Programme de colles - Semaine n^{o} 8

du 18 au 24 novembre 2024

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

10 – Calcul intégral

11 – Équations différentielles linéaires

12 – Arithmétique des entiers (*en cours uniquement)*

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Montrer que l'ensemble des solutions de $y' + a(x)y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-A(x)} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ avec A une primitive de a sur un intervalle sur lequel a est continue.
- Montrer[1] que, si y_0 est solution particulière de (E) : $y' + a(x)y = b(x)$, alors l'ensemble des solutions de (E) est $\{x \mapsto y_0(x) + \lambda \mathrm{e}^{-A(x)} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$
- Montrer l'existence du quotient et du reste de la division euclidienne d'un entier $a \geqslant 0$ par un entier $b > 0$.
- Montrer l'unicité du quotient et du reste de la division euclidienne d'un entier a par un entier non nul b.
- Montrer que, pour tous entiers naturels a, b et k non nuls, $(ka) \wedge (kb) = k\,(a \wedge b)$.
- Montrer le théorème (lemme) de Gauss puis s'en servir pour prouver l'unicité de la forme irréductible d'un rationnel.
- Montrer que, pour tous a, b et c entiers,
  - ⋆ si $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$, alors $a \wedge (bc) = 1$.
  - ⋆ si $a|c$, $b|c$ et $a \wedge b = 1$, alors $ab|c$.

Le reste de la colle (les 45 minutes restantes) consistera en des résolutions d'EDL d'ordre 1 ou d'EDL d'ordre 2 à coefficients constants[2] puis des calculs d'intégrales s'il reste du temps.

Prévisions pour la semaine 8 : chapitres 10 et 11 (équations différentielles linéaires)

1. sans redémontrer l'ensemble des solutions de l'EHA.
2. ou (de façon guidée) des équations intégrales ou des équations différentielles non linéaires ou des EDL d'ordre supérieur qui se ramènent à des EDL du programme

Détails des chapitres au programme

Chapitre 10 – Calcul intégral

cf. programme de la semaine 7.

Chapitre 11 – Équations différentielles linéaires

- Brève introduction à la notion d'équation différentielle. Ordre d'une équation différentielle. Équation différentielle linéaire.
- Équations différentielles linéaires du premier ordre.
  - ⋆ Forme générale $\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$. Quitte à restreindre le domaine d'étude, on se ramène à $(E) : y' + a(x)y = b(x)$, avec a et b supposées continues sur un intervalle.
  - ⋆ Résolution de l'EHA $(H) : y' + a(x)y = 0$. Cas où a est constante.
  - ⋆ Ensemble des solutions quand on connaît une solution particulière de (E) et l'ensemble des solutions de l'EHA.
  - ⋆ Méthode de variation de la constante.
  - ⋆ Problème de Cauchy. Interprétation géométrique.
  - ⋆ Principe de superposition.
  - ⋆ Quelques mots sur les recollements (on en reparlera dans le chapitre 22).
- Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.
  - ⋆ Forme générale $(E) : y'' + ay' + by = f(x)$ avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et f supposée continue
  - ⋆ Résolution de l'EHA $(H) : y'' + ay' + by = 0$ dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ selon que le discriminant de l'équation caractéristique $(C) : r^2 + ar + b = 0$ est nul ou non. Résolution dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ selon le signe du discriminant.
  - ⋆ Ensemble des solutions quand on connaît une solution particulière de (E) et l'ensemble des solutions de l'EHA.
  - ⋆ Problème de Cauchy. Interprétation géométrique.
  - ⋆ Principe de superposition.
  - ⋆ Recherche d'une solution particulière dans le cas d'un second membre polynomiale ou exponentiel. Cas d'un second membre trigonométrique en prenant partie réelle ou partie imaginaire.

Chapitre 12 – Arithmétique des entiers (le début)

- Divisibilité dans $\mathbb{Z}$
  - ⋆ Diviseurs et multiples. Notation $a\mathbb{Z}$. Diviseurs et multiples de 0, 1, -1.
  - ⋆ Premières propriétés. Entiers associés. Transitivité. Compatibilité avec les combinaisons linéaires, avec le produit, avec les puissances entières naturelles.
  - ⋆ Théorème de la division euclidienne. Méthode pratique. Divisibilité et reste nul. Caractérisation des entiers impairs.
- PGCD et PPCM
  - ⋆ PGCD de deux entiers naturels. Premières propriétés. Cas où l'un divise l'autre. Algorithme d'Euclide. Relations de Bezout. Méthode pratique pour déterminer une relation de Bezout. L'ensemble des diviseurs communs de deux entiers naturels est l'ensemble des diviseurs de leur PGCD. Factorisation dans un PGCD. PGCD de deux entiers relatifs .
  - ⋆ Entiers premiers entre eux. Division par le PGCD pour obtenir des entiers premiers entre eux. Théorème de Bezout. Théorème de Gauss. Produit d'entiers premiers avec un autre commun. Conséquence sur le produit d'entiers. Forme irréductible d'un rationnel. Équations diophantiennes du type $au + bv = c$.

- ⋆ PPCM de deux entiers. Cas où l'un divise l'autre. Lien entre PPCM et PGCD. Factorisation dans un PPCM. PPCM de deux entiers relatifs. Tout multiple commun à deux entiers est un multiple de leur PPCM.
- ⋆ Extension à plus de deux entiers. Associativité du PGCD. Entiers premiers entre eux deux à deux. Théorème de Bezout. Cas des produits d'entiers. Factorisation dans le PGCD. Si deux entiers sont premiers entre eux, alors des puissances de ces entiers aussi. Puissance d'un PGCD.