Programme de colles - Semaine n° 5

du 14 au 20 octobre 2024

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

6 – Nombres complexes

7 – Sommes et produits (*en cours uniquement*)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Montrer que, si $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{C}$ dérivable sur E, alors e^{φ} est une fonction dérivable sur E de dérivée $\varphi' \mathrm{e}^{\varphi}$.
- Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toutes les racines $n^{\text{ième}}$ d'un complexe non nul et montrer qu'il y en a exactement n (distinctes).
- Déterminer les (formes algébriques des) deux racines carrées d'un complexe non réel $X + \mathrm{i}Y$ donné sous forme algébrique.
- Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
- Énoncer la formule de factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$, pour tout $(a, b, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}^*$, et la montrer avec télescopage.

Les exercices (les 45 minutes restantes) consisteront essentiellement à faire des calculs sur les nombres complexes, à déterminer et utiliser la forme exponentielle d'un complexe, à résoudre des équations sur les nombres complexes (faisant intervenir des fonctions polynomiales complexes ou des exponentielles de complexes), à montrer des formules de trigonométrie avec des complexes (via formules d'Euler, de Moivre, de l'angle moitié) ou des exercices de géométrie utilisant des nombres complexes.

Pas de sommes ou produits de complexes (avec symboles $\sum$ ou $\prod$) en exercice cette semaine.

Prévisions pour la semaine 6 (après les vacances) : chapitre 7 (sommes et produits)

Détails des chapitres au programme

Chapitre 6 – Nombres complexes

- Notion de nombre nombre complexe.
  - ⋆ Existence admise des nombres complexes. Ensemble $\mathbb{C}$. Les opérations d'addition et produit prolongent celles sur $\mathbb{R}$. Complexe i. Unicité de l'écriture algébrique.
  - ⋆ Soustraction. Développement, factorisation. Inverse d'un complexe non nul. Division de complexes. Simplification de termes. Produit nul de complexes. Puissances entières sur $\mathbb{C}$.
  - ⋆ Inégalités dans $\mathbb{C}$: cela n'a pas de sens !
  - ⋆ Parties réelles et imaginaires. Linéarité. Imaginaire pur.
  - ⋆ Interprétation géométrique des complexes. Plan complexe. Affixe d'un point ou d'un vecteur du plan.
  - ⋆ Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Fonctions parties réelles et imaginaires. La continuité et la dérivabilités sont définies par celles des parties réelles et imaginaires. Notation $\mathscr{C}^0(E,\mathbb{C})$ et $\mathscr{C}^1(E,\mathbb{C})$. Caractérisation des fonctions constantes sur un intervalle par la dérivée.
- Conjugaison et module.
  - ⋆ Conjugué d'un complexe. Interprétation géométrique (symétrie par rapport à l'axe des abscisses). Conjugué d'un conjugué. Caractérisation des réels et imaginaires purs avec le conjugué. Somme, produit, quotient, puissance entière de conjugués. Expression des parties réelles et imaginaires avec le conjugué.
  - ⋆ Module d'un complexe. Interprétation géométrique (distance à l'origine). Cercle, disque, disque ouvert. Les valeurs absolues des parties réelles et imaginaires sont majorées par le module. Expression du carré du module avec le conjugué. Module d'un produit, d'un conjugué, d'un quotient, d'une puissance. Inégalité triangulaire (et cas d'égalité). Inégalité triangulaire renversée.
- Forme trigonométrie d'un complexe.
  - ⋆ Complexes de module 1.
    - — Ensemble $\mathbb{U}$. Stabilité par produit, passage à l'inverse, quotient et conjugaison.
    - — Exponentielle d'un imaginaire pur. Périodicité. Produit, conjugué, inverse, conjugué, quotient, puissances entières d'exponentielles d'imaginaire pur.
    - — Retour à la trigonométrie. Formules d'Euler et de Moivre. Linéarisation et la factorisation d'expressions trigonométriques. Méthode de l'arc moitié.
  - ⋆ Arguments d'un complexe non nul.
    - — Notion d'argument. Lien entre deux arguments. Argument principal.
    - — Argument d'un produit, du conjugué, d'un quotient. Argument d'une somme de deux complexes ayant un même argument. Caractérisation d'appartenance à $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$, $\mathbb{R}^*$ et $\mathrm{i}\mathbb{R}$.
    - — Interprétation géométrique d'un argument. Critères d'alignement et d'orthogonalité.
  - ⋆ Notation exponentielle d'un complexe non nul. Cas d'égalité. Utilisation de Arccos, Arcsin ou Arctan.
  - ⋆ Exponentielle d'un complexe. Partie réelle, imaginaire, module et argument de l'exponentielle d'un complexe. Propriété d'addition. Cas d'égalité. Résolution d'équations du type $\mathrm{e}^z = a$. Dérivabilité de fonction du type e^φ avec $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$.
- Racines $n^{\text{ièmes}}$.
  - ⋆ Résolution de $\zeta^n = z$. Notation exponentielle de n racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un complexe non nul.
  - ⋆ Racines de l'unité. Interprétation géométrique. Propriétés du complexe j. Notation $\mathbb{U}_n$. Stabilité par produit, inverse, conjugaison.
- Équations polynomiales à coefficients complexes.
  - ⋆ Notion de fonction polynomiale sur $\mathbb{C}$. Unicité des coefficients. Degré. Coefficient dominant. Notion de racine.

    - ⋆ Méthode de détermination des racines carrées d'un complexe.
    - ⋆ Équations polynomiales de degré 2. Le cas des coefficients réels. Factorisation et racines dans le cas général. Relation coefficients/racines. Résolution du système $\left\{\begin{array}{l} x+y=s \\ xy=p \end{array}\right.$
    - ⋆ Factorisation par $z-a$ lorsque a est une racine.
- Transformations usuelles du plan complexe.
    - ⋆ Translations. Homothéties. Rotations.
    - ⋆ Similitudes directes.