* $g(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}(h(x))$*, alors* $f(x) \pm g(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}(h(x))$.

Lorsqu'on somme deux o différents, on garde « le plus gros ».

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Et on ajoute :

Proposition (substitution dans les o). *Supposons que* $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$.

- *Si* u *est une fonction définie au voisinage de* $b \in \overline{\mathbb{R}}$ *telle que* $u(t) \xrightarrow[t \to b]{} a$*, alors* $f(u(t)) \underset{t \to b}{=} \mathrm{o}(g(u(t)))$.
- *Si* $(u_n)_n$ *une suite telle que* $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$*, alors* $f(u_n) \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{o}(g(u_n))$.

Démonstration. Découle immédiatement des théorèmes de composition d'une suite ou d'une fonction à gauche par une fonction puisque $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 0$. $\square$

2) Fonctions équivalentes

a) Définition et interprétation

Une définition plus générale est la suivante : on dit que f est équivalent à g au voisinage de a (ou au voisinage de a) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a tel que, pour tout $x \in D \cap V$, $|f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|$.

Définition. *On dit que* f *et* g *sont équivalentes en* a *(ou au voisinage de* a*) si* $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 1$*. On note alors* $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ *ou* $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ *ou, plus simplement,* $f(x) \sim g(x)$ *si aucune confusion n'est possible.*

Remarques :

- L'interprétation est la même que pour les suites : $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ lorsque « $f(x)$ et $g(x)$ sont à peu près pareils lorsque x est voisinage de a ».
- ⚠ Là encore, écrire $f(x) \underset{a}{\sim} 0$ n'a aucun sens (et avec la définition plus générale dans la marge, cela voudrait dire que f est nulle au voisinage de a, ce qui n'arrive jamais en pratique).
- La plupart du temps, on cherche des équivalents en 0 ou en $+\infty$. Lorsque $a \in \mathbb{R}^*$, on étudie généralement $f(a+h)$ lorsque $h \to 0$.

b) Propriétés

On reprend celles des suites et on remplace $\sim$ par $\underset{a}{\sim}$ et les suites par des fonctions.

Proposition.

- $f(x) \underset{a}{\sim} f(x)$.
- *Si* $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, *alors* $g(x) \underset{a}{\sim} f(x)$.
- *Si* $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ *et* $g(x) \underset{a}{\sim} h(x)$, *alors* $f(x) \underset{a}{\sim} h(x)$.
- *Si* $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, *alors* f *et* g *ont le même signe au voisinage de* a.
- *Supposons que* $f \leqslant g \leqslant h$ *au voisinage de* a. *Si* $f(x) \underset{a}{\sim} \varphi(x)$ *et* $h(x) \underset{a}{\sim} \varphi(x)$, *alors* $g(x) \underset{a}{\sim} \varphi(x)$.
- *Si* $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ *et* $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, *alors* $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.
- *Soit* $\ell \in \mathbb{R}^*$. *On a* $f(x) \underset{a}{\sim} \ell$ *si et seulement si* $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.
- *Soit* $\ell \in \mathbb{R}^*$. *Si* $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ *et* $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$, *alors* $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$.
- *Si* $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}\,(g(x))$ *et* $g(x) \underset{a}{\sim} h(x)$, *alors* $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}\,(h(x))$.
- *Si* $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ *et* $g(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}\,(h(x)))$, *alors* $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}\,(h(x))$.
- $f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \iff f(x) - g(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}\,(f(x)) \iff f(x) - g(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}\,(g(x))$.
- *Si* $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, *alors* $h(x)f(x) \underset{a}{\sim} h(x)g(x)$.
- *Si* $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ *et* $h(x) \underset{a}{\sim} \varphi(x)$, *alors* $f(x)h(x) \underset{a}{\sim} g(x)\varphi(x)$.
- *Si* $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ *et* $h(x) \underset{a}{\sim} \varphi(x)$, *alors* $\dfrac{f(x)}{h(x)} \underset{a}{\sim} \dfrac{g(x)}{\varphi(x)}$.
- *Si* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ *est tel que* f^α *et* g^α *sont bien définis au voisinage de* a *et si* $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, *alors* $f(x)^\alpha \underset{a}{\sim} g(x)^\alpha$.
- *Si* $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, *alors* $|f(x)| \underset{a}{\sim} |g(x)|$.

Les opérations illégales sont les mêmes que pour les suites et on les traite avec les mêmes techniques (cf. paragraphe II.7)

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Et on ajoute :

Proposition (substitution dans les équivalents). *Supposons que* $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

- *Si* u *est une fonction définie au voisinage de* $b \in \overline{\mathbb{R}}$ *telle que* $u(t) \xrightarrow[t\to b]{} a$, *alors* $f(u(t)) \underset{t\to b}{\sim} g(u(t))$.
- *Si* $(u_n)_n$ *une suite telle que* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, *alors* $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} g(u_n)$.

c) Équivalents usuels

On utilise souvent ces équivalents usuels avec le théorème de substitution précédent. Lorsque $u(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$, on peut « remplacer » x par $u(x)$ dans les équivalents ci-contre et ceux-ci ont lieu alors en a.

Théorème.

- $\mathrm{e}^x \underset{0}{\sim} 1$,
- $\mathrm{e}^x - 1 \underset{0}{\sim} x$,
- $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$,
- $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ***fixe***,
- $\mathrm{sh}(x) \underset{0}{\sim} x$,
- $\mathrm{ch}(x) \underset{0}{\sim} 1$,
- $\mathrm{ch}(x) - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$,
- $\mathrm{th}(x) \underset{0}{\sim} x$,
- $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$,
- $\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$,
- $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$,
- $\mathrm{Arcsin}(x) \underset{0}{\sim} x$,
- $\mathrm{Arccos}(x) \underset{0}{\sim} \frac{\pi}{2}$,
- $\mathrm{Arccos}(x) - \frac{\pi}{2} \underset{0}{\sim} -x$,
- $\mathrm{Arctan}(x) \underset{0}{\sim} x$.

⇝ DÉMONSTRATION LAISSÉE EN EXERCICE.

Proposition. *Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $q < p$. Soient $a_q, \dots, a_p$ des réels tels que $a_q \neq 0$ et $a_q \neq 0$. Alors*

$$\sum_{k=q}^{p} a_k x^k \underset{+\infty}{\sim} a_p x^p \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=q}^{p} a_k x^k \underset{0}{\sim} a_q x^q.$$

⇝ DÉMONSTRATION LAISSÉE EN EXERCICE.

⚠ L'équivalent « dépend de l'endroit où on se trouve » : un équivalent au voisinage de $+\infty$ ne sera plus forcément valable au voisinage de 0, et réciproquement.

Par exemple :

- ⋆ $\ln(1+x) \underset{+\infty}{\sim}$
- ⋆ $\ln(1+x) \underset{0}{\sim}$
- ⋆ $\ln(1+x) \underset{1}{\sim}$.

Autre exemple : $\mathrm{Arctan}(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$ *et* $\mathrm{Arctan}(x) \underset{0}{\sim} x$.

Exemples :

- *Déterminons un équivalent simple de* $\cos^4(\sqrt{x}) - 1$ *en* 0.

- *Déterminons un équivalent simple de* $\dfrac{x^x - 1}{x}$ *en* 0^+.

- *Déterminons un équivalent simple de* $\ln(x)$ *en* 1.

3) Fonctions dominées

a) Définition et interprétation

Définition. *On dit que f est dominée par g en a (ou au voisinage de a) si la fonction $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a. On note alors $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{O}(g(x))$ ou $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{O}(g(x))$ ou, plus simplement, $f(x) = \mathrm{O}(g(x))$. Cela se lit « $f(x)$ est un grand o de $g(x)$ en a ».*

Une définition plus générale est la suivante : on dit que f est négligeable devant g en a (ou au voisinage de a) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K > 0$ et un voisinage V de a tel que, pour tout $x \in D \cap V$, $|f(x)| \leqslant K|g(x)|$.

Remarques :

- L'interprétation est la même que pour les suites : $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{O}\left(g(x)\right)$ lorsque « g est l'ordre de grandeur maximal de f au voisinage de a ».
- Cas particulier important : $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{O}\left(1\right)$ si et seulement si f est bornée au voisinage de a.
- Là encore, écrire $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{O}\left(0\right)$ n'a aucun sens (et avec la définition plus générale dans la marge, cela voudrait dire que f est nulle au voisinage de a, ce qui n'arrive jamais en pratique).
- La plupart du temps, on cherche des O en 0 ou en $+\infty$. Lorsque $a \in \mathbb{R}^*$, on étudie généralement $f(a+h)$ lorsque $h \to 0$.

Rappelons que le degré d'une fraction rationnelle est la différence du degré de son numérateur et de son dénominateur.

Proposition. *Soit $R \in \mathbb{K}(X)$ non nulle de degré $d \in \mathbb{Z}$. Alors $R(x) \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{O}\left(x^d\right)$.*

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

b) Propriétés

On reprend celles des suites et on remplace $=$ par $\underset{a}{=}$ et les suites par des fonctions.

Proposition.

- *Si $f(x) = \mathrm{O}\left(g(x)\right)$ et $g(x) = \mathrm{O}\left(h(x)\right)$, alors $f(x) = \mathrm{O}\left(h(x)\right)$.*
- *Si $f(x) = \mathrm{O}\left(g(x)\right)$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors $\lambda f(x) = \mathrm{O}\left(g(x)\right)$ et $f(x) = \mathrm{O}\left(\lambda g(x)\right)$.*
- *Si $f(x) = \mathrm{O}\left(g(x)\right)$, $f(x) \times h(x) = \mathrm{O}\left(g(x) \times h(x)\right)$.*
- *Si $f(x) = \mathrm{O}\left(g(x)\right)$ et $h(x) = \mathrm{O}\left(\varphi(x)\right)$, alors $f(x) \times h(x) = \mathrm{O}\left(g(x) \times \varphi(x)\right)$.*
- *Si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ est telle que f^α et g^α sont bien définis au voisinage de a et si $f(x) = \mathrm{O}\left(g(x)\right)$, alors $f(x)^\alpha = \mathrm{O}\left(g(x)^\alpha\right)$.*
- $f(x) = \mathrm{O}\left(g(x)\right) \iff |f(x)| = \mathrm{O}\left(g(x)\right) \iff f(x) = \mathrm{O}\left(|g(x)|\right)$.
  $\iff |f(x)| = \mathrm{O}\left(|g(x)|\right)$
- *Si $f(x) = \mathrm{O}\left(h(x)\right)$ et $g(x) = \mathrm{O}\left(h(x)\right)$, alors $f(x) \pm g(x) = \mathrm{O}\left(h(x)\right)$.*
- *Si $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}\left(g(x)\right)$, alors $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{O}\left(g(x)\right)$.*
- *Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $f(x) \underset{a}{\sim} \lambda g(x)$, alors $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{O}\left(g(x)\right)$.*
- *Si $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{O}\left(g(x)\right)$ et $g(x) \sim h(x)$, alors $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{O}\left(h(x)\right)$.*
- *Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{a}{=} \mathrm{O}\left(h(x)\right)$, alors $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{O}\left(h(x)\right)$.*
- *Si $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{O}\left(g(x)\right)$ et $g(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}\left(h(x)\right)$ alors $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}\left(h(x)\right)$.*
- *Si $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}\left(g(x)\right)$ et $g(x) \underset{a}{=} \mathrm{O}\left(h(x)\right)$ alors $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}\left(h(x)\right)$.*

Lorsqu'on somme deux O différents, on garde celui qui domine l'autre.

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Et on ajoute :

Proposition (substitution dans les O). *Supposons que $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{O}\left(g(x)\right)$.*

- *Si u est une fonction définie au voisinage de $b \in \overline{\mathbb{R}}$ telle que $u(t) \xrightarrow[t \to b]{} a$, alors $f(u(t)) \underset{t \to b}{=} \mathrm{O}\left(g(u(t))\right)$.*
- *Si $(u_n)_n$ une suite telle que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$, alors $f(u_n) \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{O}\left(g(u_n)\right)$.*