

# Programme de colles - Semaine n° 3

du 30 septembre au 6 octobre 2024

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

4 – Fonctions

5 – Trigonométrie (*uniquement les fonctions sinus, cosinus et tangente*)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examineur parmi la liste suivante :

- Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\ln(x) \leq x - 1$  de deux façons différentes (à l'aide d'une étude de fonction et avec un argument de convexité).
- Pour trois valeurs particulières de  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$  (choisies par l'examineur), donner (sans démonstration) le domaine de définition<sup>1</sup>, le domaine de dérivabilité, l'expression de la dérivée de  $x \mapsto x^\alpha$  et l'allure de la courbe représentative (faisant bien apparaître la monotonie et les limites).
- Montrer que, pour tout  $\alpha > 0$ , la fonction  $x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$  (prolongée en 0 en posant  $0^\alpha = 0$ ) est strictement croissante et continue sur  $\mathbb{R}_+$ , dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  lorsque  $\alpha \geq 1$  et sur  $\mathbb{R}_+^*$  lorsque  $\alpha < 1$ . Calculer sa dérivée.
- Montrer que  $(1+x)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} e$ .
- Montrer que  $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .
- Montrer<sup>2</sup> que, pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  vérifiant  $a^2 + b^2 = 1$ , il existe un unique  $\theta \in ]-\pi; \pi]$  tel que  $a = \cos(\theta)$  et  $b = \sin(\theta)$ .

Les exercices (les 45 minutes restantes) consisteront essentiellement à des études de fonctions avec le plus d'autonomie possible et, s'il reste du temps, des preuves d'inégalités, des applications du théorème de la bijection, etc. Les fonctions pourront comporter éventuellement des sinus, cosinus ou tangente<sup>3</sup>.

**Prévisions pour la semaine 4 :** chapitre 5 (toute la trigonométrie avec en particulier les formules de trigonométrie et les fonctions Arctan, Arcsin et Arccos).

1. Lorsque  $\alpha > 0$ , on prend la convention que  $0^\alpha = 0$ . Pour résumer :

$f : x \mapsto x^\alpha$	$D_f$	$D_{f'}$	$f'$	$\mathcal{C}_f$
$\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$	ressemble à $x \mapsto x^2$ ou $x \mapsto x^3$ selon la parité.
$\alpha \in ]1; +\infty[ \setminus \mathbb{N}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$	ressemble à $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$
$\alpha \in ]0; 1[$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$	ressemble à $x \mapsto \sqrt{x}$
$\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$	ressemble à $x \mapsto 1/x$ ou $x \mapsto 1/x^2$ selon la parité
$\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$	ressemble à $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}_+^*$

2. Pour les élèves : attention on attend une preuve légèrement différente de celle vue en cours puisqu'on se limite au cas où  $\alpha = 0$ .

3. Il est donc demandé de connaître les propriétés de ces trois fonctions, notamment de déterminer leur signe. Les fonctions Arctan, Arcsin et Arccos ne sont pas au programme de cette semaine. On limitera l'usage technique des formules de trigonométrie à la semaine prochaine également.

# Détails des chapitres au programme

## Chapitre 4 – Fonctions

### Partie A : Résultats généraux

cf. programme de la semaine 2

### Partie B : Rappels et compléments sur les limites, la continuité et la dérivabilité

cf. programme de la semaine 2

### Partie C : Premières fonctions usuelles

cf. programme de la semaine 2 avec en plus :

- Logarithme en base  $a$ .
- Puissances à exposant réel.
  - ★ Définition  $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$  lorsque  $x > 0$ . Convention  $0^\alpha = 0$  lorsque  $\alpha > 0$ . Extension des propriétés des puissances.
  - ★ Fonctions puissances généralisées. Le domaine de définition dépend de si  $\alpha \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$  ou  $\mathbb{R}^* \setminus \mathbb{Z}$ . Propriétés (continuité, dérivabilité, limites, variations, convexité/concavité, courbe). Position relatives selon la puissance.
  - ★ Fonctions exponentielles de base  $a$ .
  - ★ Fonction du type  $u^v$ . Réflexe : on revient à la définition avec exponentielle et logarithme.
  - ★ Croissances comparées (limite quand  $x \rightarrow +\infty$  de quotients de termes du type  $(\ln(x))^\beta$ ,  $x^\alpha$  ou  $e^{\gamma x}$ ; limite quand  $x \rightarrow +\infty$  de  $x^\alpha |\ln(x)|^\beta$ ).

### Partie D : Études de fonctions

cf. programme de la semaine 2

## Chapitre 5 – Trigonométrie (*uniquement les fonctions sin, cos et tan*)

- Fonctions sinus et cosinus. Périodicité, parité/imparité, minoration/majoration, signe sur  $\mathbb{R}$ . Continuité, dérivabilité, variations, convexité/concavité, courbes.
- Fonction tangente. Périodicité, parité/imparité, minoration/majoration, signe sur  $\mathbb{R}$ , continuité, dérivabilité, variations, convexité/concavité, limites, courbe.