

Programme de colles - Semaine n° 31

du 9 au 15 juin 2025

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

- 34 – Codage matriciel
- 35 – Groupe symétrique
- 36 – Déterminant

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examineur parmi la liste suivante :

- Montrer les premières propriétés des formes n -linéaires alternées¹.
- Montrer que l'espace vectoriel des formes n -linéaires alternées sur E est de dimension 1 et que $(\det_{\mathcal{B}})$ en est une base pour toute base $\mathcal{B}$ de E (on admettra dans cette question que $\det_{\mathcal{B}}$ est bien une forme n -linéaire alternée sur E).
- Montrer l'existence et l'unicité² du déterminant d'un endomorphisme u . Montrer ensuite que le déterminant d'une composée d'endomorphismes est le produit des déterminants et enfin que le déterminant d'un endomorphisme est nul si et seulement s'il est bijectif.
- Montrer que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des coefficients diagonaux.
- Calculer le déterminant de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

- Montrer que, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $A \times (\text{com}(A))^T = \det(A)I_n$.

Le reste de la colle (les 45 minutes restantes) consistera en des exercices de représentations matricielles (plutôt axés sur les matrices semblables et équivalentes) et de calculs de déterminants (pas d'exercices théoriques, juste du calcul).

Voilà c'est fini pour cette année !

1. Permuter les vecteurs multiplie par la signature de la permutation, ajouter à un vecteur une CL des autres laisse invariant le déterminant, nullité en une famille liée.

2. La définition de $\det(u)$ est d'être l'unique scalaire α tel que, pour toute forme linéaire n -alternée sur E et tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $f(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \alpha f(x_1, \dots, x_n)$. On obtient alors $\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))$.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 34 – Codage matriciel

- Cf. programme de la semaine 30.

Chapitre 35 – Groupe symétrique

- Structure de groupe.
 - ★ Définition d'une permutation. Notation S_n . C'est un groupe de cardinal $n!$.
Notation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$. Composition et puissance (notation multiplicative de la composition). Groupe non abélien si $n \geq 3$.
 - ★ Support d'une permutation. Le support d'une composition est inclus dans l'union des supports. Si les supports sont disjoints, il y a égalité et les permutations commutent.
 - ★ Orbite d'un élément suivant une permutation. Relation d'équivalence.
 - ★ Transpositions et cycles. Notation cyclique.
- Décomposition d'une permutation.
 - ★ Décomposition en produit de cycles à supports disjoints. Unicité à l'ordre près des termes. Méthode.
 - ★ Décomposition en produit de transpositions. Non unicité. Méthodes.
- Signature $\varepsilon(\sigma)$ d'une permutation σ . Si σ est le produit de p permutations, alors sa signature est $(-1)^p$. Signature d'un cycle.

Chapitre 36 – Déterminant

- Introduction géométrique du déterminant
- Forme n -linéaires alternées.
 - ★ Applications multilinéaires. Formule de développement. Factorisation plusieurs fois par un scalaire.
 - ★ Formes alternées. Échanger deux vecteurs multiplie par -1 . Permuter des vecteurs multiplie par la signature. Invariance par ajout à un terme une combinaison linéaire des autres termes. Nullité en une famille liée.
- Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base.
 - ★ Déterminant dans une base $\mathcal{B}$: définition avec la somme. Notation $\det_{\mathcal{B}}$. C'est l'unique forme n -linéaire alternée sur E qui vaut 1 sur $\mathcal{B}$. L'ensemble des formes n -linéaires alternées sur E est un K -espace vectoriel de dimension 1 dont $(\det_{\mathcal{B}})$ est une base.
 - ★ Propriété de changement de base. CNS pour qu'une famille soit une base. Propriétés de $\det_{\mathcal{B}}$ en tant que forme n -linéaire alternée. Bref retour sur l'orientation d'une base.
- Déterminant d'un endomorphisme.
 - ★ Définition comme unique scalaire α tel que, pour toute forme n -linéaire alternée f sur E et tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $f(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \alpha \times f(x_1, \dots, x_n)$. Conséquence : $\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))$ quelle que soit la base $\mathcal{B}$.
 - ★ Déterminant de l'identité. Formules $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$ et $\det(v \circ u) = \det(v) \det(u)$. Caractérisation des automorphismes avec le déterminant. Le déterminant induit un morphisme de groupes de $GL(E)$ dans $\mathbb{K}^*$. Interprétation géométrique.
- Déterminant d'une matrice carrée.
 - ★ Définition avec la somme. Définitions équivalentes : le déterminant de A est le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique ou encore le déterminant de tout endomorphisme représenté par A . Le déterminant est polynomial en ses coefficients.

- ★ Propriétés héritées de celles du déterminant d'un endomorphisme : $\det(I_n) = 1$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, $\det(AB) = \det(A) \det(B)$. Caractérisation des matrices inversibles avec le déterminant. Le déterminant induit un morphisme de groupes de $GL_n(K)$ dans $\mathbb{K}^*$. Invariance du déterminant par similitude. Déterminant d'une transposée. Propriétés héritées de caractère n -linéaire alternée du déterminant.
- Calculs de déterminants
 - ★ Cas des matrices carrées d'ordre 2 ou 3 (règle de Sarrus).
 - ★ Cas des matrices triangulaires et diagonales.
 - ★ Utilisation de la méthode du pivot de Gauss.
 - ★ Développement par rapport à une ligne ou une colonne. Divers exemples. Déterminant de Vandermonde.
 - ★ Comatrice et expression de l'inverse.