Programme de colles - Semaine n^o 9

du 25 novembre au 1er décembre 2024

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

12 – Arithmétique des entiers

13 – Propriété de la borne supérieure (*en cours uniquement*)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Démontrer (par récurrence forte) que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 peut s'écrire comme produit de facteurs premiers puis montrer que l'ensemble $\mathbb{P}$ des nombres premiers est infini.
- Énoncer le théorème de factorisation première d'un entier naturel supérieur ou égal à 2 puis montrer l'unicité [1].
- Donner sans démonstration :
  - ⋆ une définition de la valuation p-adique d'un entier naturel non nul,
  - ⋆ des formules pour la valuation p-adique d'un produit et d'une puissance,
  - ⋆ la réécriture du théorème de décomposition première avec la valuation p-adique,
  - ⋆ un critère de divisibilité utilisant la valuation p-adique,
  - ⋆ les formules donnant le PGCD et le PPCM de deux entiers non nuls utilisant la valuation p-adique.
- Montrer que :
  - ⋆ pour tous $p \in \mathbb{P}$ et $k \in [\![1\,;p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}$.
  - ⋆ pour tous $(a,b,p) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{P}$, $(a+b)^p \equiv a^p + b^p\,[p]$.
  - ⋆ pour tout $p \in \mathbb{P}$ et $n \in [\![0\,;p-1]\!]$, $n^p \equiv n\,[p]$ (forme faible du petit théorème de Fermat).
- Donner la définition de la borne supérieure d'une partie non vide de $\mathbb{R}$ (si elle existe), énoncer le théorème de la borne supérieure et le théorème de caractérisation de la borne supérieure [2].
- Donner la définition de la borne inférieure d'une partie non vide de $\mathbb{R}$ (si elle existe), énoncer le théorème de la borne inférieure et le théorème de caractérisation de la borne inférieure[2].
- Montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Le reste de la colle (les 45 minutes restantes) consistera en des exercices d'arithmétique.

Prévisions pour la semaine 10 : chapitres 13 et début du chapitre 14 (suites)

1. En utilisant le résultat suivant : si $(k,p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{P}^3$ vérifie $p|q^k$, alors $p=q$ (que l'on pourra justifier rapidement à l'oral).
2. deux versions quantifiées mais pas la caractérisation séquentielle (qui ne sera vue que dans le chapitre 14).

Détails des chapitres au programme

Chapitre 12 – Arithmétique des entiers

- Divisibilité dans $\mathbb{Z}$
  - ⋆ Diviseurs et multiples. Notation $a\mathbb{Z}$. Diviseurs et multiples de 0, 1, -1.
  - ⋆ Premières propriétés. Entiers associés. Transitivité. Compatibilité avec les combinaisons linéaires, avec le produit, avec les puissances entières naturelles.
  - ⋆ Théorème de la division euclidienne. Méthode pratique. Divisibilité et reste nul. Caractérisation des entiers impairs.
- PGCD et PPCM
  - ⋆ PGCD de deux entiers naturels. Premières propriétés. Cas où l'un divise l'autre. Algorithme d'Euclide. Relations de Bezout. Méthode pratique pour déterminer une relation de Bezout. L'ensemble des diviseurs communs de deux entiers naturels est l'ensemble des diviseurs de leur PGCD. Factorisation dans un PGCD. PGCD de deux entiers relatifs .
  - ⋆ Entiers premiers entre eux. Division par le PGCD pour obtenir des entiers premiers entre eux. Théorème de Bezout. Théorème de Gauss. Produit d'entiers premiers avec un autre commun. Conséquence sur le produit d'entiers. Forme irréductible d'un rationnel. Équations diophantiennes du type $au + bv = c$.
  - ⋆ PPCM de deux entiers. Cas où l'un divise l'autre. Lien entre PPCM et PGCD. Factorisation dans un PPCM. PPCM de deux entiers relatifs. Tout multiple commun à deux entiers est un multiple de leur PPCM.
  - ⋆ Extension à plus de deux entiers. Associativité du PGCD. Entiers premiers entre eux deux à deux. Théorème de Bezout. Cas des produits d'entiers. Factorisation dans le PGCD. Si deux entiers sont premiers entre eux, alors des puissances de ces entiers aussi. Puissance d'un PGCD.
- Nombres premiers.
  - ⋆ Nombres premiers, nombres composés. Un nombre premier divise un autre nombre ou est premier avec lui. Lemme d'Euclide. Existence de la décomposition en produit de facteurs premiers.
  - ⋆ L'ensemble $\mathbb{P}$ des nombres premiers est infini. Test de divisibilité par les nombres inférieurs à la racine carrée. Crible d'Eratosthène.
  - ⋆ Décomposition en produit de facteurs premiers. Valuation p-adique (on pose $v_p(1) = 0$). Réécriture de la décomposition. La valuation p-adique d'un produit, d'une puissance. Critère de divisibilité. Écriture des PGCD et PPCM de deux entiers à l'aide des valuations p-adiques. Critère pour que deux entiers soient premiers entre eux. Facteurs premiers d'un produit.
- Congruences dans $\mathbb{Z}$.
  - ⋆ Congruences dans $\mathbb{R}$: symétrie, transitivité, somme dans une congruence, somme de congruences, produit et division dans une congruence.
  - ⋆ Résultats propres aux entiers. Lien entre congruence et divisibilité. Reste modulo m. Produit dans une congruences d'entiers, produit de congruences d'entiers, puissance dans une congruence d'entiers. Division dans une congruence d'entiers.
  - ⋆ Petit théorème de Fermat.
  - ⋆ Quelques applications : critères de divisibilité, congruence d'une puissance, utilisation des inverses modulo n.

Chapitre 13 – Propriété de la borne supérieure

- Bornes supérieurs et bornes inférieures
  - ⋆ Définitions et exemples. Si une partie a un maximum, c'est la borne supérieure. Ces des intervalles.
  - ⋆ Propriété de la borne supérieure/inférieure.

  - ⋆ Caractérisation des bornes supérieures et inférieures.
  - ⋆ Méthodes pour déterminer la borne supérieure/inférieure.
  - ⋆ Preuve de l'existence de la partie entière d'un réel.
- Caractérisation des intervalles.
- Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.
- Introduction à la topologie de $\mathbb{R}$.
  - ⋆ Voisinages d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$.
  - ⋆ Brève introduction aux notions de points intérieurs, de points adhérents, de partie ouverte/fermée (HP)
  - ⋆ Notion de partie dense dans $\mathbb{R}$. Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.