Chapitre 14

Suites numériques

Partie A : Résultats généraux

L'objectif de ce long chapitre est d'étudier les suites de réels (et de complexes par extension). Il est en trois parties :

- La partie A est consacrée aux résultats généraux et à l'étude de certains exemples fondamentaux (les suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques et les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants).
- La partie B explorera la notion de limite d'une suite réelle.
- La partie C consistera en l'étude des suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

I Notion de suite réelle

1) Définition

Définition. *Une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{R}$ indexée par $\mathbb{N}$. Autrement dit, il s'agit de la donnée pour chaque entier naturel $n \in \mathbb{N}$ d'un réel u_n, appelé terme général de rang n (ou d'indice n) de la suite.*

Autrement dit une suite u est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ mais, au lieu de la noter

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array} \right.$$

on la note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Définition. *On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.*

Remarque : On note aussi $(u_n)_{n\geqslant 0}$ au lieu de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Mais il arrive (souvent même) qu'une suite ne soit pas définie pour les premières valeurs de $\mathbb{N}$:

Définition. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On appelle encore suite réelle toute famille d'éléments de $\mathbb{R}$ indexée par $\mathbb{N}\backslash[\![0\,;n_0-1]\!]$, c'est-à-dire la donnée d'un réel u_n pour chaque $n \geqslant n_0$. On la note alors $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. On dit que la suite est définie à partir du rang n_0. Le terme u_{n_0} s'appelle le terme initial de la suite.*

Dans tout ce chapitre, on réservera en général les lettres $i, j, k, \ell, m, n, p, q$ pour désigner des entiers naturels. Aussi, on pourra écrire (par exemple) « soit $n \geqslant n_0$ » au lieu de « soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$ »

⚠ L'indice initial n_0 doit être systématiquement introduit lui. Il est hors de question de penser que n_0 est le nom générique de tout indice initial... même si c'est souvent ainsi qu'on le notera.

Remarques :

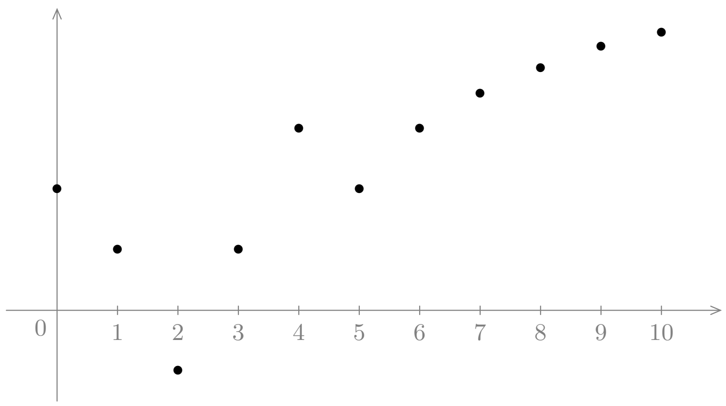
- Dans certains ouvrages, on parle parfois de suite infinie par opposition aux suites finies qui sont les familles d'éléments de $\mathbb{R}$ indexée par une partie finie de $\mathbb{N}$. Dans ce chapitre, quand nous parlerons de suite, cela désignera toujours une suite infinie au sens des définitions précédentes.
- L'indice n est muet, avec tout ce que cela implique, notamment :
  - ⋆ On ne doit pas l'introduire quand on parle de la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.
    ⚠ En revanche, lorsqu'on parle du terme u_n, n n'est pas muette mais désigne un entier bien particulier qui doit avoir été introduit préalablement.
  - ⋆ On peut remplacer n par la lettre que l'on veut (à part u bien sûr). Par exemple, $(u_n)_{n\geqslant n_0} = (u_k)_{k\geqslant n_0} = (u_p)_{p\geqslant n_0}$, etc.
- On note souvent les suites réelles $(u_n)_{n\geqslant n_0}$, $(v_n)_{n\geqslant n_0}$, $(w_n)_{n\geqslant n_0}$, $(x_n)_{n\geqslant n_0}$, etc. Mais toutes les lettres sont possibles à condition que la suite ne porte pas le même nom que son indice (n ici).
- ⚠ Ne pas confondre la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et son terme général u_n, ni avec l'ensemble $\{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ des valeurs de la suite. Il y a un nombre infini d'indices, mais l'ensemble des valeurs peut être fini.

  Par exemple, $\{(-1)^n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \{-1; 1\}$.

Par contre, si on oublie les parenthèses et que l'on écrit juste u_n, on parle du terme de rang n et non pas de la suite $(u_n)_n$! C'est une erreur de type.

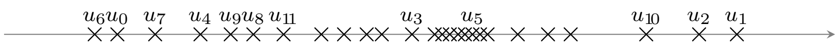
- De nombreuses propriétés des suites ne dépendant pas du rang initial. C'est notamment le cas de l'existence d'une limite, ce qui nous intéressera principalement dans tout ce chapitre. Ainsi, sauf ambiguïté, on pourra souvent « oublier » le terme initial et écrire simplement $(u_n)_n$ ou même (u_n). Implicitement le rang initial n_0 est le premier rang à partir duquel tous les termes de la suites sont bien définis.

  Dans le même genre, on dira parfois « la suite de terme général $u_n = \dots$ » au lieu de « la suite $(u_n)_n$ ». On omet ici d'introduire rigoureusement n qui est implicitement le rang (c'est un léger manque de rigueur mais c'est classique s'il n'y a pas d'ambiguïté).
- Il existe au moins deux manières de représenter une suite. Le plus souvent, on la représentera comme une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire comme la famille de points de coordonnées (n, u_n), avec n allant de n_0 à un certain entier (suffisamment grand pour observer des choses sur la suite) :



La première représentation (que nous utiliserons en général) permet de mieux voir, par exemple, les propriétés de monotonie et de convergence, tandis que la deuxième permet de mieux voir, par exemple, les valeurs d'adhérence (cf. paragraphes I.5 et VII de la partie B).

  Mais on peut aussi la représenter comme un ensemble de points sur l'axe des réels, c'est-à-dire comme la famille de points $(u_n, 0)$.



2) Différents modes de définition d'une suite

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On peut définir une suite réelle de trois manières différentes :

a) Suites définies explicitement

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est définie explicitement lorsque l'on donne, pour tout $n \geqslant n_0$, l'expression du terme u_n en fonction de son rang n. Autrement dit, on connaît explicitement une fonction $f : \mathbb{N} \backslash [\![0 \,;\, n_0 - 1]\!] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = f(n)$.

Exemples :

- *On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$u_n = 5(-2)^n, \qquad \text{et} \qquad v_n = \begin{cases} 0 & \text{si } \ n \text{ est impair,} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3^n}} & \text{si } \ n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Souvent n_0 est juste l'indice à partir duquel tous les termes de la suite ont un sens. Ci-contre w_0 n'aurait aucun sens avec cette expression puisque cela supposerait de diviser par 0 !

- *On définit la suite $(w_n)_{n \geqslant 1}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \dfrac{1}{n^2} \sin\left(\dfrac{n\pi}{12}\right)$.*

b) Suites définies par récurrence

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est définie par récurrence lorsque l'on donne :

- $p \in \mathbb{N}^*$ et les valeurs de $u_{n_0}, \dots, u_{n_0+p-1}$ (les p valeurs de la suite),

- pour tout $n \geqslant n_0$, l'expression de u_{n+p} en fonction des p termes précédents : $u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+p-1}$.

On fera attention à « initialiser » pour suffisamment de valeurs (comme pour une récurrence).

On dit alors que $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ vérifie une relation de récurrence d'ordre p.

Par récurrence (immédiate), une suite définie ainsi l'est de façon unique.

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Exemples :

- *On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence en posant :*

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 5a_n + n + 2, \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} b_0 = 2,\ b_1 = 3,\ b_2 = -1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+3} = -3b_{n+1} + 4b_n. \end{array}\right.$$

- *La suite de Syracuse est la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $s_0 \in \mathbb{N}^*$ et :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad s_{n+1} = \left\{\begin{array}{ll} 3s_n + 1 & \text{si } s_n \text{ est impair,} \\ \dfrac{s_n}{2} & \text{si } s_n \text{ est pair.} \end{array}\right.$$

- *La suite des factorielles est la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} = (n+1) \times f_n$.*

Mais on ne dit pas le terme « forte », c'est juste une analogie avec le raisonnement par récurrence forte

On peut parfois définir une suite par récurrence « forte », c'est-à-dire donner la valeur de u_{n_0} puis, pour tout $n \geqslant n_0$, l'expression de u_{n+1} en fonction de $u_{n_0}, \ldots, u_n$.

On peut évidemment généraliser, par exemple en donnant u_{n_0}, u_{n_0+1} et u_{n+1} en fonction de $u_{n_0}, \ldots, u_n$ pour tout $n \geqslant 1$ (cf. exemple ci-contre).

Exemple : *On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \times u_{n-k}.$$

Par exemple, on ne sait pas donner une expression de f_{1000} qui est un nombre démentiel (le produit des 1000 premiers entiers). On note 1000! ce nombre mais on ne sait pas plus le calculer en lui ayant donné un nom.

Évidemment, le plus pratique est de définir une suite explicitement. Cela simplifie beaucoup l'étude de son éventuelle convergence (cf. partie B). Nous verrons dans le paragraphe VI de cette partie que, dans certains cas, en présence d'une suite récurrence, on essaie d'en obtenir une définition explicite (on calcule les premiers termes en essayant de conjecturer une expression et on la démontre par récurrence). Mais en général, on ne sait pas le faire.

Remarque : L'outil informatique (des logiciels comme `Python`) permet de calculer rapidement (des approximations des) les premiers termes d'une suite définie par récurrence.

c) Suites définies implicitement

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est définie implicitement lorsque, pour tout $n \geqslant n_0$, on définit u_n comme l'unique solution d'une certaine équation.

Exemples :

- *On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n la plus grande solution de $x^{n+2} + x^{n+1} + x = 1$.*
- *On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n l'unique point fixe de la fonction $\tan$ appartenant à l'intervalle $\left[n\pi\,;n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.*

On peut mélanger suites définies implicitement et suites définies par récurrence, par exemple on peut, pour tout n, définir x_{n+1} comme l'unique objet strictement supérieur à x_n qui vérifie une certaine condition.

Étudier de telles suites demande dans un premier temps de bien justifier l'existence des termes, souvent avec le théorème de la bijection (nous verrons plusieurs exemples dans le chapitre 21). Il est rare qu'on arrive à en obtenir une expression explicite et son étude est souvent plus ardue puisqu'on ne dispose que de sa définition implicite (on sait qu'elle vérifie l'équation qui la définit) et éventuellement de propriété de monotonie d'une fonction apparaissant dans la définition de l'équation en question.

3) Propriété vraie à partir d'un certain rang

Définition. *Soit P une propriété portant sur les entiers naturels. Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $P(n)$ est vraie. On dit alors, au choix, que :*

- *la propriété P est vraie à partir d'un certain rang*
- *$P(n)$ est vraie pour tout n assez grand.*

Par abus de langage, on dit même très souvent « $P(n)$ est vraie à partir d'un certain rang » (sous entendu le rang est désigné par la lettre n).

Définition. *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une propriété donnée à partir d'un certain rang lorsque « u_n vérifie la propriété » est vraie à partir d'un certain rang.*

Exemple : *La suite $(n^2-100)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs à partir d'un certain rang (du rang $n=10$ pour être précis). On peut dire aussi $n^2-100 \geqslant 0$ pour tout n assez grand ou même (par abus de langage) $n^2-100 \geqslant 0$ à partir d'un certain rang.*

II Opérations algébriques sur les suites

Rien d'étonnant : ce sont les mêmes opérations algébriques que celles sur les fonctions (cf. chapitre 4) et une suite n'est rien d'autre qu'une fonction définie sur la partie $\mathbb{N}\backslash[\![0\,;n_0-1]\!]$ de $\mathbb{R}$.

Définition. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soient $u=(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $v=(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites réelles. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On désigne par*

- *$|u|$ la suite w définie par : $\quad \forall n \geqslant n_0, \quad w_n = |u_n|$.*
- *$u+v$ la suite w définie par : $\quad \forall n \geqslant n_0, \quad w_n = u_n+v_n$.*
- *αu la suite w définie par : $\quad \forall n \geqslant n_0, \quad w_n = \alpha u_n$.*
- *uv la suite w définie par : $\quad \forall n \geqslant n_0, \quad w_n = u_n v_n$.*

Si pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n \neq 0$, on désigne par

- *$\dfrac{1}{v}$ la suite w définie par : $\quad \forall n \geqslant n_0, \quad w_n = \dfrac{1}{v_n}$.*
- *$\dfrac{u}{v}$ la suite w définie par : $\quad \forall n \geqslant n_0, \quad w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.*

Remarques :

- Pour sommer, multiplier ou diviser deux suites, il faut qu'elles soient définies à partir du même rang. Si ce n'est pas le cas, on peut tout de même réaliser ces opérations mais la suite obtenue sera définie à partir du plus grand des deux rangs initiaux. Par exemple, si $u=(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $v=(v_n)_{n\geqslant 3}$, alors la somme fournit la suite $(u_n+v_n)_{n\geqslant 3}$.
- Si une suite v est à termes non nuls à partir d'un certain rang, alors on peut tout de même définir la suite $\dfrac{1}{v}$ à partir du rang en question.

III Propriétés générales des suites réelles

Dans tout ce paragraphe, n_0 désigne un entier naturel.

1) Suites constantes, stationnaires

Ce premier critère est totalement faux pour une fonction quelconque : si, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x+1)=f(x)$, on ne peut pas du tout conclure que f est constant sur $\mathbb{R}$ (seulement 1-périodique).

Proposition/Définition. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est dite constante si elle vérifie l'une des propositions équivalentes suivantes :*

1. *Pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1}=u_n$.*
2. *Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = a$.*
3. *Pour tous $n \geqslant n_0$ et $p \geqslant n_0$, $u_n = u_p$.*

On dit alors que $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est constante égale à a et on la note $(a)_{n\geqslant n_0}$.

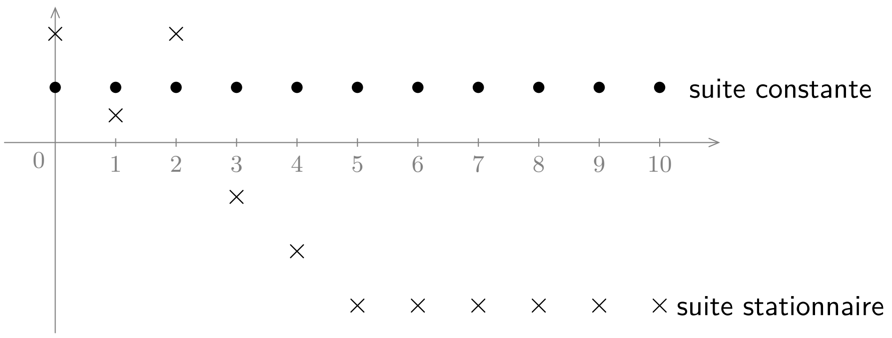
Démonstration. Si le deuxième point est vérifié, le troisième aussi (puisqu'alors, pour tous $n \geqslant n_0$ et $p \geqslant n_0$, $u_p = a = u_n$). Le troisième point entraîne le premier (en prenant $p = n+1$). Montrons que le premier entraîne le second. On pose $a = u_{n_0}$ et on raisonne par récurrence :

- Si $n = n_0$, alors $u_n = u_{n_0} = a$.
- Soit $n \geqslant n_0$. Supposons que $u_n = a$. Alors $u_{n+1} = u_n = a$.

Par récurrence, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = a$. □

Bien sûr une suite constante est stationnaire mais la réciproque est fausse.

Définition. *Une suite réelle $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est dite stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang.*



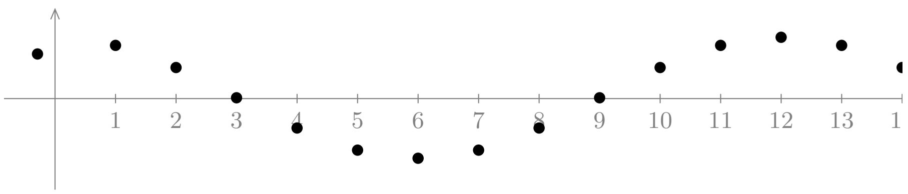
2) Suites périodiques

Pour une suite, les périodes sont des entiers strictement positifs (contrairement à une fonction) !

Définition. *Une suite réelle $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est dite périodique s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+k} = u_n$. On dit alors que $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est k-périodique.*

Exemples :

- *La suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est 2-périodique.*
- *Une suite est périodique de période 1 si et seulement si elle est constante.*
- *La suite de terme général $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$ est 12-périodique car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+12} = u_n$.*



Remarque :

- Si $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est k-périodique, alors $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est $2k$-périodique, $3k$-périodique et, plus généralement, pk-périodique pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
- Si $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est périodique, alors l'ensemble $\{u_n \,|\, n \geqslant n_0\}$ est fini (il contient au plus k éléments).

3) Suites positives, négatives

Dans la pratique, on rencontre aussi souvent l'expression « suite à termes positifs » plutôt que « suite positive ».

Définition. *Une suite réelle $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est dite :*

- *positive (respectivement strictement positive) si, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 0$ (respectivement $u_n > 0$).*
- *négative (respectivement strictement négative) si, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant 0$ (respectivement $u_n < 0$).*

4) Suites monotones

Étudier les variations d'une suite signifie étudier si elle est croissante, décroissante, strictement croissante ou strictement décroissante.

Définition (monotonie). *Une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est dite :*

- *croissante si, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant u_{n+1}$,*
- *décroissante si, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n+1}$,*
- *strictement croissante si, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n < u_{n+1}$,*
- *strictement décroissante si, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n > u_{n+1}$,*
- *monotone si elle est croissante ou décroissante, strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Une suite non croissante n'est pas forcément décroissante ! Une suite peut très bien ne pas être monotone.

Elles sont équivalentes pour les suites mais surtout pas pour les fonctions sur un domaine quelconque de $\mathbb{R}$ (cf. remarque dans le paragraphe IV.2.a de la partie A du chapitre 4).

Remarques :

- La négation de « $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante » est : $\exists n \geqslant n_0,\ u_n > u_{n+1}$. En d'autres termes, une suite n'est pas croissante lorsqu'il existe **un** terme strictement plus grand que son successeur.
- Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante et décroissante si et seulement si elle est constante.
- Ces définitions sont donc différentes (au premier abord) des définitions analogues pour les fonctions. On les préfère car, on le verra, elles sont plus facile à vérifier. Pourtant elles sont bien entendu équivalentes :

Proposition. *Une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est :*

- *croissante si et seulement si, pour tous $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ tel que $n_0\leqslant n\leqslant p$, $u_n\leqslant u_p$.*
- *décroissante si et seulement si, pour tous $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ tel que $n_0\leqslant n\leqslant p$, $u_n\geqslant u_p$.*
- *strictement croissante si et seulement si, pour tous $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ tel que $n_0\leqslant n< p$, $u_n< u_p$.*
- *strictement décroissante si et seulement si, pour tous $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ tel que $n_0\leqslant n< p$, $u_n> u_p$.*

Démonstration. Le sens indirect est immédiat en prenant $p = n+1$. Le sens direct se montre par récurrence (que je vous laisse rédiger). □

Proposition. *Une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ à termes* ***strictement positifs*** *est :*

- *croissante si et seulement si, pour tour $n\geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1$.*
- *décroissante si et seulement si, pour tour $n\geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant 1$.*
- *strictement croissante si et seulement si, pour tour $n\geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}> 1$.*
- *strictement décroissante si et seulement si, pour tour $n\geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}< 1$.*

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Méthodes pour étudier les variations d'une suite. Pour déterminer les variations d'une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant n_0}$, on peut :

- étudier le signe de $u_{n+1}-u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ (c'est la méthode la plus classique et la plus sûre).
- comparer 1 avec $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ pour tout $n\geqslant n_0$, lorsque tous les termes de la suite sont **strictement positifs**,
- étudier le sens de variation de la fonction f, lorsque la suite est donnée explicitement sous la forme $u_n = f(n)$ pour tout $n\geqslant n_0$.

Le critère avec le quotient est utile quand on manipule des factorielles, des puissances, des produits : toute quantité qui se simplifie bien quand on fait des quotients.

Exemples :

- *Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n^2 + 7u_n + 5.$$

- *Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n}e^{-n}$.*

Pour dériver, on est obligé de repasser par une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ ici. Il est formellement interdit de dériver une suite (simplement car ça n'a aucun sens).

La méthode d'étude de fonctions n'est valable que dans ce cas. Il ne faut pas la confondre avec le cas d'une suite définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où (on le verra dans la partie C), les variations de f ne dictent pas (à elles seules du moins) celles de la suite.

Proposition.

- *La somme de deux suites croissantes est croissante. De plus, si l'une d'elle est strictement croissante, alors la somme l'est aussi.*
- *La somme de deux suites décroissantes est décroissante. De plus, si l'une d'elle est strictement décroissante, alors la somme l'est aussi.*
- *Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle.*
  - ⋆ *Si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(\lambda u_n)_{n\geqslant 0}$ ont la même monotonie.*
  - ⋆ *Si $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(\lambda u_n)_{n\geqslant 0}$ sont de monotonie contraire.*

On ne peut rien affirmer sur une différence, un produit ou un quotient de suites monotones, ni sur la somme de deux suites de monotonies différentes.

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

5) Suites majorées, minorées, bornées

Définition. *Une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est dite :*

- *majorée si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $nn \geqslant n_0$, $u_n \leqslant M$.*
- *minorée si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant m$.*
- *bornée si elle est à la fois majorée et minorée.*

Attention aux quantificateurs. C'est :

$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant M$

et non pas

$\forall n \geqslant n_0, \exists M \in \mathbb{R}, u_n \leqslant M$

(ce qui est toujours vrai en prenant $M = u_n$)...

Remarque : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (respectivement minorée, bornée) si et seulement si la partie $A = \{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ est majorée (respectivement minorée, bornée). Ainsi :

... Il faut impérativement avoir en tête qu'un majorant ne peut pas dépendre de n.

En effet, si c'était le cas, il existerait $M \geqslant 1$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2+1 \leqslant M$ et donc $n \leqslant \sqrt{M-1}$, ce qui est absurde puisque $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.

Proposition. *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.*

Exemples :

- *La suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par 1.*
- *La suite $(n^2+1)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1 mais n'est pas majorée*
- *Une suite périodique (même à partir d'un certain rang) ne prend qu'un nombre fini de valeurs donc elle est bornée. En particulier, une suite stationnaire est bornée.*

Remarque : On parlera aussi de la borne supérieure (respectivement inférieure) d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme la borne supérieure (respectivement inférieure) de la partie $\{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$ sous réserve d'existence. Mais gardons ce concept pour la partie B puisqu'il jouera un rôle dans le théorème le plus important de ce chapitre : le théorème de la limite monotone.

IV Extension aux suites complexes

On peut toujours la faire démarrer à un terme initial de rang n_0 entier quelconque.

Définition. *On appelle suite complexe toute famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ indexée par $\mathbb{N}$. On note $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites complexes.*

A partir de là, toutes les définitions des paragraphes I et II restent valables en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ et « réel » par « complexe ». Remarquons que :

- Si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite complexe, alors les suites $(\mathrm{Re}(u_n))_{n\geqslant n_0}$ et $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\geqslant n_0}$ sont des suites réelles. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathrm{Re}(u_n) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(u_n)$.
- Puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, toute suite réelle est une suite complexe.

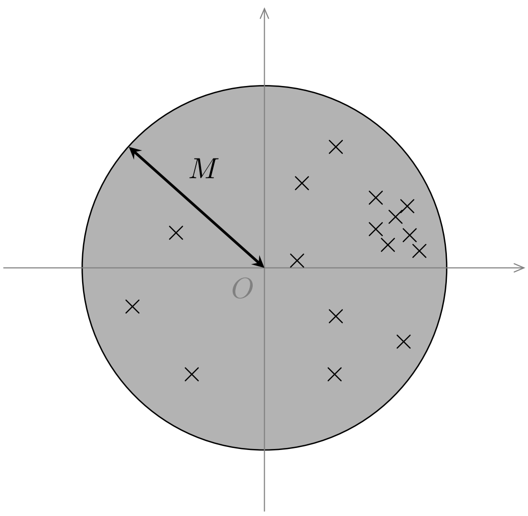
Les notions de suite constante, stationnaire et périodiques du paragraphe III restent valables pour des suites complexes.

En revanche les notions de suites positives, négatives, monotones, majorées ou minorées n'ont aucun sens puisqu'il n'y a pas de relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{C}$. Seule la notion de suite bornée peut être étendue de la façon suivante :

Ici $|u_n|$ est le module de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$

Définition. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Une suite complexe $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est dite bornée si la suite réelle $(|u_n|)_{n\geqslant n_0}$ est majorée, c'est-à-dire si il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant M$.*

Remarque : Géométriquement, une suite complexe est une suite de points du plan, et elle est bornée si les termes de la suite sont compris dans un disque (centré en 0).



V Exemples usuels

1) Suite définie par une relation de récurrence additive ou multiplicative

Les résultats de ce paragraphe ne sont pas à connaître par cœur mais il faut savoir les retrouver.

a) Le cas additif

Une erreur grave est de penser qu'il s'agit d'une suite arithmétique de raison a_n (cf. paragraphe V.2) et de conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + n a_n.$$

C'est une erreur grave ! **La raison d'une suite arithmétique est constante**... ce qui n'est pas le cas de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a priori.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe (définie explicitement si possible). On s'intéresse à une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + a_n.$$

Ce type de suite est très classique et il faut savoir donner son terme général. Il y a plusieurs méthodes :

- Dire que $u_1 = u_0 + a_0$, puis $u_2 = u_1 + a_1 = u_0 + a_0 + a_1$ puis ensuite $u_3 = u_2 + a_2 = u_0 + a_0 + a_1 + a_2$, etc. Par récurrence immédiate (à montrer si c'est la première d'un sujet), on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k.$$

- Remarquer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} - u_k = a_k$ et utiliser une somme télescopique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k.$$

Plus généralement, si les suites ne sont définies qu'à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}$, alors, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$u_n = u_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} a_k.$$

Exemple : *Supposons que $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3^n$. Alors :*

b) Le cas multiplicatif

Une erreur grave est de penser qu'il s'agit d'une suite géométrique de raison a_n (cf. paragraphe V.3) et de conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0\, a_n^n.$$

C'est une erreur grave ! **La raison d'une suite géométrique est constante**... ce qui n'est pas le cas de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a priori.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe (définie explicitement si possible). On s'intéresse à une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n a_n.$$

Ce type de suite est très classique et il faut savoir donner son terme général. Il y a plusieurs méthodes :

- Dire que $u_1 = u_0 a_0$, puis $u_2 = u_1 a_1 = u_0 a_0 a_1$ puis $u_3 = u_2 a_2 = u_0 a_0 a_1 a_2$, etc. Par récurrence immédiate (à montrer si c'est la première d'un sujet), on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = u_0 \prod_{k=0}^{n-1} a_k.$$

- Remarquer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} = a_k$ et utiliser un produit télescopique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{u_n}{u_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \prod_{k=0}^{n-1} a_k.$$

Cette manipulation n'est possible que tant que les termes de la suite sont non nuls. Si $u_0 \neq 0$ et si $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors, par récurrence immédiate, les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont non nuls.

Plus généralement, si les suites ne sont définies qu'à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}$, alors, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$u_n = u_{n_0} \prod_{k=n_0}^{n-1} a_k.$$

C'est le classique produit des impairs de 1 à $2n-1$. On multiplie (et donc divise) par le produit des entiers pairs de 2 à $2n$ (qui vaut $2^n n!$) pour obtenir $(2n)!$ au numérateur.

Exemple : *Supposons que $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (2n+1)u_n$. Alors :*

2) Suites arithmétiques

Définition. *Une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique si il existe un complexe r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.*
Le complexe r est appelé la raison de la suite et u_0 le terme initial.

Il découle du paragraphe V.1.a (en prenant $a_n = r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) que :

On déduit de cette expression qu'une suite arithmétique est une suite réelle si et seulement si son terme initial **et** sa raison sont des réels.

Proposition. *Soit $r \in \mathbb{C}$. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r si et seulement si :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = u_0 + rn.$$

Remarques :

- Si la suite commence au rang $n_0 \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad u_n = u_{n_0} + r(n - n_0).$$

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r \in \mathbb{C}$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_0 + r\sum_{k=0}^{n} k = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}.$$

Ces propriétés de monotonie n'ont aucun sens pour une suite complexe ! On ne le dira jamais assez.

Proposition. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **réelle** qui est arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$.*

- *Si $r > 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.*
- *Si $r = 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.*
- *Si $r < 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.*

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

3) Suites géométriques

Définition. *Une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique si il existe un complexe q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$.*
Le complexe q est appelé la raison de la suite et u_0 le terme initial

Il découle du paragraphe V.1.b (en prenant $a_n = q$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) que :

On déduit de cette expression qu'une suite géométrique est une suite réelle si et seulement si son terme initial **et** sa raison sont des réels.

Proposition. *Soit $q \in \mathbb{C}$. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q si et seulement si :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = u_0 q^n.$$

Remarques :

- Si la suite commence au rang $n_0 \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}.$$

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes tous non nuls, elle est géométrique si et seulement si la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Un moyen simple de prouver qu'une suite n'est pas géométrique est d'exhiber deux entiers n_0 et n_1 tels que $\frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \neq \frac{u_{n_1+1}}{u_{n_1}}$.

En général, il suffit d'essayer avec $n_0 = 0$ et $n_1 = 1$.

Par exemple, la suite de terme général $2^n + 3^n$ n'est pas géométrique. En effet,

$$\frac{2^1+3^1}{2^0+3^0} = \frac{5}{2} \neq \frac{13}{5} = \frac{2^2+3^2}{2^1+3^1}.$$

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \sum_{k=0}^{n} q_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q}.$$

Ces propriétés de monotonie n'ont aucun sens pour une suite complexe ! On ne le dira jamais assez.

Proposition. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **réelle** qui est géométrique de raison $q \in \mathbb{R}^*$.*

- *Si $q > 1$ et $u_0 > 0$ (respectivement $u_0 < 0$), alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante (respectivement décroissante).*
- *Si $q = 1$ ou $u_0 = 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.*
- *Si $q \in \,]0\,;1[$ et $u_0 > 0$ (respectivement $u_0 < 0$), alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante (respectivement croissante).*
- *Si $u_0 \neq 0$ et $q \in \mathbb{R}_-^*$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.*

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

4) Suites arithmético-géométriques

Si $a = 1$, alors il s'agit d'une suite arithmétique de raison b. Si $b = 0$, alors il s'agit d'une suite géométrique de raison a.

Définition. *Une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmético-géométrique si il existe deux complexes a et b tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.*

Supposons que $a \neq 1$ et $b \neq 0$. On dit que l'équation $x = ax + b$, d'inconnue $x \in \mathbb{C}$ est l'équation caractéristique de cette suite. Elle admet $c = \dfrac{b}{1-a}$ pour unique solution (rappelons qu'on a supposé $a \neq 1$). Soit $n \in \mathbb{N}$. On a les deux égalités suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= au_n + b \\ c &= ac + b \end{cases}$$

Dès lors, en faisant la différence : $u_{n+1} - c = a(u_n - c)$, c'est-à-dire que la suite $(u_n - c)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - c = a^n(u_0 - c)$. Nous en déduisons la proposition suivante :

On déduit de cette expression que cette suite arithmético-géométrique est une suite réelle si et seulement si a, b et u_0 sont des réels.

Proposition. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle qu'il existe deux complexes a et b avec $a \neq 1$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$. Alors*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = a^n\left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}.$$

Il n'est pas indispensable de connaître la proposition ci-dessus par cœur : il faut absolument savoir la redémontrer dans un cas particulier. L'idée essentielle derrière la preuve est de déterminer un point fixe de la fonction de récurrence (c'est-à-dire la solution de $x = ax + b$).

Exemple : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -4u_n + 1$.*

5) Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

a) Définition et exemples

Si $b = 0$, alors $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a. Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n = a^{n-1}u_1$.

Définition. *Une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants si il existe deux complexes a et b tels que $b \neq 0$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

a et b ne dépendent pas de n ! On dit donc parfois qu'une telle suite est récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, mais nous ne rencontrerons que des suites de ce type, donc nous ne ferons pas la distinction dans la suite.

Exemples :

- *La suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$
- *Cependant, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = n \times u_{n+1} - n^2 \times u_n$$
n'est pas une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

b) Expression explicite dans le cas complexe

Dans toute la suite, donnons-nous $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}^*$. Notons $E_{a,b}$ l'ensemble des suites complexes vérifiant la relation de récurrence de la définition. Cherchons des éléments particuliers de $E_{a,b}$. Regardons d'abord parmi les suites géométriques. Si $r \in \mathbb{C}^*$ alors $(r^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}$ si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 = r^{n+2} - ar^{n+1} - br^n = r^n(r^2 - ar - b),$$

si et seulement si $r^2 = ar + b$.

Elle est équivalente à

$$z^2 - az - b = 0.$$

C'est une équation polynomial du second degré et son discriminant est $\Delta = a^2 + 4b$.

Définition. *On dit que l'équation $z^2 = az + b$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, est l'équation caractéristique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Comme dans la résolution des équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants, l'ensemble $E_{a,b}$ est constitué de l'ensemble des combinaisons linéaires des suites $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec r solution de l'équation caractéristique :

Attention à l'ordre des quantificateurs : c'est

$$\exists!(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}$$

et non

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists!(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$$

(λ et μ ne peuvent pas dépendre de n).

Théorème (Expression explicite dans le cas complexe). *Notons Δ le discriminant de l'équation caractéristique (E).*

- *Si $\Delta \neq 0$, alors (E) admet deux solutions complexes distinctes r_1 et r_2 et il existe deux complexes λ et μ uniques tels que*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$
- *Si $\Delta = 0$, alors (E) admet une solution complexe double $r_0 = \frac{a}{2}$ et il existe deux complexes λ et μ uniques tels que*
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = (\lambda + \mu n)r_0^n.$$

Nous pourrions la montrer par récurrence (je vous laisse le faire en exercice si vous êtes motivés) mais c'est fastidieux et peu intéressant. Surtout cela ne permettra pas de bien comprendre pourquoi les suites de $E_{a,b}$ ont cette forme. Nous verrons une autre preuve plus intéressante et élégante dans le chapitre 33.

Nous dirons dans le chapitre 33 que $E_{a,b}$ est un espace vectoriel de dimension 2.

Remarque : Dans la pratique, on détermine λ et μ de façon unique à l'aide de u_0 et u_1.

- Dans le cas où $\Delta > 0$, on a $\lambda + \mu = u_0$ et $\lambda r_1 + \mu r_2 = u_1$.

On voit que λ et μ sont bien uniquement déterminés : cela prouve l'unicité du théorème précédent.

Bien sûr, dans un exemple pratique, on voit directement que $r_0 \neq 0$.

On résout ce système et, comme $r_1 \neq r_2$, on un unique couple de solutions :

$$\lambda = \frac{r_2 u_0 - u_1}{r_2 - r_1} \qquad \text{et} \qquad \mu = \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1}$$

(possible puisque $r_1 \neq r_2$).

- Dans le cas où $\Delta = 0$, on a $\lambda = u_0$ et $(\lambda + \mu) r_0 = u_1$. Mais on a $b \neq 0$ et $\Delta = 0$ donc $a^2 = \Delta - 4b \neq 0$ et donc $r_0 = \frac{a}{2} \neq 0$. On en déduit que λ et μ sont uniquement déterminés par :
$$\lambda = u_0 \qquad \text{et} \qquad \mu = \frac{u_1}{r_0} - u_0.$$

Exemples :

- *<u>Suite de Fibonacci.</u> Calculons le terme général de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.*

- *Calculons le terme général de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1$, $x_1 = -2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$.*

c) Expression explicite dans le cas réel

Supposons à présent que u_0, u_1, a et b sont des réels, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réelle (par récurrence immédiate).

- Si $\Delta \geqslant 0$, alors les solutions r_0, r_1 et r_2 sont des réels donc λ et μ aussi (cf. expression dans la remarque précédente). L'expression de u_n en fonction de n du théorème ci-dessus ne fait intervenir que des réels, ce qui est satisfaisant.
- Si $\Delta < 0$, les solutions r_1 et r_2 sont des complexes conjuguées non réels si bien λ et μ peuvent être des complexes non réels. On se retrouve donc avec une expression de u_n en fonction de n qui fait intervenir des complexes non réels alors que la suite est réelle. Examinons cela de plus près.
  - ⋆ Notons $\alpha = r_1$ de sorte que $r_2 = \overline{\alpha}$.
  - ⋆ Le théorème garantit l'existence de λ et μ complexes tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda\alpha^n + \mu\overline{\alpha}^n$. Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}$ donc
  $$\lambda\alpha^n + \mu\overline{\alpha}^n = u_n = \overline{u_n} = \overline{\lambda}\overline{\alpha}^n + \overline{\mu}\alpha^n.$$

★ L'unicité des coefficients λ et μ dans le théorème assure alors que $\lambda = \overline{\mu}$. Notons alors $\lambda = x - \mathrm{i}y$ et $\mu = x + \mathrm{i}y$ avec x et y des réels.

★ Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n &= (x - \mathrm{i}y)\alpha^n + (x + \mathrm{i}y)\overline{\alpha}^n \\ &= x(\alpha^n + \overline{\alpha}^n) - \mathrm{i}y(\alpha^n - \overline{\alpha}^n) \\ &= x \times 2\,\mathrm{Re}(\alpha^n) - \mathrm{i}y \times 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\alpha^n) \\ &= 2x\,\mathrm{Re}(\alpha^n) + 2y\,\mathrm{Im}(\alpha^n). \end{aligned}$$

Notons $\lambda' = 2x \in \mathbb{R}$ et $\mu' = 2y \in \mathbb{R}$. Ces deux réels sont uniquement déterminés puisque λ et μ le sont (donc x et y aussi).

★ Puisque α n'est pas un réel, $\alpha \neq 0$, donc il existe $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$ tel que $\alpha = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ si bien que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Re}(\alpha^n) = \rho^n\cos(n\theta)$ et $\mathrm{Im}(\alpha^n) = \rho^n\sin(n\theta)$. On conclut qu'il existe λ' et μ' (toujours uniques) réels tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \rho^n(\lambda'\cos(n\theta) + \mu'\sin(n\theta)).$$

On en déduit le théorème suivant :

... toujours avec l'hypothèse $b \neq 0$.

Théorème (Expression explicite dans le cas réel). *Supposons que u_0, u_1, a et b sont des réels. Notons Δ le discriminant de l'équation caractéristique (E).*

- *Si $\Delta > 0$, alors (E) admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 et il existe deux réels λ et μ uniques tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

- *Si $\Delta = 0$, alors (E) admet une solution réelle double $r_0 = \frac{a}{2}$ et il existe deux réels λ et μ uniques tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = (\lambda + \mu n)r_0^n.$$

- *Si $\Delta < 0$, alors (E) admet deux solutions complexes non réelles et conjuguées $\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ et il existe deux réels λ et μ uniques tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \rho^n\big(\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)\big).$$

Sous entendu avec $\rho \neq 0$ et $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.

Remarque : Dans le cas où $\Delta < 0$, on a $\lambda = u_0$ et $\rho\big(\lambda\cos(\theta) + \mu\sin(\theta)\big) = u_1$. Comme $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, on a $\sin(\theta) \neq 0$ et donc λ et μ sont uniquement déterminés par :

$$\lambda = u_0 \qquad \text{et} \qquad \mu = \frac{u_1 - u_0\rho\cos(\theta)}{\rho\sin(\theta)}.$$

Exemple : *Calculons le terme général de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $y_0 = 0$, $y_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+2} = 3y_{n+1} - 3y_n$.*