Programme de colles - Semaine n° 30

du 2 au 8 juin 2025

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

33 – Variables aléatoires finies

34 – Codage matriciel

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Lorsque X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega, \mathbb{P})$ fini, donner la définition de $\mathbb{E}(X)$ et montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$. Énoncer ensuite le théorème de transfert et le démontrer.
- Calculer l'espérance (en l'écrivant comme somme de variables i.i.d de loi de Bernoulli) et la variance (par un calcul de somme avec le théorème de transfert et la formule de Koenig-Huygens) d'une variable aléatoire de loi binomiale
- Énoncer le inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
- Montrer qu'une matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente.
- Déterminer une CNS pour qu'une matrice de Vandermonde soit inversble.
- Donner la définition d'une matrice de passage, montrer ses premières propriétés [1] puis les deux formules de changement de base [2].
- Montrer que, si E et F sont de dimensions finies p et n respectivement et, si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est de rang r, alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{B}'$ de F telles que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f) = J_r$ (la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf les r premiers coefficients « diagonaux »).

Le reste de la colle (les 45 minutes restantes) consistera en un exercice utilisant des représentations matricielles. Un deuxième exercice portera sur la fin du chapitre sur les variables aléatoires (espérance, variance, inégalité de concentration).

Prévisions pour la semaine 31 : chapitre 34 et chapitre 36 (déterminants)

1. $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{Id}_E)$, $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}} = \mathrm{I}_n$, $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}$, $P^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$.
2. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}',\mathscr{B}'}(f) = P_{\mathscr{C}',\mathscr{C}}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 33 – Variables aléatoires sur un univers fini

- Notion de variable aléatoire finie.
  - ⋆ Variable aléatoire sur Ω à valeurs dans E. Variable aléatoire réelle. Univers image ou support $X(\Omega)$. Exemples de construction explicite.
  - ⋆ Événements associés à X : $[X \in A] = X^{-1}(A)$, $[X = a] = X^{-1}(\{a\})$ et, quand cela a un sens, $[X \leqslant a]$, $[a \leqslant X \leqslant b]$, etc. Système complet d'événements associé à X.
- Loi d'une variable aléatoire.
  - ⋆ Notation $\mathbb{P}_X$. C'est une probabilité sur $X(\Omega)$. Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire par les $\mathbb{P}(X = x)$, $x \in X(\Omega)$. La famille $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est une distribution de probabilités sur $X(\Omega)$. Lien entre les $\mathbb{P}(X \leqslant k)$ et les $\mathbb{P}(X = k)$ lorsque $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Existence d'une variable aléatoire de loi donnée. Égalité en loi (notation $X \sim Y$).
  - ⋆ Lois usuelles : loi certaine, loi uniforme sur E (notation $\mathcal{U}(E)$), loi de Bernoulli (notation $\mathcal{B}(p)$), loi binomiale (notation $\mathcal{B}(n, p)$). L'indicatrice d'un événement suit une loi de Bernoulli. Une variable aléatoire comptant le nombre de succès dans n répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès p suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$.
  - ⋆ Loi d'un transfert de variable aléatoire. Notation $f(X)$. Formule de $\mathbb{P}(f(X) = y)$ comme somme des $\mathbb{P}(X = x)$ sur tous les antécédents x de y par f. Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$.
  - ⋆ Loi conditionnelle sachant qu'un événement de probabilité non nulle est réalisé.
  - ⋆ Loi d'un couple de variables aléatoires.
    - — Loi conjoindre d'un couple. Confusion entre $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et $(X, Y)(\Omega)$ quitte à ce que des événements élémentaires soient de probabilités nulles. Existence d'un couple de variables aléatoires de loi donnée.
    - — Lois marginales. La connaissance de la loi conjoindre d'un couple (X, Y) de variables aléatoires permet toujours d'en déduire les lois marginales du couple (utilisation de la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement associé à une marginale). La réciproque est fausse.
    - — Généralisation aux n-uplets de variables aléatoires.
- Variables aléatoires indépendantes.
  - ⋆ Indépendance de deux variables aléatoires. Caractérisation $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$ pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Existence d'un couple de variables aléatoires indépendantes de lois marginales données. Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$.
  - ⋆ Indépendance mutuelle de n variables aléatoires. Lien avec les événements mutuellement indépendants. Sous-famille de variables aléatoires. Caractérisation. Existence d'un n-uplet de variables aléatoires indépendantes de lois marginales données.
  - ⋆ Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp f(Y)$. Lemme des coalitions.
  - ⋆ Méthodes pour trouver la loi du maximum/minimum de variables aléatoires indépendantes. Méthodes pour trouver la loi d'une somme de variables aléatoires indépendantes. Stabilité de la loi binomiale. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont i.i.d de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1 + \cdots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$.
- Espérance et variance.
  - ⋆ Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe.
    - — Définition $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$. Interprétation. Variable centrée. Espérance d'une variable constante.
    - — Formule $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$. Linéarité de l'espérance. Variable centrée associée à X. Positivité de l'espérance. Croissance de l'espérance. Inégalité triangulaire.

— Espérance des variables aléatoires des variables aléatoires de lois usuelles ($\mathcal{U}([\![a\,;b]\!])$, $\mathcal{B}(p)$, $\mathcal{B}(n,p)$). Si $E \subset \mathbb{C}$ et $X \sim \mathcal{U}(E)$, alors $\mathbb{E}(X)$ est la moyenne arithmétique des éléments de E. Formule $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.

— Théorème de transfert.

— L'indépendance multiplie les espérance.

- ⋆ Variance d'une variable aléatoire réelle.

  — Définition et interprétation (notation $\mathbb{V}(X)$). Positivité de la variance. CNS de variance nulle. Écart-type (notation $\sigma(X)$). Variable réduite.

  — Formule de Koenig-Huygens. Formules $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$ et $\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$. Variable centrée réduite associée à X.

  — Variance des variables aléatoires des variables aléatoires de lois $\mathcal{B}(p)$ et $\mathcal{B}(n,p)$.

  — Covariance. Formule de Koenig-Huygens pour la variance. Variables décorrélées. Des variables indépendantes sont décorrélées mais la réciproque est fausse. Formule de développement de la variance d'une somme avec la covariance. L'indépendance somme les variances.

- Inégalités de concentration

  - ⋆ Inégalité de Markov. Inégalité de Bienyaimé-Tchebychev.
  - ⋆ Application aux sommes de variables indépendantes. Cas binomial. Interprétation fréquentiste. Introduction à la loi faible des grands nombres (HP).

Chapitre 34 – Codage matriciel

- Représentation matricielle.

  - ⋆ Matrice d'une famille d'un vecteur. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base. L'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$ est un isomorphisme entre E^k et $\mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{K})$.
  - ⋆ Matrice d'une application linéaire dans des bases.
  - ⋆ Décodage matriciel. L'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$ est un isomorphisme entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Application canoniquement associée à une matrice. $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension $\dim(E) \times \dim(F)$.
  - ⋆ Écriture matricielle de $y = f(x)$.
  - ⋆ Application du codage matriciel à l'étude de l'image et du noyau. Noyau et image d'une matrice. Lorsque A représente f, $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont isomorphes et $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont isomorphes.
  - ⋆ Matrice d'une composée d'applications linéaires.
  - ⋆ Exemples de choix adéquats de bases et d'espaces.

- Le cas particulier des matrices carrées.

  - ⋆ Le cas particulier des endomorphismes. Isomorphisme d'anneau entre $\mathscr{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Matrice d'une puissance d'endomorphisme. Matrice d'un projecteur. Retour sur les endomorphismes nilpotents et matrices nilpotentes.
  - ⋆ Matrices inversibles et isomorphismes. Critère d'inversibilité : équivalence entre A inversible et f bijective, f injective, f surjective lorsque f est un endomorphisme représenté par A. critère du noyau, critère de l'image. Équivalence entre inversibilité, inversibilité à gauche et inversibilité à droite. Une matrice carrée est inversible si et seulement si ses colonnes forment une base si et seulement si ses lignes forment une base.
  - ⋆ Si B et C sont inversibles, $\mathrm{Ker}(CA) = \mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(AB) = \mathrm{Im}(A)$. Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice préservent son noyau. Les opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice préservent son image

- Rang d'une matrice.

  - ⋆ Définition comme le rang de la famille des vecteurs colonnes. Le rang de A est égal au rang de toute famille de vecteurs représentée par A. Le rang de A est égal au rang de toute application linéaire représentée par A. $\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$.

  - ⋆ Théorème du rang. CNS d'inversibilité avec le rang. Le rang d'un produit est inférieur au minimum des rangs des deux matrices. Le rang est invariant par multiplication à gauche ou à droite par une matrice inversible. Les opérations élémentaires préservent le rang. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$. Le rang est aussi le rang de la famille des vecteurs lignes.
  - ⋆ Une matrice est dite échelonnée si chaque ligne commence par strictement plus de zéros que la précédente ou est nulle si la précédente est nulle. Le rang d'une matrice échelonnée est le nombre de lignes non nulles de cette matrice.
  - ⋆ Matrices extraites. Le rang d'une matrice extraite de A est inférieur ou rang de A. Le rang de A est la taille de la plus grande matrice (carrée) inversible que l'on peut extraire de A.
- Changement de base, matrices équivalentes, matrices semblables
  - ⋆ Matrice de passage. $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$. Produit de matrices de passages, inverse d'une matrice de passage. Changement de coordonnées dans une base (pour les vecteurs et pour les applications linéaires).
  - ⋆ Matrices équivalentes. C'est une relation d'équivalence. Deux matrices qui s'obtiennent l'une à partir de l'autre via une succession d'opérations élémentaires sont équivalentes. Deux matrices représentant une même application linéaires sont équivalentes. Matrice J_r de rang r (tous les coefficients sont nuls sauf les r premiers coefficients « diagonaux ») dans $\mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$. Toute matrice de rang r est équivalente à J_r. Deux matrices sont équivalente si et seulement si elles ont le même rang.
  - ⋆ Matrices semblables. C'est une relation d'équivalence. Deux matrices représentant un même endomorphismes sont semblables. Deux matrices semblables ont même rang (réciproque fausse). Puissances de matrices semblables.
  - ⋆ Trace d'une matrice et d'un endomorphisme. L'application tr est une forme linéaire non nulle. Relation $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ et $\mathrm{tr}(f \circ g) = \mathrm{tr}(g \circ f)$. Deux matrices semblables ont même trace (réciproque fausse). Trace d'un projecteur.
- Retour sur les systèmes linéaires.
  - ⋆ L'ensemble des solutions de $AX = 0$ est $\mathrm{Ker}(A)$. Rang d'un système. Dimension de l'ensemble des solutions avec le rang.
  - ⋆ Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si $B \in \mathrm{Im}(A)$. Ensemble des solutions le cas échéant.
  - ⋆ Si B est un vecteur colonne quelconque, alors A est inversible si et seulement si $AX = B$ admet une solution.