Chapitre 4

Fonctions

Partie A : Résultats généraux

Nous ne montrerons pas encore tous les résultats (surtout ceux de la partie B) à ce stade de l'année.

Ce long chapitre a pour but de rappeler et d'approfondir la notion de fonctions réelles de la variable réelle, vue au lycée. L'objectif est avant tout de bien maîtriser les fonctions usuelles et les études de fonctions, qui sont des outils indispensables pour la suite du programme.

Dans toute ce chapitre, E et F désignent des parties non vides de $\mathbb{R}$.

I Fonctions, images, antécédents

On se contente d'une définition intuitive de la notion de fonction.

Définition. *Une fonction ou une application f de E dans F (ou à valeurs dans F) est la donnée pour chaque réel x de E d'un unique réel de F, appelé image de x par f et noté $f(x)$.*

L'ensemble E est appelé ensemble (ou domaine) de définition de f et noté D_f. L'ensemble F est appelée ensemble (ou domaine) d'arrivée de f.

On commence **TOUJOURS** par déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

Exemples :

- *On appelle fonction carré (et non pas fonction carrée !) la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et qui à tout réel x associe son carré x^2.*
- *On appelle fonction inverse la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ et qui à tout réel x associe son inverse $1/x$.*

On peut dire par exemple « Tout point du domaine de définition admet une seule image ».

Remarques :

- Dans le vocabulaire des fonctions, on parle souvent de « points » pour désigner les réels.
- Si f est une fonction de E dans F, on dit que l'on évalue f en $x \in E$, lorsque l'on calcule $f(x)$.
- On dit que f s'annule en un point $x \in E$ si $f(x) = 0$. On dit que f s'annule sur E s'il existe un point de E en lequel elle s'annule.

Définition.

- *On écrit « Soit $f : E \longrightarrow F$ » pour signifier « Soit f une fonction de E dans F ».*
- *Si on connaît, pour chaque $x \in E$, une expression de l'image de x par f, on note*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \text{une expression de l'image de } x \text{ par } f \end{array} \right.$$

- *On note $\mathscr{F}(E,F)$ ou E^F l'ensemble des fonctions de E dans F.*

On peut condenser la notation par

$$f : x \in E \longmapsto \cdots$$

Lorsque le domaine d'arrivée n'est pas précisé, il est sous-entendu que c'est $\mathbb{R}$ tout entier (dans ce chapitre). Lorsque l'on parle d'une fonction définie sur E, on sous entend qu'elle va de E dans $\mathbb{R}$.

Exemples :

- *La fonction carré se note* $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ *ou* $x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2$.
- *La fonction inverse se note* $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$ *ou* $x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

Remarques :

- Parfois on se contente de donner la fonction f sous la forme
$$f : x \longmapsto \begin{array}{c}\text{une expression de}\\ \text{l'image de } x \text{ par } f\end{array}.$$
  - ⋆ Si on demande de justifier que f est définie sur une partie E de f, il s'agit de montrer que, pour tout $x \in E$, l'expression définissant le nombre $f(x)$ existe.
  - ⋆ Si on demande de déterminer le domaine de définition d'une fonction f, il s'agit de déterminer l'ensemble D_f des réels x tels que l'expression définissant le nombre $f(x)$ existe.

Nous étudierons de façon plus abstraite les fonctions (on parlera plutôt d'applications) entre deux ensembles quelconques dans le chapitre 15.

- Dans l'expression $x \longmapsto f(x)$, la variable x est muette. Ainsi :
  - ⋆ On peut remplacer x par une autre variable non utilisée et écrire ainsi $t \longmapsto f(t)$ ou $u \longmapsto f(u)$ ou $\text{truc} \longmapsto f(\text{truc})$, etc.
  - ⋆ On ne doit pas introduire x avant de parler de $x \longmapsto f(x)$. Mais si on parle de $f(x)$, alors il faut avoir introduit x avant.
- ⚠ $f(x)$ est un nombre ! Ainsi :
  - ⋆ On n'écrit **JAMAIS** « Soit $f(x)$ la fonction ... » mais « Soit f la fonction (qui à tout $x \in A$ associe $f(x)$) ».
  - ⋆ On ne parle pas de la fonction $f(x)$ (donc jamais de la fonction e^x, $\ln(x)$, x^2 par exemple) tout simplement car ce n'est pas une fonction. On parle plutôt de la fonction f (donc plutôt de $\exp$, $\ln$, $x \longmapsto x^2$ respectivement).
  - ⋆ Pour justifier que la fonction f est bien définie sur A, on écrit au choix :
    - ⋆ (le nombre) $f(x)$ est défini si et seulement si $x \in E$,
    - ⋆ f est définie sur E,

⚠ On n'écrit pas pas un mélange des deux phrases (du style « f est définie si et seulement si $x \in E$ » ... qu'est-ce que x pour f puisque la variable est muette ?)

- En disant que f est une fonction de E dans F, on dit que f prend ses valeurs dans F mais pas que toutes les réels de F sont atteints par la fonction. Pour la fonction carré (où l'on sait que toutes les images sont positives), on aurait pu dire qu'elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et la noter
$$\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+\\ x & \longmapsto & x^2\end{array}\right.,$$
pour être plus précis mais cette notation ne dit toujours pas que tous les réels positifs sont atteints. C'est la raison d'être de la notation suivante :

⚠ La fonction carré aussi à valeurs dans $]-\pi\,;+\infty[$....

Définition (ensemble image). *Soit $f : E \longrightarrow F$. Soit A une partie de E. On appelle image de A par f et on note $\{\, f(x) \mid x \in A \,\}$ ou encore $f(A)$ l'ensemble*
$$\{\, y \in F \mid \exists x \in A,\ y = f(x) \,\},$$
des valeurs prises par $f(x)$ lorsque x parcourt A.

Exemples :

Pour montrer rigoureusement ces égalités, il faudrait procéder par double inclusion. Laissons-cela de côté pour le moment. En général cela découle d'une étude de fonctions et c'est tout le but de ce chapitre.

Définition (antécédent). *Soit $f : E \longrightarrow F$. Soit $y \in F$.*

- *On dit que y admet un antécédent par f si il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ (on dit aussi que y est atteint par f).*
- *Soit $x \in E$. Si $y = f(x)$, on dit que x est un antécédent de y par f.*

⚠ Un réel de F peut admettre plusieurs antécédents (ou un seul ou aucun) par f mais tout réel de E admet une et une seule image par f.

Exemples :

Définition (fonctions égales). *Deux fonction f et g définies sur E sont dites égales si, pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.*

Je vous laisse démontrer que ces deux assertions sont bien équivalent. C'est vraiment immédiat !

Définition (fonction constante). *On dit que $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est constante sur E si elle satisfait l'une de deux assertions équivalentes suivantes :*

- *Pour tout $(x, y) \in E^2$, $f(x) = f(y)$.*
- *Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in E$, $f(x) = c$.*

Le cas échéant, on dit que f est la fonction constante égale à c sur E.

Si $c = 0$, on dit que f est la fonction (identiquement) nulle sur E.

Ne pas confondre non plus « f est nulle » et « f s'annule ».

⚠ Attention aux quantificateurs :

- f est non (identiquement) nulle sur A si **il existe** $x \in A$ tel que $f(x) \neq 0$.
- On dit que f ne s'annule pas sur A si, **pour tout** $x \in A$, $f(x) \neq 0$.

II Courbe représentative d'une fonction

Nous allons souvent « identifier » un point du plan avec le couple de ses coordonnées dans ce repère, c'est-à-dire identifier le plan avec $\mathbb{R}^2$ (et, par exemple, identifier O avec $(0, 0)$).

Nous munissons le plan d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Rappelons que, si M est un point du plan de coordonnées (x, y), on dit que x est l'abscisse de M et y l'ordonnée de M.

1) Équations d'un ensemble de points du plan

Encore en d'autres termes, un point appartient à un certain ensemble (une droite, un cercle etc.) si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de cet ensemble.

Définition. *Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de points du plan. Soit (E) une équation à deux inconnues notées x et y. On dit que (E) est une équation de $\mathcal{C}$ si $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points dont les coordonnées forment un couple de solutions de (E). En d'autres termes, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,*

$$M(x, y) \in \mathcal{C} \iff x \text{ et } y \text{ sont solutions de } (E).$$

Exemples :

- *Si $a \in \mathbb{R}$, la droite verticale d'abscisse a a pour équation $x = a$.*
- *Si $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, alors le cercle de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rayon r a pour équation :*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

- *Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la droite (non verticale) d'ordonnée à l'origine b et de coefficient directeur a admet pour équation $y = ax + b$.*

⚠ Ne pas confondre l'ensemble $\mathcal{C}$ et l'équation (E).

*Par exemple, parler de la droite $y = x$ n'a aucun sens ! On parlera de la droite **d'équation** $y = x$.*

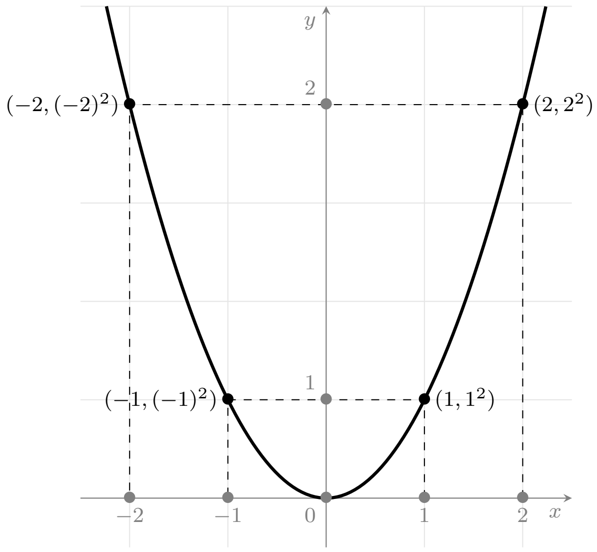
2) Courbe représentative d'une fonction

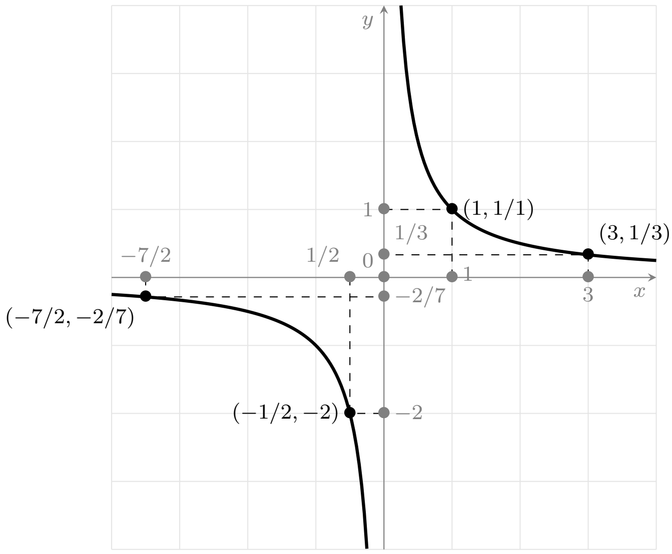
Avec la notion introduite dans le paragraphe précédent, $\mathcal{C}_f$ est l'ensemble des points du plan dont $y = f(x)$ est une équation.

Définition (courbe représentative). *Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. On appelle courbe représentative (ou graphe) de f, et on note $\mathcal{C}_f$, l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont $(x, f(x))$ lorsque x parcourt E. En d'autres termes, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,*

$$M(x, y) \in \mathcal{C}_f \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = f(x).$$

Exemples : *Ci-dessous à gauche la courbe représentative de la fonction carré et à droite celle de la fonction inverse.*





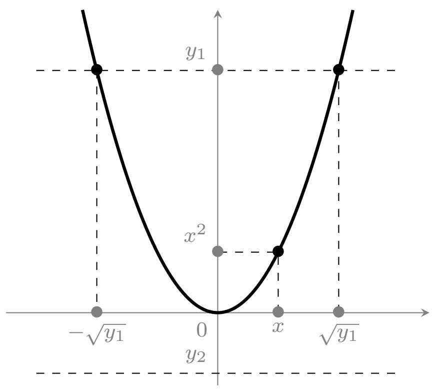
⚠ Disons le tout de suite : il est capital de savoir tracer des courbes à la suite d'une étude de fonctions. Il est important de savoir lire une courbe. Mais une observation sur une courbe représentative n'est **jamais** une preuve.

⚠ Le cercle de centre Ω et de rayon r (cf. paragraphe ci-dessus) n'est pas la courbe représentative d'une fonction (cf. paragraphe suivante) puisque les points de coordonnées $(x_0, y_0 + r)$ et $(x_0, y_0 - r)$ appartiennent au cercle et ont la même abscisse.

Remarques :

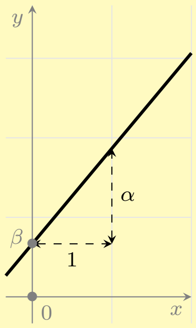
- Géométriquement, on trouve l'image d'un point $x \in E$ de la façon suivante : on trace la droite verticale d'abscisse x et on regarde en quel point elle coupe le graphe. L'ordonnée du point d'intersection sera $f(x)$.
  ⚠ Cette droite coupe le graphe une unique fois puisque x admet un unique image.
- Géométriquement, on trouve les (éventuels) antécédent par f d'un réel y de la façon suivante : on trace la droite horizontale d'ordonnée y. Les abscisses des éventuels points d'intersection avec le graphe sont les antécédents de y. En particulier, si cette droite n'intersecte pas le graphe, alors y n'admet aucun antécédent par f.

  Reprenons le graphe de la fonction carré :



Géométriquement, on retrouve le fait que y_2 (strictement négatif) n'a aucun antécédent par la fonction carré et que y_1 a, lui, deux antécédents, qui sont $\pm\sqrt{y_1}$.

3) Droites et fonctions affines



En particulier une droite parallèle à l'axe des abscisses (on dit qu'elle est horizontale) est la courbe représentative d'une fonction constante (i.e. une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que tous les réels ont la même image).

Définition (fonction affine). *Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite affine si il existe deux réels α et β tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha x + \beta$.*

- Si il existe deux réels α et β tels que $f : x \longmapsto \alpha x + \beta$, alors $\mathcal{C}_f$ est la droite du plan de coefficient directeur α et d'ordonnée à l'origine β (c'est-à-dire $\beta = f(0)$). Si on se donne deux réels a et b distincts quelconques, alors on a
- Réciproquement, si (D) est une droite du plan qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, alors (D) est la courbe représentative d'une fonction affine f. On dit que $y = f(x)$ est l'équation de la droite (D).
  - ⋆ Si on sait que (D) a pour coefficient directeur α et passe par le point A de coordonnées (x_A, y_A), alors $f : x \longmapsto \alpha\,(x - x_A) + y_A$.
  - ⋆ Si on sait que (D) passe par les points A et B de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B), alors

⚠ Une droite verticale (parallèle à l'axe des ordonnées) n'est pas la courbe représentative d'une fonction. En effet une telle fonction serait définie en un point qui admettrait une infinité d'images (et, par définition d'une fonction, un point a une unique image).

III Opérations sur les fonctions

1) Restriction et prolongements

En bref, on regarde juste les images des éléments de A par f. C'est avant tout une notation : dans la pratique, on évoque les propriétés de f sur A au lieu de celles de $f\big|_A$, c'est pareil.

Définition (restriction). *Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit A une partie non vide de E. On appelle restriction de f à A la fonction notée $f\big|_A$ et définie sur A par :*

$$\forall x \in A, \qquad f\big|_A(x) = f(x).$$

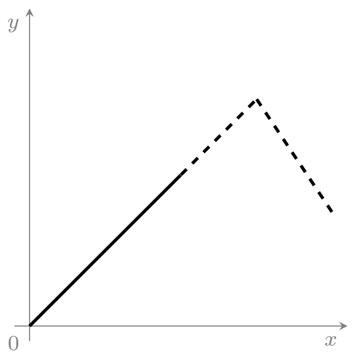
Définition (prolongement). *Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit A une partie non vide de E. On appelle prolongement de f à E toute fonction g de E dans $\mathbb{R}$ telle que $g\big|_A = f$, c'est-à-dire :*

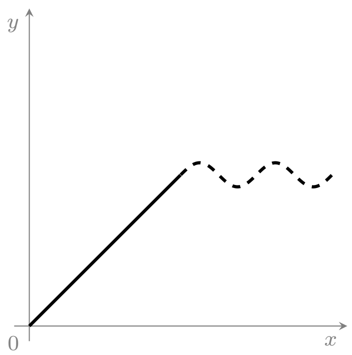
$$\forall x \in A, \qquad g(x) = f(x).$$

Nous ferrons surtout des prolongements dans la chapitre 21. Souvent on continue de noter f la fonction f une fois qu'on l'a prolongée (à condition de le dire explicitement bien sûr).

⚠ Il existe une infinité de façons de prolonger une fonction :

Si on prend la fonction $f : x \longmapsto x$ sur $[0\,;1]$, alors voici les graphes de deux prolongement différents de f à $[0\,;2]$:





2) Opérations algébriques sur les fonctions

On sait additionner, soustraire, multiplier et diviser des réels (à condition de ne pas diviser par 0 ! !). Définissons ces opérations pour les fonctions :

Autrement dit, pour tout $x \in E$,

$$|f|(x) = |f(x)|$$
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

et, lorsque $g(x) \neq 0$,

$$\frac{1}{g}(x) = \frac{1}{g(x)}$$
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Définition (opérations algébriques). *Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit les fonctions $|f|$, $f+g$, αf et fg par*

$$|f| : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |f(x)| \end{array} \right. , \qquad f+g : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array} \right. ,$$

$$\alpha f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \alpha f(x) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad fg : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)g(x) \end{array} \right.$$

Si, pour tout $x \in E$, $g(x) \neq 0$, alors on définit les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ par

$$\frac{1}{g} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{g(x)} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \frac{f}{g} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array} \right.$$

Dire qu'une fonction est définie sur un domaine par somme/soustraction/produit de fonctions qui le sont est autorisé. En revanche dire qu'une fonction est définie comme quotients de fonctions qui le sont est faux : il faut absolument préciser que la fonction au dénominateur ne s'annule pas.

Exemple : *Soient $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2$ et $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto 1 - x$. Alors :*

Remarque : Un peu de vocabulaire : si $n \in \mathbb{N}^*$, si $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions définies sur E et si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des réels, on dit que la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n$ est une combinaison linéaire de $f_1, \dots, f_n$. Nous utiliserons ce terme principalement dans le chapitre 28.

Ces opérations sur les fonctions héritent des propriétés des opérations algébriques sur les réels (associativité, commutativité, etc.). Nous n'allons pas tout détailler ici car c'est très intuitif. Nous y reviendrons dans le chapitre 28.

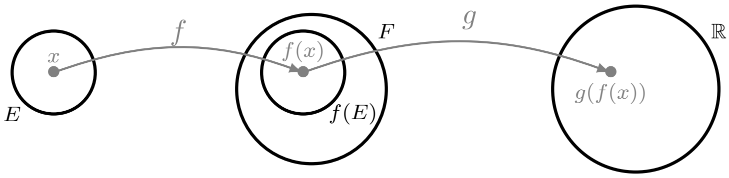
3) Composition de fonctions

Définition (composition). *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow \mathbb{R}$. On définit la composée de f par g et on note $g \circ f$ la fonction*

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array} \right.$$

En d'autres termes :

$$\forall x \in E, \qquad g \circ f(x) = g(f(x)).$$



$f(E) \subset F$ signifie que, pour tout $x \in E$, $f(x) \in F$.

Remarque : Si on sait seulement que $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, il faut alors vérifier que $f(E) \subset F$ (F étant le domaine de définition de g) pour pouvoir définir $g \circ f$.

Exemple : *Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 + 1$ et $g : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \dfrac{1}{x}$.*

L'important est que toutes les opérations successives soient bien définies. Pour quelles valeurs de x, peut-on considérer $f(x)$ puis $g(f(x))$ puis $h(g(f(x)))$, etc. ?

Remarque : Dans la pratique, il faut savoir reconnaître qu'une fonction est la composée de plusieurs fonctions puis savoir déterminer son domaine de définition. Disons que l'on rencontre une fonction φ.

- Si on reconnaît que $\varphi = g \circ f$ avec $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, alors

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \,|\, f(x) \in D_g\}.$$

- Si on reconnaît que $\varphi = h \circ g \circ f$ avec en plus $h : D_h \longrightarrow \mathbb{R}$, alors

$$D_{h \circ g \circ f} = \{x \in D_f \,|\, f(x) \in D_g \text{ et } g(f(x)) \in D_h\}.$$

Exemple : *Soit* $\varphi : x \longmapsto \pi + \sqrt{\dfrac{1}{x^2} - 1}$. *Déterminons* D_φ.

À part quand on utilise la fonction tangente (ce qui est assez rare), les trois contraintes pour définir une fonction sont :
- un dénominateur ne peut pas s'annuler.
- une quantité dans un $\ln$ doit être strictement positive.
- une quantité dans une racine carrée doit être positive ou nulle.

Il serait totalement faux d'écrire φ est définie sur $[-1\,;0[\cup]0\,;1]$ par composition de fonctions qui le sont (même si ça avait un sens).

⚠ Lorsqu'une fonction φ est définie comme la composée d'autres fonctions, à part si toutes les fonctions en question sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier, la phrase « φ est définie par composition de fonctions qui le sont » est une arnaque suprême à ne jamais écrire. Ce qui importe principalement est que $f(D_f) \subset D_g$.

4) Fonction bijective et réciproque

Définition (bijection). *Soit $f : E \longrightarrow F$. On dit que f est bijective (ou une bijection) de E sur F si tout réel de F admet un unique antécédent dans E par f, autrement dit si :*

$$\forall y \in F, \quad \exists! x \in E, \quad y = f(x).$$

Exemples :

Définition (réciproque d'une bijection). *Soit f une bijection de E sur F. On appelle réciproque de f et on note f^{-1} la fonction*

$$f^{-1}:\left\{\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & \begin{array}{c}\textit{l'unique antécédent}\\ \textit{de } y \textit{ par } f\end{array}\end{array}\right.$$

Autrement dit, pour tous $x \in E$ et $y \in F$,

$$y = f(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = f^{-1}(y).$$

En effet :
• Si $x = f^{-1}(y)$ est un antécédent de y par f alors, par définition, $f(x) = y$.
• Si $y = f(x)$, alors x est un (et donc l') antécédent de y donc $f^{-1}(y) = x$.

Exemple : *La fonction* $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}\right.$ *est la réciproque de* $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$.

Proposition. *Si $f : E \longrightarrow F$ est une bijection de E sur F, alors f^{-1} est une bijection de F sur E.*

Démonstration. Supposons que f est une bijection de E sur F. L'équivalence dans la définition assure que, pour tout $x \in E$, $y = f(x) \in F$ est l'unique antécédent de x par f^{-1}. Ainsi f^{-1} est une bijection de F sur E. $\square$

Interprétation géométrique. Les courbes représentatives de f et de sa bijection réciproque sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

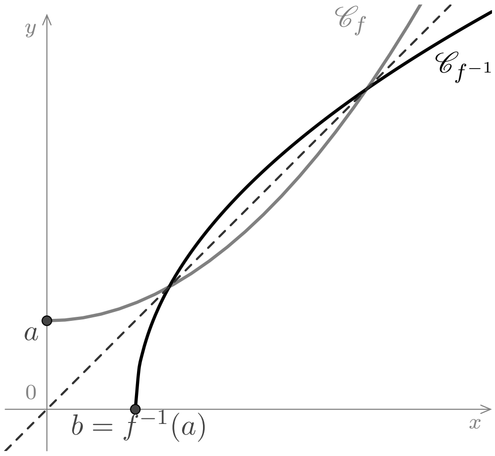
La droite d'équation $y = x$ est aussi appelée la première bissectrice des axes

En effet : notons (Δ) la droite d'équation $y = x$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Nous avons

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathcal{C}_{f^{-1}} &\iff x \in E \text{ et } y = f(x) \\ &\iff y \in F \text{ et } x = f^{-1}(y) \\ &\iff M'(y,x) \in \mathcal{C}_{f^{-1}}. \end{aligned}$$

Un vecteur directeur de (Δ) est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Il est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}y-x\\x-y\end{pmatrix}$ si bien que la droite $(M'M)$ est perpendiculaire à (Δ). Enfin le milieu du segment $[MM']$ est le point de coordonnées $\left(\frac{x+y}{2}, \frac{y+x}{2}\right)$ et il appartient bien à (Δ). Ainsi $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à (Δ).

La droite (Δ) est en pointillés dans l'exemple ci-dessous.



Nous verrons dans la partie B un théorème qui permet de montrer qu'une fonction est une bijection sans avoir besoin de trouver explicitement un antécédent à tout élément de son domaine d'arrivée (le théorème de la bijection).

Voyons un théorème de caractérisation de la réciproque (permettant parfois d'expliciter la réciproque sous réserve de pouvoir résoudre une équation) :

Théorème. *Une fonction $f : E \longrightarrow F$ est une bijection de E sur F si et seulement si il existe $g : F \longrightarrow E$ tel que :*

$$\forall (x,y) \in E \times F, \qquad \big(y = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = g(y)\big).$$

Dans ce cas, $g = f^{-1}$.

Démonstration.

$\square$

Exemples :

- *Montrons que $f : x \longmapsto \dfrac{3x+1}{x-2}$ est une bijection de $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ sur un domaine de $\mathbb{R}$ à déterminer et déterminons f^{-1}.*

- *Montrons que $f : x \longmapsto x + 2\sqrt{x}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un domaine de $\mathbb{R}$ à déterminer et déterminons f^{-1}.*

IV Propriétés globales d'une fonction

1) Signe d'une fonction

Bien sûr une fonction strictement positive est positive mais la réciproque est fausse. Idem pour les fonctions négatives.

Définition. *Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset E$. On dit que On dit que*
- *f est positive sur A si :* $\quad \forall x \in A, \quad f(x) \geqslant 0.$
- *f est négative sur A si :* $\quad \forall x \in A, \quad f(x) \leqslant 0.$
- *f est strictement positive sur A si :* $\quad \forall x \in A, \quad f(x) > 0.$
- *f est strictement négative sur A si :* $\quad \forall x \in A, \quad f(x) < 0.$

Exemples : *La fonction carré est positive sur $\mathbb{R}$ et strictement positive sur $\mathbb{R}^*$. La fonction inverse est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$.*

Interprétation géométrique. La courbe représentative d'une fonction positive (respectivement négative) est au-dessus (respectivement en-dessous) de l'axe des abscisses. Elle l'est strictement si, de plus, elle ne touche pas l'axe des abscisses.

De nombreux résultats à venir s'intéressent aux fonctions positives. Lorsque l'on a une fonction négative, on se ramène facilement au cas positif à l'aide du résultat suivant :

Proposition. *Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset E$. La fonction f est positive sur A si et seulement si $-f$ est négative sur A. La fonction f est strictement positive sur A si et seulement si $-f$ est strictement négative sur A.*

Les fonctions héritent des propriétés de compatibilité entre opérations algébriques et relation d'ordre des réels :

Nous énonçons cette proposition pour des fonctions positives mais elle s'adapte bien aux fonctions négatives (quitte à considérer l'opposé de la fonction et à utiliser la proposition précédente).

Proposition. *Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset E$.*

- ***Somme.*** *Si f et g sont positives sur A, alors $f+g$ est positive sur A. Si, de plus, l'une des fonctions f ou g est strictement positive sur A, alors $f+g$ est strictement positive sur A.*
- ***Multiplication externe.*** *Supposons que f est positive (respectivement strictement positive) sur A. Alors :*
  - ⋆ *Si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, αf est positive (respectivement strictement positive) sur A*
  - ⋆ *Si $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$, αf est négative (respectivement strictement négative) sur A*
- ***Produit et quotient.***
  - ⋆ *Si f et g sont positives sur A, alors fg aussi. Si, de plus, g ne s'annule pas sur A, alors $\dfrac{f}{g}$ est positive sur A.*
  - ⋆ *Si f et g sont strictement positives sur A, alors fg et $\dfrac{f}{g}$ aussi.*

On ne peut rien dire en général sur le signe de la somme d'une fonction positive et d'une fonction négative. Il faut se ramener à la résolution d'une inéquation ou avoir recours à une étude de fonctions (cf. parties B et D).

Proposition. *Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset E$.*

- *Si f est positive sur A et g négative sur A, ou le contraire, alors fg est négative sur A. Si, de plus, g ne s'annule pas sur A, alors $\dfrac{f}{g}$ est négative sur A.*
- *Si f est strictement positive sur A et g strictement négative sur A, ou le contraire, alors fg et $\dfrac{f}{g}$ sont strictement négatives sur A.*

2) Variations d'une fonction

a) Définitions et exemples

Une fonction est croissante si elle préserve l'ordre. Elle est décroissante si elle renverse l'ordre. Dans le cas strict, on ajoute simplement que deux points distincts n'ont pas la même image.

Définition (sens de variations). *Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset E$. On dit que*

- *f est croissante sur A si :* $\forall (x,y) \in A^2, \quad x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y).$
- *f est décroissante sur A si :* $\forall (x,y) \in A^2, \quad x \leqslant y \implies f(x) \geqslant f(y).$
- *f est strictement croissante sur A si :*
$$\forall (x,y) \in A^2, \quad x < y \implies f(x) < f(y).$$
- *f est strictement décroissante sur A si :*
$$\forall (x,y) \in A^2, \quad x < y \implies f(x) > f(y).$$

Remarques :

- Il existe des fonctions qui ne sont ni croissantes ni décroissantes sur un domaine donné (penser à la fonction carré sur $\mathbb{R}$ tout entier).
  Par conséquent la négation de « f est croissante » n'est en aucun cas « f est décroissante » ni même « f est strictement décroissante ».
- La définition d'une fonction croissante n'est pas « $f' \geqslant 0$ ». Déjà, à ce stade, nous n'avons pas revu les dérivées (cf. partie B). De plus, une fonction peut tout à fait ne pas être dérivable tout étant croissante. Dans la pratique, on utilisera souvent les dérivées pour déterminer les variations d'une fonction mais ça n'est pas la définition.
- Avant de penser à la dérivation, on peut essayer d'utiliser la définition :
  - ⋆ Pour montrer que f est croissante (respectivement décroissante) sur A, on se donne x et y dans A, on suppose que $x \leqslant y$ et on montre que $f(x) \leqslant f(y)$ (respectivement $f(x) \geqslant f(y)$).

On pourrait même juste se contenter de supposer que $x < y$ puisque, si $x = y$, $f(x) = f(y)$ alors $f(x) \leqslant f(y)$ et $f(x) \geqslant f(y)$.

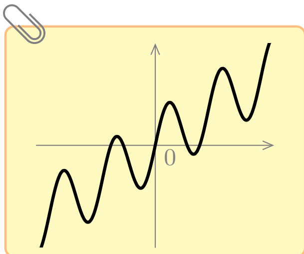
⋆ Pour montrer que f est strictement croissante (respectivement strictement croissante) sur A, on se donne x et y dans A, on suppose que $x < y$ et on montre que $f(x) < f(y)$ (respectivement $f(x) > f(y)$).

Exemple : *Les résultats du chapitre 3 sur le passage à la puissance dans une inégalité garantissent notamment que*

Mais la fonction inverse n'est pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$. Par exemple $-2 < 1$ et $1/(-2) < 1/1$.

- *Si $n \in \mathbb{N}$ est pair, $x \longmapsto x^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$. Si n est impair, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*
- *La fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.*

Contrairement aux suites (cf. chapitre 14), savoir que $f(x+1) > f(x)$ pour tout x, ne suffit pas pour conclure que la suite est strictement croissante.



Considérons l'exemple de la fonction $f : x \longmapsto x + \sin(2\pi x)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(x+1) = x + 1 + \sin(2\pi(x+1)) = 1 + x + \sin(2\pi x) = 1 + f(x) > f(x),$$

puisque, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\sin(a + 2\pi) = \sin(a)$ (cf. chapitre 5). Pourtant f n'est pas strictement croissante puisque $f(0) = 0 > -\dfrac{1}{4} = f\left(\frac{3}{4}\right)$ (son graphe est ci-contre).

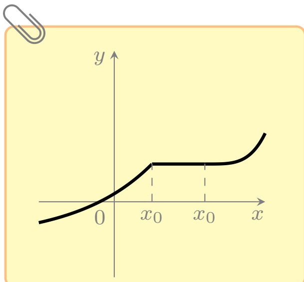
Définition. *Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset E$. On dit que*

- *f est monotone sur A si f est croissante ou décroissante sur A.*
- *f est strictement monotone sur A si f est strictement croissante ou strictement décroissante sur A.*

Remarques :

- Les fonctions constantes sur A sont les seules fonctions qui soient à la fois croissantes et décroissantes sur A.

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.



- Soit I un intervalle non vite et non réduit à un point. Une fonction monotone mais non strictement monotone sur I est constante sur intervalle inclus dans I. En effet, supposons que f est croissante mais non strictement (le cas décroissant est analogue). Comme f n'est pas strictement croissante sur A, il existe $(x_0, y_0) \in A^2$ tel que $x_0 < y_0$ et $f(x_0) \geqslant f(y_0)$. Mais comme f est croissante sur A, on a $f(x_0) \leqslant f(y_0)$ si bien que $f(x_0) = f(y_0)$. On en déduit que, pour tout $z \in [x_0\,;y_0]$, $f(x_0) \leqslant f(z) \leqslant f(y_0)$ donc $f(z) = f(x_0)$. Par conséquent f est constante sur $[x_0\,;y_0]$.

b) Opérations sur les fonctions monotones

Les propositions suivantes sont pratiques lorsque l'on connaît déjà la monotonie de certaines fonctions et que l'on veut en déduire la monotonie de fonctions construits à partir d'eux. Cela évite d'avoir systématiquement recours à la dérivée.

Proposition (variations d'une somme). *Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset E$. Si f et g sont croissantes (respectivement décroissantes) sur A, alors $f + g$ est croissante (respectivement décroissante) sur A. De plus, si l'une d'elles est strictement croissante (respectivement décroissante), alors $f + g$ est strictement croissante (respectivement décroissante).*

En revanche, on ne peut rien conclure si f et g sont de monotonie contraire. Il faut alors résoudre des inégalités ou utiliser l'outil de la dérivation. On y reviendra.

Démonstration. Supposons f et g croissantes (le raisonnement est analogue dans le cas décroissant).

□

Exemple : *$x \longmapsto x^2 - \dfrac{1}{x} + 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque $x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto -\dfrac{1}{x}$ et $x \longmapsto 1$ le sont.*

Proposition (variation d'une multiplication externe). *Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset E$. Supposons que f est monotone (respectivement strictement monotone) sur A.*

- *Si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, alors αf est monotone (respectivement strictement monotone) de même sens de variation que f.*
- *Si $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$, alors αf est monotone (respectivement strictement monotone) de sens de variation contraire de f.*

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Proposition (variation d'un produit). *Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset E$.*

- *Si f et g sont croissantes (respectivement décroissantes) et **POSITIVES** sur A, alors fg est croissante (respectivement décroissante).*
- *Si f et g sont strictement croissantes (respectivement décroissantes) et **POSITIVES** sur A, alors fg est strictement croissante (respectivement décroissante).*

L'hypothèse de monotonie est essentielle. Rien que la fonction $x \longmapsto x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ mais son produit avec elle-même, la fonction carré, ne l'est pas ! ! ! !
Le cas échéant, on se ramène à la résolution d'inégalités ou à l'utilisation de l'outil de dérivation.

Démonstration.

- Supposons que f et g sont croissantes (le cas décroissant est analogue) et positives sur A. On se donne $(x, y) \in A^2$ et on suppose que $x \leqslant y$. On a alors $0 \leqslant f(x) \leqslant f(y)$ et $0 \leqslant g(x) \leqslant g(y)$ si bien que $f(x)g(x) \leqslant f(y)g(y)$. On en déduit que fg est croissante.
- Le cas strict se démontre de façon analogue mais avec des inégalités strictes. □

Exemple : *La fonction $x \longmapsto x\mathrm{e}^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ par produit de fonctions strictement croissantes et positives sur $\mathbb{R}_+$.*

⚠ On ne dit rien sur les variations d'un quotient. A moins de réussir à écrire le quotient comme un produit de fonctions strictement positives et d'appliquer le résultat plus haut, on utilise plutôt l'outil de la dérivation.

Proposition (variation d'une composée). *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset E$. Supposons que f est monotone sur A et g est monotone sur F (respectivement toutes les deux strictement monotones).*

- *Si f et g ont le même sens de variations, alors $g \circ f$ est croissante (respectivement strictement croissante) sur A.*
- *Si f et g ont un sens de variations contraire, alors $g \circ f$ est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur A.*

Encore une fois : méfiance avec la composition ! La fonction g n'est pas définie sur A mais sur F. A minima, pour appliquer cette proposition, il s'agit de vérifier que g est monotone sur $f(A)$.

Démonstration. Supposons que f est strictement croissante sur A et g strictement décroissante sur F (les autres cas sont analogues). On se donne $(x, y) \in A^2$ tels que $x < y$. On a alors $f(x) < f(y)$ (car f strictement croissante) puis $g(f(x)) > g(f(y))$ (car g strictement décroissante). Par conséquent $g \circ f$ est strictement décroissante sur A. □

Exemple : *La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^3}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ puisque composée de $x \longmapsto -x^3$ strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ par $\exp$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

3) Quelques apports de la stricte monotonie

Dans le cas croissant, le sens

$$x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$$

découle de la définition. Mais pour pouvoir revenir en arrière la stricte croissance est requise. Même remarque dans le cas décroissant. Par conséquent, quand on travaille avec des équivalences (par exemple quand on résout une (in)équation), la stricte monotonie est indispensable (même quand on manie des inégalités larges).

Proposition. *Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset E$.*

- *Si f est une fonction **strictement** croissante sur A alors, pour tout $(x, y) \in A^2$:*

$$x \leqslant y \iff f(x) \leqslant f(y) \quad \text{et} \quad x < y \iff f(x) < f(y).$$

- *Si f est une fonction **strictement** décroissante sur A alors, pour tout $(x, y) \in A^2$:*

$$x \leqslant y \iff f(x) \geqslant f(y) \quad \text{et} \quad x < y \iff f(x) > f(y).$$

Démonstration. Supposons que f est strictement croissante (le cas décroissant est analogue) sur A.

□

« même variations » signifie que, quelle que soit la partie A de E, f est croissante sur A si et seulement si $g \circ f$ l'est. Même chose pour décroissante, strictement croissante, strictement décroissante.

Corollaire. *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow \mathbb{R}$.*

- *Si g est **strictement** croissante sur F, alors f et $g \circ f$ ont les mêmes variations.*
- *Si g est **strictement** décroissante sur E, alors f et $g \circ f$ ont des variations contraires.*

Démonstration. Supposons que g est strictement croissante sur F (le raisonnement est analogue dans l'autre cas). On se donne $A \subset E$. Traitons le cas strictement décroissant sur A (les cas croissant, strictement croissant et décroissant sont analogues).

□

Remarque : Ce corollaire permet de simplifier l'étude d'une composée de fonctions lorsque l'on sait que la deuxième est strictement monotone.

Par exemple, pour étudier $\varphi : x \longmapsto (x^2 - x + 1)^7$, puisque $g : x \longmapsto x^7$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, il suffit d'étudier la fonction $f : x \longmapsto x^2 - x + 1$ et alors φ et f ont les mêmes variations.

« Au plus » signifie que, soit il n'y a pas d'antécédent, soit il n'y en a qu'un.

Proposition. *Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset E$. Si f est **strictement** monotone sur A, alors tout réel admet au plus un antécédent par f dans A.*

Démonstration. Supposons que f est strictement croissante (le cas décroissant est analogue).

□

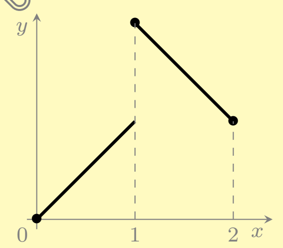
C'est déjà précisément ainsi que nous avions montré l'unicité de la racine $n^{\text{ième}}$ dans le chapitre 3(mais on n'a pas encore montré l'existence, cf. partie B avec le TVI).

Exemple :

Proposition (variations d'une réciproque). *Soit $f : E \longrightarrow F$ une bijection de E sur F qui est monotone. Elle est alors strictement monotone. De plus f^{-1} est strictement monotone de même sens de variation que f.*

Démonstration. Supposons que f est une bijection croissante de E sur F.

□



Remarque : Une bijection monotone est strictement monotone mais une bijection peut tout à fait ne pas être monotone. Par exemple

$$f : x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [0\,;1[\\ 3-x & \text{si} \quad x \in [1\,;2] \end{cases}$$

est une bijection de $[0\,;2]$ sur $[0\,;2]$ (je vous laisse le montrer) mais elle n'est pas monotone (le graphe est ci-contre).

4) Fonctions majorées, minorées, bornées

f est majorée (resp. minorée, bornée) si et seulement si la partie $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ est majorée (resp. minorée, bornée).

Définition. *Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset E$.*

- *On dit que f est majorée sur A si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in A$, $f(x) \leqslant M$. Le réel M est alors appelé un majorant de f sur A.*
- *On dit que f est minorée sur A si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in A$, $f(x) \geqslant m$. Le réel m est alors appelé un minorant de f sur A.*
- *On dit que f est bornée sur A si elle est à la fois majorée et minorée sur A.*

Exemple :

⚠ Attention à l'ordre des quantificateurs ! Dans le définition, il s'agit de :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \qquad \forall x \in A \qquad f(x) \leqslant M$$

et non pas de :

$$\forall x \in A, \qquad \exists M \in \mathbb{R}, \qquad f(x) \leqslant M$$

Cette dernière proposition est toujours vraie. En effet, pour tout $x \in A$, en posant $M = f(x)$, on a bien $f(x) \leqslant M$.

Proposition. *Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset E$. La fonction f est bornée sur A si et seulement si $|f|$ est majorée sur A.*

Démonstration. On a vu dans le chapitre 3 qu'une partie B de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement si il existe $M > 0$ tel que, pour tout $y \in B$, $|y| \leqslant M$. On conclut en appliquant ce résultat avec $B = f(A)$ (puisque pour tout $x \in A$, $f(x) \in B$). □

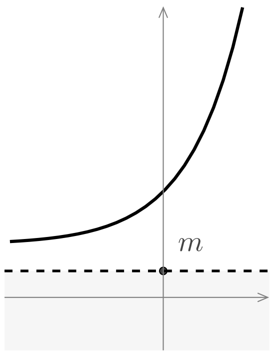
En d'autres termes, f admet un minimum lorsque f admet un minorant qui est atteint. Là aussi, cette notion de minimum est reliée à la notion de minimum d'un ensemble : f admet un minimum si et seulement si $f(A)$ admet un minimum, et alors les deux minima coïncident, et c'est la même chose pour un maximum.

Définition. *Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset E$. On dit que*

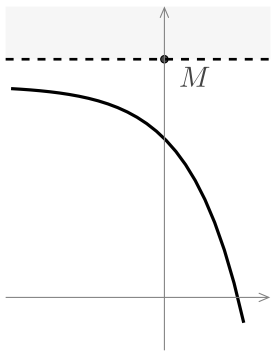
- *f admet un minimum sur A s'il existe $x_0 \in A$ tel que, pour tout $x \in A$, $f(x) \geqslant f(x_0)$.*
- *f admet un maximum sur A s'il existe $x_0 \in A$ tel que, pour tout $x \in A$, $f(x) \leqslant f(x_0)$.*
- *f admet un extremum sur A si f admet un minimum ou un maximum sur A.*

Exemple : *On a vu plus haut que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est minorée par 0 et majorée par 1.*

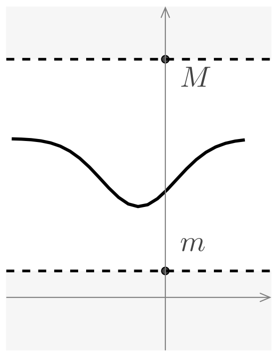
Représentation géométrique. La courbe représentative d'une fonction majorée par M (respectivement minorée par m) se situe en-dessous (respectivement au-dessus) de la droite d'équation $y = M$ (respectivement $y = m$), et les points situés strictement au-dessus (respectivement en-dessous) de cette droite ne sont pas atteints (zone grisée).



Fonction minorée



Fonction majorée



Fonction bornée

L'étude des variations d'une fonction est un allié précieux pour prouver qu'elle admet un maximum ou un minimum :

Cela reste vrai en fermant l'intervalle $]a\,;b[$ en a ou en b si c'est possible.

Proposition. *Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$ et $]a\,;b[\subset E$. Soit $c \in\,]a\,;b[$.*

- *Si f est croissante sur $]a\,;c]$ et décroissante sur $[c\,;b[$, alors f admet un maximum sur $]a\,;b[$ en c.*
- *Si f est décroissante sur $]a\,;c]$ et croissante sur $[c\,;b[$, alors f admet un minimum sur $]a\,;b[$ en c.*

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

5) Translations, contractions, dilatations, symétries

a) Transformation affine d'une fonction

> Nous introduisons ces notations par soucis de rigueur mais inutile de les retenir par cœur : on peut les retrouver facilement.

- On note $-E = \{-x \,|\, x \in E\}$, l'ensemble dit « symétrique de E par rapport à 0 ».

  Par exemple, si $E = \mathbb{R}_+$, alors $-E = \mathbb{R}_-$. Si $E = \mathbb{R}$, alors $-E = \mathbb{R}$. Si $E = \left]-1\,;2\right]$, alors $-E = \left[-2\,;1\right[$.

- Si $a \in \mathbb{R}$, on note $E - a = \{x - a \,|\, x \in E\}$, l'ensemble dit « translaté de E de vecteur $-a\vec{i}$ ».

  Par exemple, si $E = \mathbb{R}_+$, alors $E - 1 = \left[-1\,;+\infty\right[$. Si $E = \mathbb{R}$ alors $E - a = \mathbb{R}$. Si $E = \left]0\,;4\right]$, alors $E - 2 = \left]-2\,;2\right]$.

- Si $a \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\frac{1}{a}E = \left\{\frac{x}{a} \,\middle|\, x \in E\right\}$. Lorsque $a > 1$, c'est l'ensemble $\frac{1}{a}E$ est contracté par rapport à E d'un facteur a. Lorsque $a < 1$, c'est l'ensemble $\frac{1}{a}E$ est dilaté par rapport à E d'un facteur $\frac{1}{a}$.

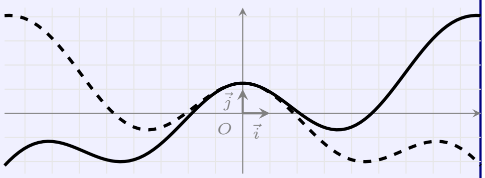
  Par exemple, si $E = \left]-1\,;1\right[$, alors $\frac{1}{2}E = \left]-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[$. Si $E = \mathbb{R}$ alors $\frac{1}{a}E = \mathbb{R}$. Si $E = \left]6\,;7\right]$, alors $\frac{1}{3}E = \left]2\,;\frac{7}{3}\right]$.

Le résultat suivant découle de considérations géométriques (et on l'admet) :

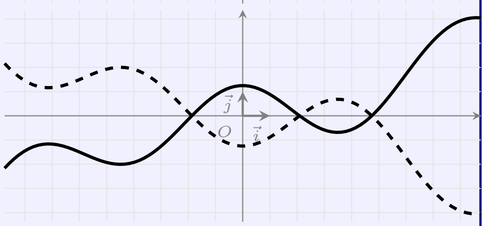
> Sur les illustrations ci-contre, le graphe en traits plein est celui de la fonction f quand celui en pointillé est celui de la transformation de f.

Proposition. *Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$.*

- *Le graphe de la fonction (définie sur $-E$) $x \longmapsto f(-x)$ est le symétrique du graphe de f par rapport à l'axe des ordonnées.*

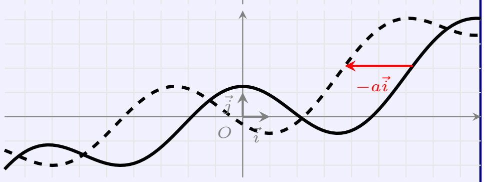


- *Le graphe de la fonction (définie sur E) $-f$ est le symétrique du graphe de f par rapport à l'axe des abscisses.*

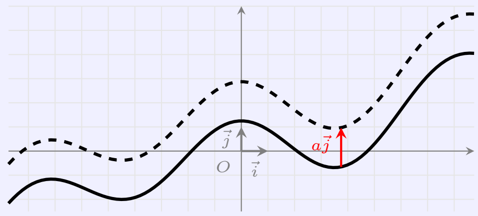


> Attention au signe $-$!

- *Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Le graphe de la fonction (définie sur $E - a$) $x \longmapsto f(x + a)$ est obtenu à partir du graphe de f par une translation (horizontale) de vecteur $-a\vec{i}$.*

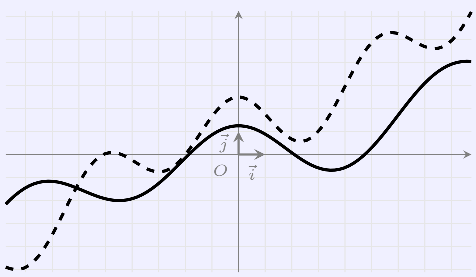


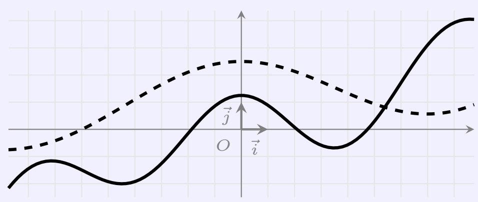
- *Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Le graphe de la fonction (définie sur E) $f + a : x \longmapsto f(x) + a$ est obtenu à partir du graphe de f par une translation (verticale) de vecteur $a\vec{j}$.*



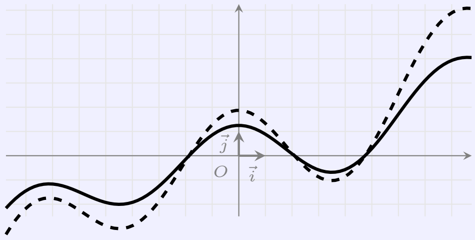
- *Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Le graphe de la fonction (définie sur $\frac{1}{a}E$) $x \longmapsto f(ax)$ est obtenu à partir du graphe de f par une dilatation horizontale de rapport $\frac{1}{a}$ si $a < 1$ et par une contraction horizontale de rapport a si $a > 1$.*

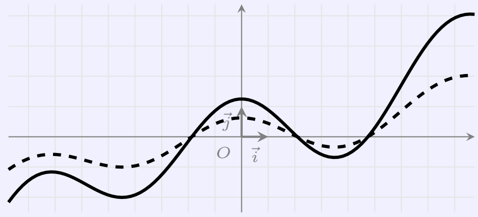
> Sur le graphe à gauche, une contraction horizontale de rapport $3/2$ ($a = 3/2$). Sur le graphe de droite, une dilatation horizontale de rapport 2 ($a = 1/2$).





- *Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Le graphe de la fonction (définie sur E) $x \longmapsto af(x)$ est obtenu à partir du graphe de f par une contraction verticale de rapport $\frac{1}{a}$ si $a < 1$ et par une dilatation verticale de rapport a si $a > 1$.*



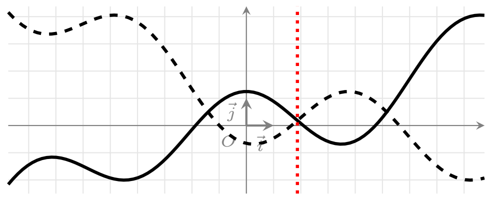


Sur le graphe à gauche, une dilatation horizontale de rapport $3/2$ ($a = 3/2$). Sur le graphe de droite, une contraction horizontale de rapport 2 ($a = 1/2$).
⚠ $a < 1$ contacte et $a > 1$ dilate : c'est le contraire du cas précédent.

On peut aussi faire plusieurs transformations affines sur une fonction, parmi les transformations ci-dessus.

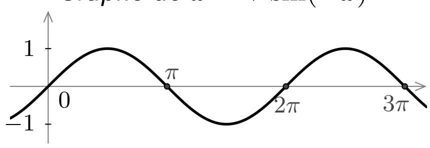
Par exemple, si $a \in \mathbb{R}^*$, le graphe de fonction $x \longmapsto f(a - x)$ est obtenu à partir du graphe de f par une symétrie du graphe de f par rapport à la droite d'abscisse $\frac{a}{2}$.

En effet $\frac{a}{2}$ est le milieu du segment d'extrémités x et $a - x$.

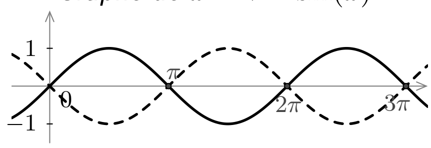


Exemple : *Examinons le graphe de transformations affine de la fonction sinus (que l'on verra en détail dans le chapitre 5). A chaque fois nous traçons le graphe de $\sin$ en traits pleins et le graphe de la transformation en pointillés :*

Graphe de $x \longmapsto \sin(-x)$

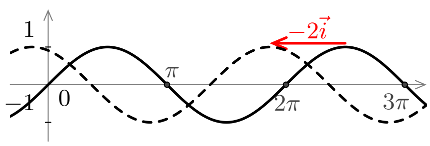


Graphe de $x \longmapsto -\sin(x)$

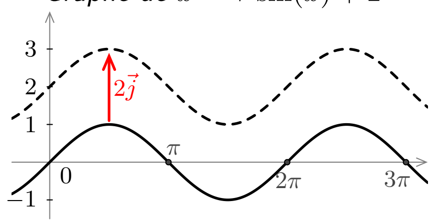


On ne voit pas de pointillés dans le graphe de $x \longmapsto -\sin(-x)$. Normal cette fonction est encore la fonction $\sin$. On dit que c'est une fonction impaire (cf. paragraphe suivant).

Graphe de $x \longmapsto \sin(x + 2)$

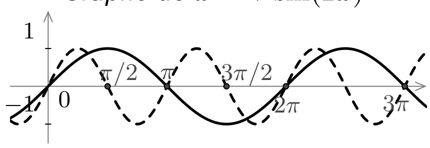


Graphe de $x \longmapsto \sin(x) + 2$

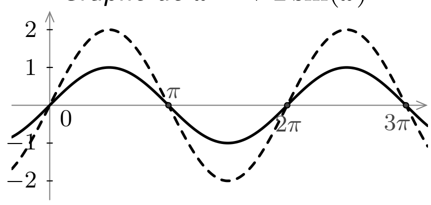


⚠ Attention au signe $-$! La fonction $x \mapsto f(x + a)$ atteint la valeur $f(a)$ en 0, la valeur $f(a+1)$ en 1 etc. Elle a donc « une avance de a » sur la fonction f, et donc son graphe est aussi « en avance ». Si a est négatif, c'est une avance négative donc un retard !

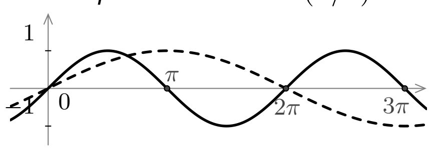
Graphe de $x \longmapsto \sin(2x)$



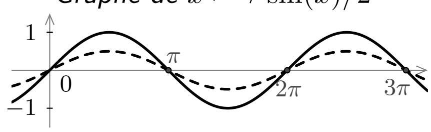
Graphe de $x \longmapsto 2\sin(x)$



Graphe de $x \longmapsto \sin(x/2)$



Graphe de $x \longmapsto \sin(x)/2$



Le graphe de $x \longmapsto \sin(2x)$ est compressé horizontalement d'un facteur 2 : on va « deux fois plus vite ». Le graphe de $x \longmapsto \sin(x/2)$ est dilaté horizontalement d'un facteur 2 : on va « deux fois plus lentement ».

b) Fonctions paires, fonctions impaires

Par exemple, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$, $]-2\,;2[$, et $]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$ sont symétriques par rapport à 0.

Définition. *On dit qu'une partie E de $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 si, pour tout $x \in E$, $-x \in E$.*

Définition (fonctions paires, fonctions impaires). *Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Si E est symétrique par rapport à 0, on dit que :*

- *f est paire sur E si : $\quad \forall x \in E, \quad f(-x) = f(x)$.*
- *f est impaire sur E si : $\quad \forall x \in E, \quad f(-x) = -f(x)$.*

Nous verrons d'autres exemples dans la partie C et le chapitre 5.

Exemples : *La fonction carré est paire sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \longmapsto x^3$ est impaire sur $\mathbb{R}$. La fonction inverse est impaire sur $\mathbb{R}^*$.*

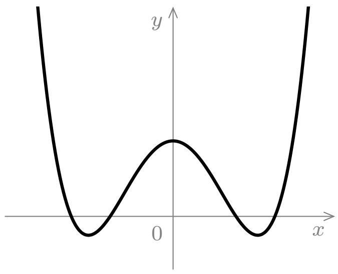
Dire qu'une fonction f est paire revient à dire qu'elle coïncide avec $x \longmapsto f(-x)$. Il faut donc impérativement justifier au préalable qu'elles ont le même domaine de définition, c'est-à-dire que E est symétrique par rapport à 0. Même remarque pour une fonction impaire.

Une fonction impaire peut ne pas être définie en 0. Pour une fonction paire, on ne peut rien conclure en 0, elle peut prendre toutes les valeurs possibles comme ne pas être définie.

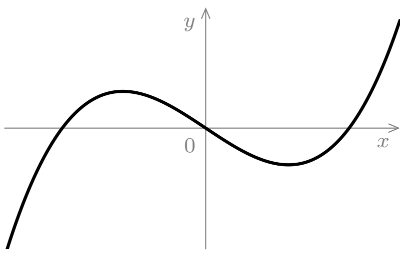
Proposition. *Si f est une fonction impaire sur une partie E de $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0 et qui contient 0, alors $f(0) = 0$.*

Démonstration. Si f est impaire et définie en 0, alors $f(0) = f(-0) = -f(0)$ donc $2f(0) = 0$ et donc $f(0) = 0$. $\square$

Interprétation géométrique. On sait que le graphe de $x \longmapsto f(-x)$ est le symétrique du graphe de f par rapport à l'axe des ordonnées. Par conséquent une fonction est paire si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées :



De plus, si on multiplie en plus par -1, alors on fait en plus une symétrie par rapport à l'axe des abscisses. On en déduit que le graphe de $x \longmapsto -f(-x)$ est obtenu à partir du graphe de f en effectuant une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées puis une symétrie par rapport à l'axe des abscisses : il s'agit donc d'une symétrie par rapport à l'origine. Ainsi une fonction est impaire si son graphe est symétrique par rapport à l'origine.



Prudence en manipulant les autres notions vues dans ce chapitre et la parité : la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées inverse le sens de variations par exemple !

Remarque : Si f est paire ou impaire, on peut se contenter d'étudier f sur $\mathbb{R}_+ \cap E$ ou sur $\mathbb{R}_- \cap E$. Le graphe de f tout entier est alors obtenu en appliquant une symétrie par rapport à l'ordonnée si f est paire ou par rapport à O si f est impaire. Nous y reviendrons dans la partie D.

Proposition (réciproque d'une bijection impaire). *Soit $f : E \longrightarrow F$ une bijection de E sur F. Supposons que E et F sont symétriques par rapport à 0 et que f est impaire sur E. Alors f^{-1} est impaire sur F.*

DÉMONSTRATION.

□

c) Fonctions périodiques

Si $T = 0$, la définition ci-contre a un intérêt limité mais elle a un sens. Dans la définition d'une fonction périodique ci-dessous, on demandera l'existence d'une période non nulle.

Définition. *Soit $T \in \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est T-périodique sur E si :*

- $\forall x \in E, \quad x + T \in E.$
- $\forall x \in E, \quad f(x+T) = f(x).$

On dit alors que T est une période de f.

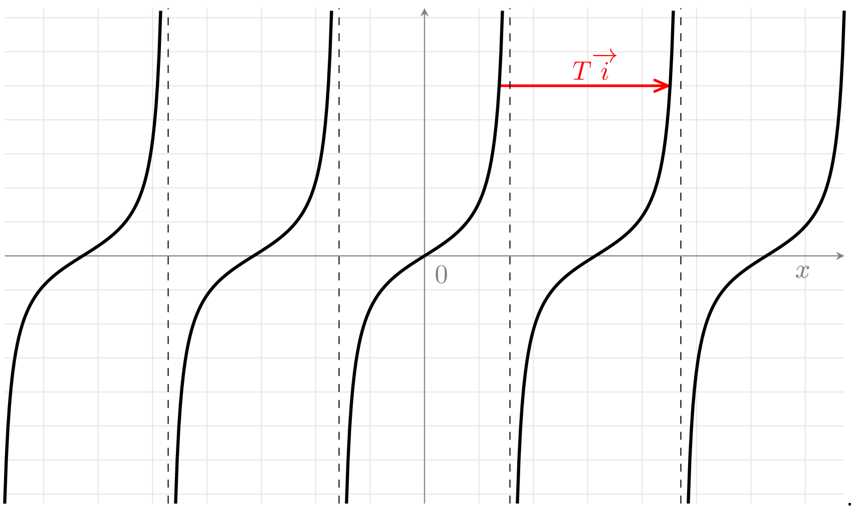
⚠ Dire qu'une fonctions f est T-périodique revient à dire qu'elle coïncide avec $x \longmapsto f(x+T)$. Il faut donc impérativement justifier au préalable qu'elles ont le même domaine de définition. La première condition n'est donc pas optionnelle !

Exemples : *Les fonctions $\sin$ et $\cos$ (que nous reverrons dans le chapitre 5) sont 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$.*

Si on applique bêtement et méchamment le paragraphe IV.5.a, il faudrait plutôt dire que f est T-périodique si son graphe est invariant par translation de vecteur $-T\vec{i}$. Mais, si c'est le cas, alors il est aussi invariant par l'opération inverse (c'est intuitif : si on ne change rien en faisant une opération, on ne fait rien non plus en l'annulant, donc en la faisant en sens inverse).

Interprétation géométrique. Soit $T \in \mathbb{R}$. Une fonction f étant T-périodique si les fonctions f et $x \longmapsto f(x+T)$ sont égales, une fonction est T-périodique si son graphe est invariant par translation de vecteur $T\vec{i}$.

Ci-contre, il s'agit du graphe de la tangente, que nous reverrons dans le chapitre 5.



Définition. *Une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite périodique sur E s'il existe $T \neq 0$ tel que f soit T-périodique sur E.*

Proposition. *Soit $T \in \mathbb{R}$. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction T-périodique sur E. Alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:*

- $\forall x \in E, \quad x + kT \in E.$
- $\forall x \in E, \quad f(x+kT) = f(x).$

En d'autres termes, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, f est kT-périodique.

Démonstration. Soit $x \in E$. On montre par deux récurrences immédiates que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $x + nT \in E$ et $f(x + nT) = f(x)$.
- $x - nT \in E$ et $f(x - nT) = f(x)$.

Cela permet de conclure puisqu'on prouve le résultat à la fois pour les entiers positifs et négatifs. $\square$

⚠ On voit avec ce qui précède qu'une fonction périodique admet une infinité de périodes. Parler de « la » période d'une fonction n'a donc aucun sens, on parlera « d'une » période. On pourrait être tenté de définir la plus petite période strictement positive... sauf que celle-ci n'existe pas forcément !

Par exemple, si f est constante, alors tout réel est une période, donc il n'y a pas de plus petite période strictement positive (car $\mathbb{R}_+^*$ n'a pas de minimum).

⚠ Attention tout de même aux points de recollement quand on passe d'un intervalle d'amplitude T à E tout entier. Par exemple une fonction T-périodique monotone sur $\left[-\frac{T}{2}\,;\frac{T}{2}\right[\cap E$ ne l'est pas forcément sur E tout entier (cf. fonction tangente dont le graphe se trouve ci-dessus).

Remarque : Nous déduisons de la proposition que l'étude d'une fonction T-périodique peut être restreinte à un ensemble plus petit. Plus précisément, elle peut être restreinte à n'importe quel intervalle semi-ouvert de longueur T intersecté avec son domaine de définition E, c'est-à-dire à $[a\,;a+T[\,\cap E$ ou $]a\,;a+T]\cap E$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. On obtient le graphe complet en faisant des translations de vecteur $T\vec{i}$ au graphe limité à $[a\,;a+T[\,\cap E$.

Exemples :

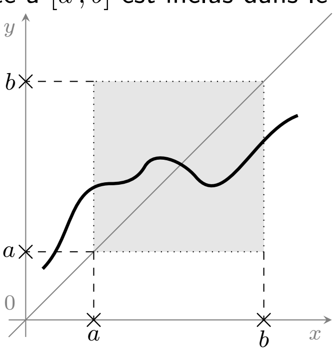
6) Propriétés de stabilité

Les deux notions de ce paragraphe ne sont que du vocabulaire à ce stade mais elles joueront un rôle majeur dans le chapitre 14 notamment.

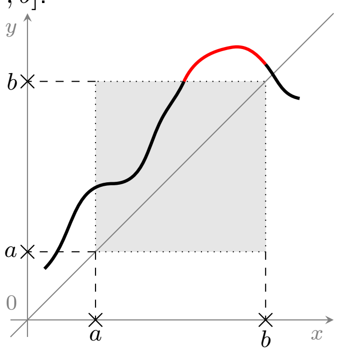
Définition (partie stable). *Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit A une partie de E. On dit que A est stable par f si $f(A) \subset A$, c'est-à-dire, pour tout $x \in A$, $f(x) \in A$.*

Exemple :

Interprétation géométrique. Un segment $[a\,;b]$ est stable par f si le graphe de f restreinte à $[a\,;b]$ est inclus dans le carré $[a\,;b] \times [a\,;b]$.



$[a\,;b]$ stable par f



$[a\,;b]$ non stable par f

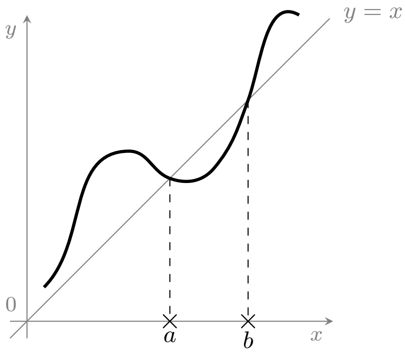
Remarque : Pour déterminer si une partie (souvent un intervalle) est stable par une fonction f, ou pour en trouver, on s'aide en général d'une étude complète de la fonction. Puisque les points de coordonnées (a,a) et (b,b), qui sont des sommets du carrés, se trouvent sur la droite d'équation $y=f(x)$, on s'aide souvent de la notion suivante :

Définition (point fixe). *Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in E$. On dit que a est un point fixe de f si $f(a) = a$.*

Exemples :

Dans le graphe ci-contre, a et b sont deux points fixes de f

Interprétation géométrique. Les points fixes de f, s'ils existent, sont les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la droite d'équation $y = x$.



Une erreur classique consiste à fixer $x \in \mathbb{R}$ quelconque et de chercher un antécédent de x en utilisant le TVI... mais celui-ci n'a aucune raison d'être x ! !

Remarque : Chercher un point fixe d'une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ revient à résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in E$. Parfois, on y arrive directement mais, la plupart du temps, c'est un théorème d'existence d'antécédents, appelé théorème des valeurs intermédiaires (cf. partie B), qui va garantir qu'il y a des solutions.

⚠ Il faut alors absolument avoir le réflexe de poser la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$ et de chercher ses valeurs d'annulation. On en reparlera dans la partie B.