

Programme de colles - Semaine n° 4

du 7 au 13 octobre 2024

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

5 – Trigonométrie

6 – Nombres complexes (*en cours uniquement*)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examineur parmi la liste suivante :

- Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.
- Montrer que, pour tout $x \in [-1; 1]$, $\cos(\operatorname{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$ puis prouver que Arcsin est dérivable sur $] -1; 1[$ de dérivée $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Résoudre l'équation $\operatorname{Arcsin}(x) = \operatorname{Arccos}(x)$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ (par analyse-synthèse).
- Montrer l'inégalité triangulaire pour les nombres complexes (avec le cas d'égalité).
- Retrouver les formules de factorisation de $\cos(a) - \cos(b)$ et $\sin(a) - \sin(b)$ pour tous réels a et b , en utilisant la méthode de l'angle-moitié.
- Déterminer, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, la forme exponentielle de $1 + e^{in\theta}$.

Les exercices (les 45 minutes restantes) consisteront essentiellement en la résolution d'équations (ou inéquations) trigonométriques, en preuves d'identités impliquant les fonctions trigonométriques réciproques (via dérivation et/ou utilisation de formules de trigonométrie) ou encore de preuves d'inégalités ou d'études de fonctions impliquant les fonctions trigonométriques et leurs réciproques. Il sera notamment vérifié que vous savez déterminer, en fonction de Arctan , Arcsin ou Arctan , un angle dont le sinus et le cosinus sont donnés.

Prévisions pour la semaine 5 : chapitre 6 (complexes)

Détails des chapitres au programme

Chapitre 5 – Trigonométrie

- Sinus et cosinus d'un réel.
 - ★ Cercle trigonométrie. Angle. Cosinus et sinus d'un angle.
 - ★ Identité fondamentale. Valeurs remarquables. Périmètre d'un arc de cercle, aire d'une portion de disque. Périodicité.
 - ★ Signe du sinus et du cosinus d'un angle de $[-\pi; \pi]$.
 - ★ Formules de trigonométrie (formules d'addition, formules de décalage, formules de duplication, formules de l'angle triple, formules de linéarisation, formules de factorisation).
 - ★ Congruences de réels. Équations trigonométriques.
 - ★ Tangente d'un réel. Interprétation géométrique. Propriétés (périodicité, valeurs remarquables, signe, formules de décalage, formules d'addition, formules de duplication, formule $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$). Formules donnant $\tan(a)$, $\sin(a)$ et $\cos(a)$ en fonction de $t = \tan(a/2)$.
- Fonctions circulaires.
 - ★ Fonctions sinus et cosinus
 - Périodicité, parité/imparité, minoration/majoration, signe sur \mathbb{R} .
 - Continuité, dérivabilité, variations, convexité/concavité, courbes.
 - Paramétrisation du cercle trigonométrie. Écriture de $a \cos(x) + b \sin(x)$ sous la forme $C \cos(x - \varphi)$.
 - ★ Fonction tangente. Périodicité, parité/imparité, minoration/majoration, signe sur \mathbb{R} , continuité, dérivabilité, variations, convexité/concavité, limites, courbe.
- Fonctions circulaires réciproques.
 - ★ Fonction Arctangente.
 - Définition comme réciproque de \tan restreinte à $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Continuité, imparité, monotonie, limites. Valeurs remarquables.
 - Expressions de $\tan(\text{Arctan}(x))$ et $\text{Arctan}(\tan(x))$. Résolution de $\alpha = \text{Arctan}(A)$.
 - Dérivabilité, convexité/concavité, courbe.
 - Quelques égalités remarquables à savoir retrouver : $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(\frac{1}{x}) = \pm \frac{\pi}{2}$ selon le signe de x , valeurs de $\cos(\text{Arctan}(x))$ et $\sin(\text{Arctan}(x))$.
 - ★ Fonction Arcsinus.
 - Définition comme réciproque de \sin restreinte à $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Continuité, imparité, monotonie. Valeurs remarquables.
 - Expressions de $\sin(\text{Arcsin}(x))$ et $\text{Arcsin}(\sin(x))$. Résolution de $\alpha = \text{Arcsin}(A)$.
 - Dérivabilité, convexité/concavité, courbe.
 - ★ Fonction Arccosinus.
 - Définition comme réciproque de \cos restreinte à $[0; \pi]$. Continuité, monotonie. Valeurs remarquables.
 - Expressions de $\cos(\text{Arccos}(x))$ et $\text{Arccos}(\cos(x))$. Résolution de $\alpha = \text{Arccos}(A)$.
 - Dérivabilité, convexité/concavité, courbe.

Chapitre 6 – Nombres complexes

- Notion de nombre complexe.
 - ★ Existence admise des nombres complexes. Ensemble \mathbb{C} . Les opérations d'addition et produit prolongent celles sur \mathbb{R} . Complexe i . Unicité de l'écriture algébrique.

- ★ Soustraction. Développement, factorisation. Inverse d'un complexe non nul. Division de complexes. Simplification de termes. Produit nul de complexes. Puissances entières sur \mathbb{C} .
- ★ Inégalités dans \mathbb{C} : cela n'a pas de sens !
- ★ Parties réelles et imaginaires. Linéarité. Imaginaire pur.
- ★ Interprétation géométrique des complexes. Plan complexe. Affixe d'un point ou d'un vecteur du plan.
- ★ Fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} . Fonctions parties réelles et imaginaires. La continuité et la dérivabilité sont définies par celles des parties réelles et imaginaires. Notation $\mathcal{C}^0(E, \mathbb{C})$ et $\mathcal{C}^1(E, \mathbb{C})$. Caractérisation des fonctions constantes sur un intervalle par la dérivée.
- Conjugaison et module.
 - ★ Conjugué d'un complexe. Interprétation géométrique (symétrie par rapport à l'axe des abscisses). Conjugué d'un conjugué. Caractérisation des réels et imaginaires purs avec le conjugué. Somme, produit, quotient, puissance entière de conjugués. Expression des parties réelles et imaginaires avec le conjugué.
 - ★ Module d'un complexe. Interprétation géométrique (distance à l'origine). Cercle, disque, disque ouvert. Les valeurs absolues des parties réelles et imaginaires sont majorées par le module. Expression du carré du module avec le conjugué. Module d'un produit, d'un conjugué, d'un quotient, d'une puissance. Inégalité triangulaire (et cas d'égalité). Inégalité triangulaire renversée.
- Forme trigonométrie d'un complexe.
 - ★ Complexes de module 1.
 - Ensemble \mathbb{U} . Stabilité par produit, passage à l'inverse, quotient et conjugaison.
 - Exponentielle d'un imaginaire pur. Périodicité. Produit, conjugué, inverse, conjugué, quotient, puissances entières d'exponentielles d'imaginaire pur.
 - Retour à la trigonométrie. Formules d'Euler et de Moivre. Linéarisation et la factorisation d'expressions trigonométriques. Méthode de l'arc moitié.
 - ★ Arguments d'un complexe non nul.
 - Notion d'argument. Lien entre deux arguments. Argument principal.
 - Argument d'un produit, du conjugué, d'un quotient. Argument d'une somme de deux complexes ayant un même argument. Caractérisation d'appartenance à \mathbb{R}_+^* , \mathbb{R}_-^* , \mathbb{R}^* et $i\mathbb{R}$.
 - Interprétation géométrique d'un argument. Critères d'alignement et d'orthogonalité.
 - ★ Notation exponentielle d'un complexe non nul. Cas d'égalité. Utilisation de Arccos, Arcsin ou Arctan.