

Programme de colles - Semaine n° 6

du 4 au 10 novembre 2024

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

7 – Sommes et produits

8 – Systèmes linéaires

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examineur parmi la liste suivante :

- Énoncer (sans démonstration) les formules d'interversion de sommes doubles sur un domaine rectangulaire, triangulaire, triangulaire strict ainsi que la formule de développement/factorisation et la formule donnant le carré d'une somme avec des doubles produits.
- Déterminer (en redémontrant tout) le produit des entiers pairs de 1 à $2n$ et le produit des entiers impairs de 1 à $2n$.
- Énoncer et démontrer la formule du triangle de Pascal.
- Énoncer la formule du binôme de Newton et exposer l'étape d'hérédité de sa démonstration par récurrence.
- Démontrer la « formule du chef » et calculer $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.
- Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ est une racine de la fonction polynomiale

$$x \mapsto \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p (1-x^2)^p x^{n-2p}.$$

Les exercices (les 45 minutes restantes) consisteront essentiellement en des calculs de sommes et de produits de nombres réels ou complexes et de preuve de formules faisant intervenir des sommes et des produits.

Prévisions pour la semaine 7 : chapitre 8, 9 (décomposition en éléments simples) et 10 (calcul intégral).

Détails des chapitres au programme

Chapitre 7 – Sommes et produits

- Sommes de nombres.
 - ★ Notation \sum . Somme de complexes, d'une borne inférieure à une borne supérieure, sur les indices d'une famille, sur un nombre fini d'indices vérifiant une propriété. Somme vide. Nombre de termes dans une somme.
 - ★ Somme d'un terme constant. Somme des premiers entiers, des premiers carrés d'entiers, des premiers cubes d'entiers. Sommes géométriques Somme des n racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité. Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$.
 - ★ Relation de Chasles. Sommation par paquet. Factorisation par une constante. Linéarité de la somme. Linéarité de la conjugaison, des parties réelles et imaginaires. Application : somme de sinus, de cosinus. Changement d'indice. Sommes télescopiques. Somme d'inégalités. Inégalité triangulaire.
 - ★ Sommes doubles et interversion de sommes. Cas des domaines rectangulaires, triangulaires, triangulaires stricts. Un mot sur le cas général et sur les sommes multiples.
 - ★ Multiplication de deux sommes. Carré d'une somme. Formule avec les doubles produits.
- Produits de nombres.
 - ★ Notation \prod . Produit de complexes, d'une borne inférieure à une borne supérieure, sur les indices d'une famille, sur un nombre fini d'indices vérifiant une propriété. Produit vide.
 - ★ Relation de Chasles. Multiplication par paquets. Produits télescopiques. Changement d'indice. Produits doubles, interversion de produits.
 - ★ Factorisation dans un produit. Produit de multiplications, d'inverses, de quotients, de puissances entières, de modules, de conjugués. Produit d'inégalités.
 - ★ Produit d'exponentielles. Logarithme d'un produit. Produit de puissances généralisées.
 - ★ Factorielles. Produit des premiers nombres pairs ou impairs.
 - ★ Coefficients binomiaux. Définition $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. Écriture en produit. Convention $\binom{n}{p} = 0$ pour $p \notin \llbracket 0; n \rrbracket$. Cas particuliers $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{n}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{n-1}$ et $\binom{n}{2}$. Symétrie. Formule du chef. Formule de Pascal. Les coefficients binomiaux sont des entiers. Triangle de Pascal.
- Formule du binôme de Newton. Cas particuliers classiques. Application à la trigonométrie pour obtenir des formules trigonométriques de factorisation.
- Sommes et produits de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} .

Chapitre 8 – Systèmes linéaires

- Définitions et exemples
 - ★ Système linéaire à n équations et p inconnues. Coefficients. Second membre. Inconnues. Lignes. Système homogène. Solutions. Système équivalents. Système compatible/incompatible.
 - ★ Somme et multiplication par un scalaire d'un élément de \mathbb{K}^p .
 - ★ Résolution des système triangulaires lorsque $n = p$. Existence et unicité d'une solution si et seulement si les coefficients diagonaux sont tous non nuls. Remontées successives.
 - ★ Cas triangulaire lorsque $n < p$. Infinité de solutions si et seulement si les coefficients diagonaux sont tous non nuls (aucune sinon). Cas $n > p$.
- Méthode du pivot de Gauss
 - ★ Opérations sur les lignes d'un système : $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftrightarrow L_i + \alpha L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ et $L_i \leftrightarrow \lambda L_i + \alpha L_j$ lorsque $\lambda \neq 0$. Ces opérations donnent un système équivalent.
 - ★ Méthode du pivot de Gauss : cas général et multiples exemples. Bilan sur le nombre de solutions.