Programme de colles - Semaine n$^{\text{o}}$ 7

du 11 au 17 novembre 2024

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

8 – Systèmes linéaires

9 – Décomposition en éléments simples

10 – Calcul intégral

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Résoudre un système linéaire à 3 équations et 3 inconnues à coefficients entiers choisi par l'examinateur avec la méthode du pivot de Gauss [1].
- Déterminer une primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$ lorsque a et b sont non nuls (en utilisant des nombres complexes).
- Montrer que $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt = 0$ à l'aide d'une étude de fonction.
- Montrer que [2], pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ où
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t.$$
- Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ avec le changement de variable $x = \sin(t)$.
- Calculer [3] $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^3}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Déterminer une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{2+\cos(x)}$ sur $]-\pi\,;\pi[$ via le changement de variable $x = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

Le premier exercice sera une décomposition en éléments simples [4] (débouchant éventuellement sur un calcul de primitive). Les autres exercices seront des calculs d'intégrale (il y aura encore des calculs d'intégrales la semaine suivante) en reconnaissant directement une primitive, en faisant des IPP et/ou des changements de variables.

Prévisions pour la semaine 8 : chapitres 10 et 11 (équations différentielles linéaires)

1. C'est principalement le respect de la méthode qui est évalué dans cette question de cours. On utilisera aussi la méthode du pivot de Gauss pour l'étape de remontée.
2. On obtient une relation de récurrence avec une IPP et on peut ensuite conclure par récurrence immédiate après avoir calculé les premiers termes et expliqué rapidement à l'oral comment on calcule le produit des premiers nombres impairs.
3. En cherchant une relation de récurrence sur la suite $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n(x) = \displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$.
4. La méthode est laissée libre... même si on préfèrera multiplier par les $(x-r)^m$ (où m est la multiplicité du pôle r) et faire tendre x vers r dans un premier temps.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 8 – Systèmes linéaires

cf. programme de la semaine 6

Chapitre 9 – Décomposition en éléments simples

- Rappels et compléments sur les fonctions polynomiales et rationnelles.
  - ⋆ Fonction polynomiale. Unicité des coefficients. Degré. Coefficient dominant. Coefficient constant. Degré d'un produit, d'une puissance entière.
  - ⋆ Division euclidienne de fonctions polynomiales.
  - ⋆ Racines. Un polynôme de degré p a au plus p racines. Factorisation par $x - a$ lorsque a est racine. Théorème de factorisation des fonctions polynomiales sur $\mathbb{C}$, sur $\mathbb{R}$.
  - ⋆ Fonctions rationnelles sur $\mathbb{K}$. Notion de pôle.
- Théorème de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.
- Méthodes pratiques de décomposition en éléments simples
  - ⋆ En résolvant un système : par unicité des coefficients ou en évaluant en des valeurs particulières.
  - ⋆ Technique de base : multiplication puis limite en un pôle. Cas où tous les pôles sont simples. Cas des pôles multiples.
  - ⋆ Autres méthodes : utilisation des limites en $\pm\infty$, utilisation de la parité, faire un détour par les complexes (à éviter toutefois).

Chapitre 10 – Calcul intégral

- Primitives.
  - ⋆ Notion de primitive. Si f est continue sur un intervalle, alors f admet une primitive sur I. Unicité des primitives à une constante additive près. Unicité de la primitive qui passe par un point donné du plan.
  - ⋆ Primitives des fonctions usuelles.
  - ⋆ Linéarité de la primitivation.
  - ⋆ Primitive d'une fonction se présentant comme un produit (de la forme $u' \times G \circ u$). Cas particuliers des fonctions du type $\varphi' \times \mathrm{e}^{\varphi}$ avec $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$. Cas particulier des fonctions du type $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ ou $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$.
- Intégrales d'une fonction continue.
  - ⋆ Aire sous la courbe d'une fonction continue positive (définition intuitive et admise pour le moment) puis à valeurs réelles puis à valeurs complexes. Inversion des bornes. Cas des mêmes bornes.
  - ⋆ Théorème fondamental de l'analyse. Lien entre primitives et intégrales. Primitive générique. Dérivation des fonctions définies par une intégrale (dont les bornes varient).
  - ⋆ Relation de Chasles. Linéarité de l'intégrale.
- Intégration par parties.
- Changement de variable. Intégrales d'une fonction paire/impaire sur un domaine symétrique par rapport à l'origine.
- Primitive d'une fonction rationnelle réelle.
  - ⋆ Primitives de $x \mapsto 1/(x-r)^n$.
  - ⋆ Primitives de $x \mapsto 1/(ax^2+bx+c)$.
  - ⋆ Primitives de $x \mapsto (\lambda x+\mu)/(ax^2+bx+c)^n$.
  - ⋆ Fonctions polynomiales ou rationnelles en $\cos$ et $\sin$.